

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ БЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

³Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассматривается многоэтажное здание из железобетона. В качестве конструктивной схемы выбран связевый каркас здания с поперечным расположением рам. Колонны и ригели рассматриваются как многослойные композитные железобетонные конструкции. При расчетах учитывается физическая нелинейность диаграмм деформирования и различие предельных деформаций при растяжении и сжатии составляющих фазовых материалов стержней с учетом их массовых нагрузок. Приводятся соотношения для предельных значений нагрузок, при которых деформация не превышает соответствующие предельные значения при растяжении и сжатии в каждом из фазовых материалов колонн и ригелей. Приведены соотношения для определения усилий, моментов, деформаций и прогибов в рассматриваемых стержневых конструкциях.

Ключевые слова: ригель, колонна, многоэтажное здание, массовые силы, физическая нелинейность, диаграмма деформирования бетона, продольно-поперечный изгиб, статическая определимость, изгибающий момент, композиты

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.003

УДК: 539.374

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ №19-01-00038, 17-41-210272

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В., 2022

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 05.08.2022

В настоящее время с ростом населения крупных городов все актуальнее становятся вопросы и проблемы, возникающие при строительстве высотных зданий и сооружений. Одной из важных проблем является расчет при проектировании указанных зданий на воздействие нагрузок, в частности ветровых нагрузок. Одними из наиболее распространенных и недорогих в производстве изделий, используемых в строительстве, являются изделия на основе бетонов. Задачи живучести бетонных и железобетонных стержневых систем рассматриваются в достаточно большом количестве научных исследований [1–5]. Расчеты зданий и сооружений из железобетонных стержневых систем на действие различных нагрузок приведены в работах [6–8]. Известно [9–11], что диаграммы деформирования бетонов демонстрируют существенную нелинейность при растяжении и сжатии. Учет физической нелинейности деформирования бетонов, а также его разносопротивляемость растяжению и сжатию был рассмотрен в работах [12–26]. В данной работе будем рассматривать высотные здания из физически нелинейных стержней с учетом массовых сил.

Рассмотрим конструктивную схему связевого каркаса многоэтажного здания из железобетона с поперечным расположением рам (рис. 1). Рассмотрим плоскую раму (рис. 2) под действием вертикальных нагрузок, где ригели с колоннами соединяются шарнирно.

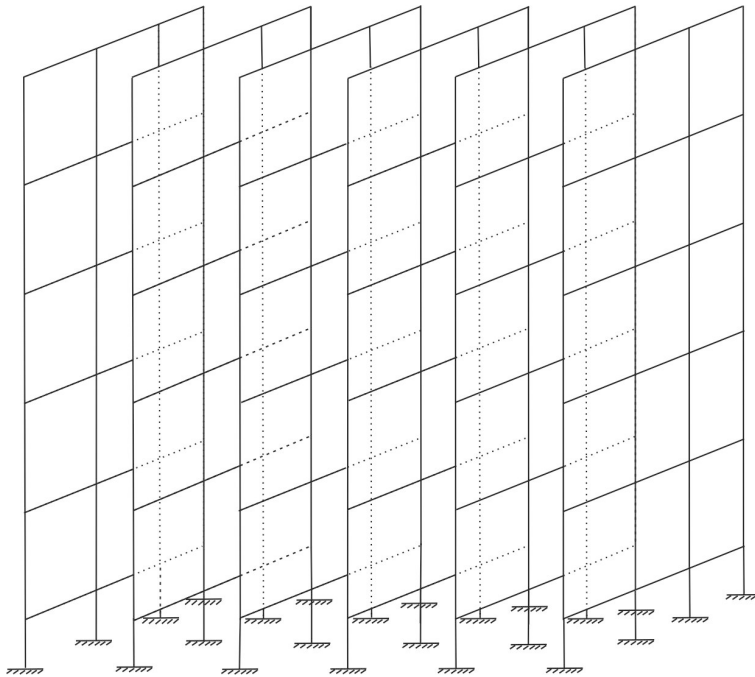


Рис. 1. Конструктивная схема каркаса многоэтажного здания из железобетона

Стержневые элементы в рассматриваемой раме будем обозначать двузначными индексами i, j , где $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$.

Обозначим через l_i , $i = 1, \dots, n_1$ длины ригелей, h_j , $j = 1, \dots, n_2$ – высоты колонн в рассматриваемой раме (рис. 2).

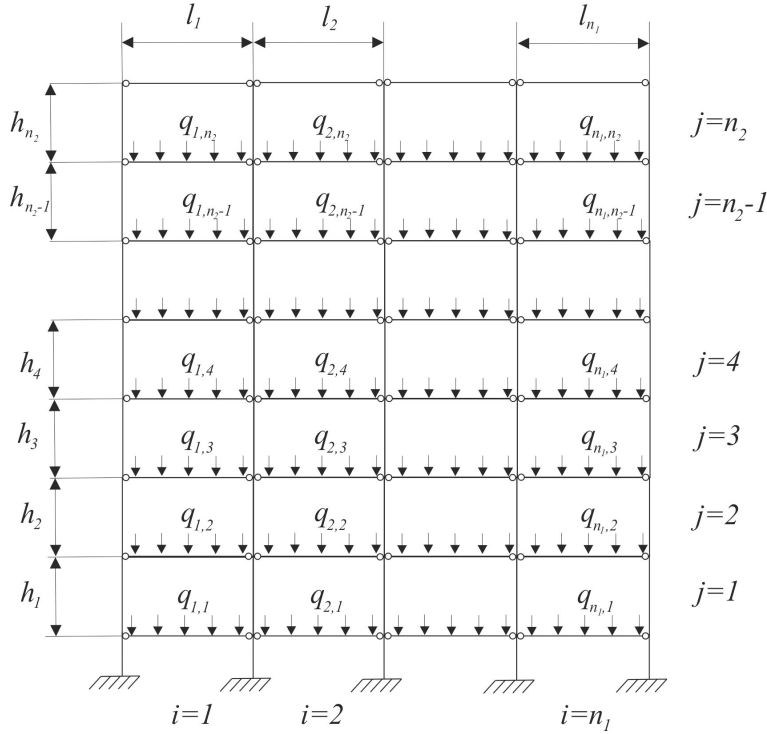


Рис. 2. Поперечная рама

На рассматриваемый железобетонный ригель действует распределенная нагрузка $q_{i,j}$, направленная вертикально вниз.

На колонну действует продольная сила N_z от стоящей выше колонны и равнодействующая от опорных усилий в месте шарнирного соединения ригеля и колонны.

Каждый из ригелей будем рассматривать как многослойную бетонную конструкцию, где в каждом из слоев может быть реализована своя марка бетона. Будем считать, что ригели имеют одинаковое поперечное сечение вдоль всей длины. Для простоты последующих расчетов ограничимся случаем трехслойных конструкций, имеющих симметричное относительно осей OX и OY поперечное сечение (рис. 3), где на указанном рисунке через $b_{i,j,k}$ и $\Delta_{i,j,k}$ обозначены параметры поперечного сечения ригеля. Индексы i, j в обозначениях $b_{i,j,k}$ и $\Delta_{i,j,k}$ означают место расположения ригеля в раме (рис. 2), k – порядковый номер слоя в сечении (рис. 3).

Аналогично ригелям, колонны также примем трехслойными, где через $b'_{i,j,k}$ и $\Delta'_{i,j,k}$ обозначены параметры поперечного сечения, которым в дальнейшем, чтобы отличать от ригелей, будем дописывать штрих в обозначениях (рис. 4).

Исходя из того, что реальные диаграммы демонстрируют существенную нелинейность при растяжении и сжатии, в качестве зависимости между напряжениями и деформациями в i -ом слое стержня для случая $-\varepsilon_{i,j,k}^* < \varepsilon \leq \varepsilon_{i,j,k}^{*+}$ будем использовать аппроксимацию указанной диаграммы полиномами второго порядка

$$\sigma_{i,j,k} = A_{1,i,j,k}^2 \varepsilon + A_{2,i,j,k}^2 \varepsilon^2, \quad (1)$$

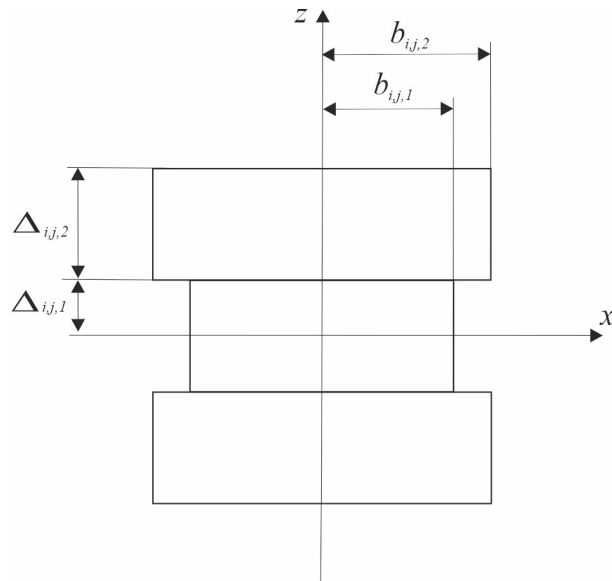


Рис. 3. Поперечное сечение бетонного ригеля

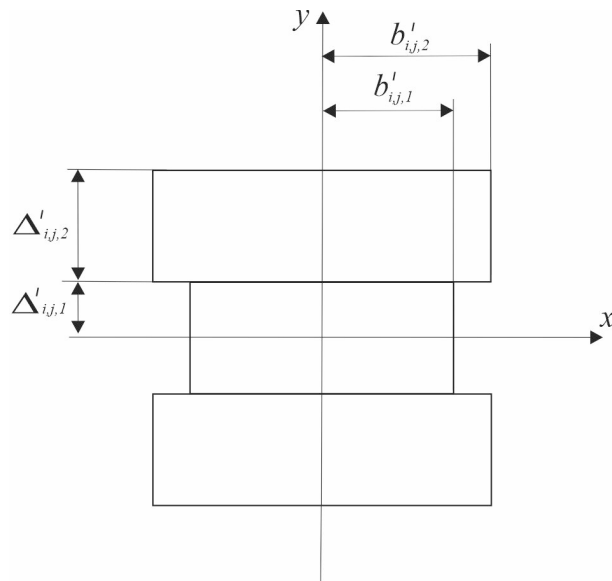


Рис. 4. Поперечное сечение бетонной колонны

где $\varepsilon_{i,j,k}^{*+}$, $-\varepsilon_{i,j,k}^{*-}$ – предельная деформация упрочнения при растяжении и сжатии материала k -го слоя стержня i, j , $A_{1,i,j,k}^2$, $A_{2,i,j,k}^2$ – физические параметры, определяемые из реальной диаграммы растяжения и сжатия бетонов k -го слоя соответствующего стержня. Указанные коэффициенты можно получить, имея реальные диаграммы

растяжения и сжатия бетонов, либо использовать соотношения, имея основные физические характеристики бетонов, таких как пределы прочности, модули упругости и предельные деформации при растяжении и сжатии [9, 27]. Значения коэффициентов (1), сопоставление реальных диаграмм деформирования и диаграмм, построенных по соотношениям (1), приведены в работе [20]. Для колонн коэффициенты $A_{1,i,j,k}^2, A_{2,i,j,k}^2$ в зависимости (1) будем указывать со штрихом, без штриха будем подразумевать, что указанные коэффициенты относятся к ригелям.

Случай равенства или превышения значения деформации $\varepsilon_{i,j}^{*+} = \min\{\varepsilon_{i,j,k}^{*+}\}$ или $\varepsilon_{i,j}^{*-} = \min\{\varepsilon_{i,j,k}^{*-}\}$ будем считать случаем потери несущей способности стержня.

Во всех последующих расчетах будем использовать безразмерные величины

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^-}, & \tilde{b}_{i,j,k} &= \frac{b_{i,j,k}}{l_1}, & \tilde{\Delta}_{i,j,k} &= \frac{\Delta_{i,j,k}}{l_1}, & \tilde{l}_i &= \frac{l_i}{l_1}, & \tilde{h}_i &= \frac{h_i}{l_1}, \\ \tilde{q} &= q \frac{1}{l_1 \sigma_{1*}^-}, & \tilde{Q} &= Q \frac{1}{l_1^2 \sigma_{1*}^-}, & \tilde{N} &= N \frac{1}{l_1^2 \sigma_{1*}^-}, & \tilde{M} &= M \frac{1}{l_1 \sigma_{1*}^-}, & \tilde{w} &= \frac{w}{l_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где безразмеривающие величины: σ_{1*}^- – предел прочности при сжатии бетона марки В10, l_1 – длина ригеля 1, 1; q – величина распределенной нагрузки, Q – величина перерезывающей силы, M – величина изгибающего момента, N – продольного усилия, w – величина прогиба.

В дальнейшем индекс « \sim » над величинами будем опускать и полагать, что они являются безразмерными, если это не оговорено специально.

При рассмотрении ригелей начало координат O поместим в левый конец в центр поперечного сечения, ось OZ направим вертикально вверх, ось OX направим вдоль оси ригеля (рис. 3).

В данной работе ограничимся рассмотрением случая, когда ось стержня совпадает с нейтральной линией. Случай несовпадения нейтральной линии с осью стержня при продольно-поперечном изгибе рассмотрен в работе [28].

Для рассматриваемых стержней будем считать справедливыми кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява, тогда будут справедливы соотношения

$$\varepsilon(y, z) = -z \varkappa_z(y), \quad \varkappa_z(y) = \frac{d^2 w_0(y)}{dy^2}, \quad (3)$$

где $\varkappa_z(y)$ – кривизны осевой линии ригеля, $w_0(y)$ – величина прогиба ригеля.

Из соотношений (3) видно, что в рамках принятой системы координат и действующих нагрузок на ригель кривизна кривой прогиба $\varkappa_z(y)$ положительна, а сама кривая прогиба имеет выпуклость вниз. Соответственно, знак деформации в ригеле $\varepsilon(y, z) < 0$ при $z > 0$ и $\varepsilon(y, z) > 0$ при $z < 0$. Из соотношений (1) видно, что аналогичные знаки имеют и напряжения: $\sigma_{i,j,k} < 0$ при $z > 0$ и $\sigma_{i,j,k} > 0$ при $z < 0$.

Для колонн начало координат O поместим в верхний конец в центр поперечного сечения, ось OZ направим вертикально вниз вдоль оси колонны. Для колонн деформация определяется из соотношений

$$\varepsilon(z) = e_0(x) = \frac{dw_0(z)}{dz}. \quad (4)$$

Нагрузки и условия закрепления ригеля таковы, что имеем случай прямого изгиба, тогда дифференциальные уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{d^2 M_x}{dy^2} = q_{i,j}, \quad Q = \frac{dM_x}{dy}, \quad (5)$$

где $M_x(y)$ – проекция вектора изгибающего момента на ось Ox , Q – величина перерезывающей силы, q_z – величина нагрузки на ригель, которую будем считать равномерно распределенной по длине ригеля.

Уравнения равновесия для колонн имеют вид

$$\frac{dN}{dz} = -q_j, \quad (6)$$

где N – величина продольного усилия, q_j – распределенная нагрузка, вызванная собственной массой колонны.

Из условия того, что стержни являются шарнирно опертыми, справедливы соотношения

$$w(0) = 0, \quad w(l_i) = 0, \quad M_x(0) = 0, \quad M_x(l_i) = 0. \quad (7)$$

Для колонны i, j из условия закрепления имеем

$$w(0) = 0, \quad (8)$$

также для данной колонны i, j (рис. 4) в верхней точке должны быть справедливы условия непрерывности усилий, которые с учетом того, что на колонну действуют продольные усилия от соседних ригелей, примут вид

$$N(h_j) = N_{i,j} + N''_{i-1,j} + N'_{i,j}, \quad Q(h_j) = 0, \quad (9)$$

где $N_{i,j}$ равно величине продольного усилия в колонне выше $i, j + 1$ в месте защемления, если $j = n_2$, то, т. к. на верхнюю колонну не действует нагрузка, имеем $N_{i,n_2} = 0$. Значения продольных усилий от реакций оснований рядом расположенных ригелей в месте шарнирного соединения с колонной обозначены через $N'_{i,j}$, $N''_{i,j}$, причем для крайних колонн справедливо $N''_{0,j} = 0$, $N'_{n_1,j} = 0$.

Величина изгибающего момента в ригеле i, j в случае одноосного напряженного состояния и поперечного сечения ригеля, изображенного на рис. 3, определяется из соотношений

$$M_x = -4 \sum_{i=1}^2 \iint_S z \sigma_i dS, \quad (10)$$

которые, с учетом связи напряжений и деформаций по закону (1), и соотношений (3) примут вид

$$\begin{aligned} M_x &= -4 \int_0^{\Delta_{i,j,1}} dz \int_0^{b_{i,j,1}} z \sigma_{i,j,1} dx - 4 \int_{\Delta_{i,j,1}}^{\Delta_{i,j,1} + \Delta_{i,j,2}} dz \int_0^{b_{i,j,2}} z \sigma_{i,j,2} dx = \\ &= -4 \int_0^{\Delta_{i,j,1}} dz \int_0^{b_{i,j,1}} z (A_{1,i,j,1} \varepsilon + A_{2,i,j,1} \varepsilon^2) dx - \\ &- 4 \int_{\Delta_{i,j,1}}^{\Delta_{i,j,1} + \Delta_{i,j,2}} dz \int_0^{b_{i,j,2}} z (A_{1,i,j,2} \varepsilon + A_{2,i,j,2} \varepsilon^2) dx = \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
&= -4 \int_0^{\Delta_{i,j,1}} dz \int_0^{b_{i,j,1}} (-A_{1,i,j,2} z \varkappa_z(y) + A_{2,i,j,2} z^2 \varkappa_z(y)^2) dx - \\
&-4 \int_{\Delta_{i,j,1}}^{\Delta_{i,j,1} + \Delta_{i,j,2}} dz \int_0^{b_{i,j,2}} (-A_{1,i,j,2} z \varkappa_z(y) + A_{2,i,j,2} z^2 \varkappa_z(y)^2) dx = \\
&= B_{i,j,1} \varkappa_z(y) + B_{i,j,2} \varkappa_z^2(y),
\end{aligned}$$

где постоянные $B_{i,j,1}$, $B_{i,j,2}$ можно определить из соотношений

$$B_{i,j,1} = \frac{4}{3} \Delta_{i,j,1}^3 b_{i,j,1} A_{1,i,j,1} + \frac{4}{3} (\Delta_{i,j,2}^3 + 3\Delta_{i,j,1}^2 \Delta_{i,j,2} + 3\Delta_{i,j,1} \Delta_{i,j,2}^2) b_{i,j,2} A_{1,i,j,2},$$

$$B_{i,j,2} = -\Delta_{i,j,1}^4 b_{i,j,1} A_{2,i,j,1} - \left(\{\Delta_{i,j,1} + \Delta_{i,j,2}\}^4 - \Delta_{i,j,1}^4 \right) b_{i,j,2} A_{2,i,j,2}.$$

Из полученных выражений видно, что для полученных коэффициентов справедливы неравенства $B_{i,j,1} > 0$, $B_{i,j,2} < 0$.

Выражение для момента (11) в ригеле можно написать как функцию от прогиба

$$M_x = B_{i,j,1} \frac{d^2 w_0(y)}{dy^2} + B_{i,j,2} \left(\frac{d^2 w_0(y)}{dy^2} \right)^2. \quad (12)$$

Подставим выражение момента (12) в уравнение равновесия (5), тогда получим дифференциальное уравнение

$$B_{i,j,1} \frac{d^4 w_0}{dy^4} + 2B_{i,j,2} \frac{d^3 w_0}{dy^3} + 2B_{i,j,2} \frac{d^2 w_0}{dy^2} \frac{d^4 w_0}{dy^4} = q_{i,j}. \quad (13)$$

Из решения уравнения (13) с условиями на границах (7) можно определить величину изгибающего момента и перерезывающей силы вдоль всей его длины.

Более простой вид уравнения (13) можно получить, если проинтегрировать уравнение (5)

$$\int_0^y \frac{d^2 M_x}{dy^2} dy = q_{i,j} y, \quad (14)$$

которое перепишем в виде

$$\frac{dM_x}{dy} = q_{i,j} y + Q(0). \quad (15)$$

Интегрируя уравнение (14) с учетом (7), получим соотношения для изгибающего момента

$$M_x = q_{i,j} \frac{y^2}{2} + Q(0)y, \quad M_x = q_{i,j} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{l_i^2}{2} \right) + Q(0)(y - l_i). \quad (16)$$

Исключая из уравнений (16) величину перерезывающей силы в левом краю ригеля $Q(0)$, получим выражение для изгибающего момента

$$M_x = q_{i,j} \frac{y^2}{2} - \frac{l_i}{2} q_{i,j} y. \quad (17)$$

Из соотношений (17) видно, что с учетом того, что все нагрузки направлены вертикально вниз, т. е. $q_{i,j} < 0$, величина изгибающего момента M_x всюду положительна по всей длине ригеля.

Из соотношений (12), (17) получим уравнение для определения прогибов в ригеле

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dy^2}\right)^2 + \frac{B_{i,j,1}}{B_{i,j,2}} \frac{d^2 w_0}{dy^2} = y^2 \frac{q_{i,j}}{2B_{i,j,2}} - y \frac{l_i q_{i,j}}{2B_{i,j,2}}. \quad (18)$$

Уравнение (14) является квадратным относительно $\frac{d^2 w_0}{dy^2}$ и, соответственно, имеет два решения. Из этих двух решений выберем то решение, которое соответствует равенству 0 второй производной прогиба при отсутствии нагрузок. Так как $B_{i,j,1} > 0$, $B_{i,j,2} < 0$, то равенство нулю второй производной прогиба при $q_{i,j} = 0$ будет только при условии знака минус в решении перед корнем

$$\frac{d^2 w(y)}{dy^2} = -\frac{B_{i,j,1}}{2B_{i,j,2}} - \sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} + \frac{1}{2B_{i,j,2}} (y^2 q_{i,j} - y l_i q_{i,j})}, \quad (19)$$

Выражение под корнем в соотношениях (19) должно быть неотрицательным, соответственно, должно быть справедливо

$$\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} + \frac{1}{2B_{i,j,2}} (y^2 q_{i,j} - y l_i q_{i,j}) > 0,$$

принимая во внимание, что $B_{i,j,2} < 0$, а выражение $y^2 q_{i,j} - y l_i q_{i,j} > 0$, получим ограничение для нагрузок на ригели $q_{i,j}$

$$q_{i,j} > -\frac{2B_{i,j,1}^2}{B_{i,j,2}(y^2 - y l_i)}. \quad (20)$$

Правая часть полученного выражения (20) отрицательна и по модулю достигает минимального значения в середине пролета ригеля $y = l_i/2$. Тогда для того, чтобы выражение (20), выполнялось по всей длине ригеля, должны выполняться ограничения на действующие нагрузки $q_{i,j}$

$$q_{i,j} > -\frac{8B_{i,j,1}^2}{l_i^2 B_{i,j,2}}. \quad (21)$$

Если проинтегрировать уравнение (19), то можно получить

$$\frac{dw_0(y)}{dy} = \frac{dw_0(y)}{dy} \Big|_{y=0} - \frac{B_{i,j,1} y}{2B_{i,j,2}} - \int_0^y \sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} + \frac{1}{2B_{i,j,2}} (y^2 q_{i,j} - y l_i q_{i,j})} dy, \quad (22)$$

которое, если проинтегрировать его с учетом условий на границе

$$w_0(0) = 0, \quad w_0(l_i) = 0, \quad (23)$$

можно получить соотношения для прогиба

$$w_0(y) = \frac{dw_0(y)}{dy} \Big|_{y=0} y - \frac{B_{i,j,1} y^2}{4B_{i,j,2}} - \int_0^y dy \int_0^y \sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} + \frac{1}{2B_{i,j,2}} (y^2 q_{i,j} - y l_i q_{i,j})} dy, \quad (24)$$

$$w_0(y) = \frac{dw_0(y)}{dy} \Big|_{y=0} (y - l_i) - \frac{B_{i,j,1}(y^2 - l_i^2)}{4B_{i,j,2}} - \int_{l_i}^y dy \int_0^y \sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} + \frac{1}{2B_{i,j,2}} (y^2 q_{i,j} - y l_i q_{i,j})} dy. \quad (25)$$

Решая совместно уравнения (24) и (25), можно получить значение $\frac{dw_0(y)}{dy}$

$$\left. \frac{dw_0}{dy} \right|_{y=0} = l_i \frac{B_{i,j,1}}{4B_{i,j,2}} + \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} dy \int_0^y \sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} + \frac{1}{2B_{i,j,2}} (y^2 q_{i,j} - y l_i q_{i,j})} dy. \quad (26)$$

Из соотношений (24), (26) можно окончательно получить выражения для прогиба ригеля

$$w_0(y) = \left(l_i \frac{B_{i,j,1}}{4B_{i,j,2}} + \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} dy \int_0^y \sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} + \frac{1}{2B_{i,j,2}} (y^2 q_{i,j} - y l_i q_{i,j})} dy \right) y - \frac{B_{i,j,1} y^2}{4B_{i,j,2}} - \int_0^y dy \int_0^y \sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} + \frac{1}{2B_{i,j,2}} (y^2 q_{i,j} - y l_i q_{i,j})} dy. \quad (27)$$

Из соотношений (3), (19) можно получить выражение для опеределения деформации в ригеле

$$\varepsilon(y, z) = -z \frac{d^2 w_0}{dy^2} = -z \left(-\frac{B_{i,j,1}}{2B_{i,j,2}} - \sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} + \frac{1}{2B_{i,j,2}} (y^2 q_{i,j} - y l_i q_{i,j})} \right). \quad (28)$$

Рассмотрим случай $z > 0$, тогда деформация будет отрицательная и в рамках решаемой задачи значение деформации должно удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{i,j,1}^{*-} &< \varepsilon(y, z), \quad 0 \leq z \leq \Delta_{i,j,1}, \\ -\varepsilon_{i,j,2}^{*-} &< \varepsilon(y, z), \quad \Delta_{i,j,1} \leq z \leq \Delta_{i,j,1} + \Delta_{i,j,2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $-\varepsilon_{i,j,k}^k$ – предельная деформация сжатия k -го слоя материала стержня.

Исходя из уравнения деформации $\varepsilon(y, z)$ видно, что она возрастает по модулю линейно с увеличением z , соответственно, наибольшее по модулю значения будут на верхних границах каждого слоя, т. е. при $z = \Delta_{i,j,1}$ и при $z = \Delta_{i,j,1} + \Delta_{i,j,2}$.

В местах закрепления ригеля $y = 0$ и $y = l_i$ деформация $\varepsilon(y, z)$ равна нулю и достигает наибольшего по модулю значения в середине пролета ригеля $y = l_i/2$, тогда можно получить соотношения для первого фазового материала стержня

$$-\varepsilon_{i,j,1}^{*-} < -\Delta_1 \left(-\frac{B_{i,j,1}}{2B_{i,j,2}} - \sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} - \frac{q_{i,j} l_i^2}{8B_{i,j,2}}} \right),$$

которые перепишем в виде

$$\frac{\varepsilon_{i,j,1}^{*-}}{\Delta_1} > -\frac{B_{i,j,1}}{2B_{i,j,2}} - \sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} - \frac{q_{i,j} l_i^2}{8B_{i,j,2}}},$$

а указанное неравенство запишем

$$\sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} - \frac{q_{i,j} l_i^2}{8B_{i,j,2}}} > -\frac{B_{i,j,1}}{2B_{i,j,2}} - \frac{\varepsilon_{i,j,1}^{*-}}{\Delta_1}.$$

Если возвести в квадрат обе части полученного выражения, получим ограничение для внешней нагрузки $q_{i,j}$

$$q_{i,j} > 2 \frac{B_{i,j,1}^2}{l_i^2 B_{i,j,2}} - \frac{8B_{i,j,2}}{l_i^2} \left(\frac{B_{i,j,1}}{2B_{i,j,2}} + \frac{\varepsilon_{i,j,1}^{*-}}{\Delta_1} \right)^2. \quad (30)$$

Аналогичные соотношения можно получить для второго слоя, при которых деформация не превысит своих предельных значений

$$q_{i,j} > 2 \frac{B_{i,j,1}^2}{l_i^2 B_{i,j,2}} - \frac{8B_{i,j,2}}{l_i^2} \left(\frac{B_{i,j,1}}{2B_{i,j,2}} + \frac{\varepsilon_{i,j,2}^{*-}}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)^2. \quad (31)$$

Для случая $z < 0$ имеем, что деформация положительна в рассматриваемых слоях, следовательно, должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon(y, z) &\leq \varepsilon_{i,j,1}^{*+}, & -\Delta_{i,j,1} \leq z \leq 0, \\ \varepsilon(y, z) &\leq \varepsilon_{i,j,2}^{*+}, & -\Delta_{i,j,1} - \Delta_{i,j,2} \leq z \leq -\Delta_{i,j,1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогично, рассуждая, как и для случая сжатия, имеем

$$\Delta_1 \left(-\frac{B_{i,j,1}}{2B_{i,j,2}} - \sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} - \frac{q_{i,j} l_i^2}{8B_{i,j,2}}} \right) < \varepsilon_{i,j,1}^{*+},$$

которое перепишем в виде

$$\sqrt{\frac{B_{i,j,1}^2}{4B_{i,j,2}^2} - \frac{q_{i,j} l_i^2}{8B_{i,j,2}}} > -\frac{B_{i,j,1}}{2B_{i,j,2}} - \frac{\varepsilon_{i,j,1}^{*+}}{\Delta_1},$$

откуда окончательно получим для нагрузок неравенство

$$q_{i,j} > 2 \frac{B_{i,j,1}^2}{l_i^2 B_{i,j,2}} - \frac{8B_{i,j,2}}{l_i^2} \left(\frac{B_{i,j,1}}{2B_{i,j,2}} + \frac{\varepsilon_{i,j,1}^{*+}}{\Delta_1} \right)^2, \quad (33)$$

которое для оставшегося слоя имеет вид

$$q_{i,j} > 2 \frac{B_{i,j,1}^2}{l_i^2 B_{i,j,2}} - \frac{8B_{i,j,2}}{l_i^2} \left(\frac{B_{i,j,1}}{2B_{i,j,2}} + \frac{\varepsilon_{i,j,2}^{*+}}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)^2. \quad (34)$$

Таким образом, для того, чтобы деформация не превышала предельные значения в соответствующих слоях, необходимо, чтобы нагрузка $q_{i,j}$ удовлетворяла соотношениям (30), (31), (33), (34). Также для существования решения необходимо, чтобы нагрузка удовлетворяла соотношениям (20).

Из соотношений (5), (17) можно найти силу реакций опор и величины сил (9), с которой ригели воздействуют на колонны

$$N'(i, j) = N''(i, j) = q_{i,j} l_i / 2. \quad (35)$$

Продольное усилие в колонне i, j с поперечным сечением, изображенным на рис. 4, определяется из соотношений

$$N = 4 \sum_{i=1}^2 \iint_S \sigma_{i,j,k} dS, \quad (36)$$

которые, с учетом связи напряжений и деформаций по закону (1) и соотношений (4), примут вид

$$\begin{aligned}
N &= 4 \int_0^{\Delta'_{i,j,1}} dy \int_0^{b'_{i,j,1}} \sigma_{i,j,1} dx + 4 \int_{\Delta'_{i,j,1}}^{\Delta'_{i,j,1} + \Delta'_{i,j,2}} dy \int_0^{b'_{i,j,2}} \sigma_{i,j,2} dx = \quad (37) \\
&= 4 \int_0^{\Delta'_{i,j,1}} dy \int_0^{b'_{i,j,1}} (A'_{1,i,j,1} \varepsilon + A'_{2,i,j,1} \varepsilon^2) dx + \\
&\quad + 4 \int_{\Delta'_{i,j,1}}^{\Delta'_{i,j,1} + \Delta'_{i,j,2}} dy \int_0^{b'_{i,j,2}} (A'_{1,i,j,2} \varepsilon + A'_{2,i,j,2} \varepsilon^2) dx = \\
&= 4 \int_0^{\Delta'_{i,j,1}} dy \int_0^{b'_{i,j,1}} (A'_{1,i,j,1} e_0(z) + A'_{2,i,j,1} e_0^2(z)) dx + \\
&\quad + 4 \int_{\Delta'_{i,j,1}}^{\Delta'_{i,j,1} + \Delta'_{i,j,2}} dy \int_0^{b'_{i,j,2}} (A'_{1,i,j,2} e_0(z) + A'_{2,i,j,2} e_0^2(z)) dx = \\
&= C_{i,j,1} e_0(z) + C_{i,j,2} e_0^2(z),
\end{aligned}$$

где постоянные $C_{i,j,1}$, $C_{i,j,2}$ определяются из соотношений

$$\begin{aligned}
C_{i,j,1} &= 4\Delta'_{i,j,1} b'_{i,j,1} A'_{1,i,j,1} + 4\Delta'_{i,j,2} b'_{i,j,2} A'_{1,i,j,2} + 4\Delta'_{i,j,3} b'_{i,j,3} A'_{1,i,j,3}, \\
C_{i,j,2} &= 4\Delta'_{i,j,1} b'_{i,j,1} A'_{2,i,j,1} + 4\Delta'_{i,j,2} b'_{i,j,2} A'_{2,i,j,2} + 4\Delta'_{i,j,3} b'_{i,j,3} A'_{2,i,j,3}.
\end{aligned}$$

Как видно из полученных соотношений, постоянные $C_{i,j,1}$ и $C_{i,j,2}$ положительны. При заданных нагрузках деформация осевой линии стержня $e_0(z)$ и продольное усилие N должны быть отрицательны.

Выражение для продольного усилия (37) в колонне можно написать как функцию от прогиба

$$N = C_{i,j,1} \frac{dw_0(z)}{dz} + C_{i,j,2} \left(\frac{dw_0(z)}{dz} \right)^2. \quad (38)$$

Подставим выражение продольного усилия в уравнение равновесия (6), тогда получим

$$C_{i,j,1} \frac{d^2 w_0}{dz^2} + 2C_{i,j,2} \frac{dw_0}{dz} \frac{d^2 w_0}{dz^2} = -q_j. \quad (39)$$

Для определения величины прогиба в колонне необходимо решить дифференциальное уравнение (39) с граничным условием (5). По соотношениям (4) необходимо определить деформации в колонне и указанные деформации не должны превышать предельные значения для материалов каждого слоя.

Вместо дифференциального уравнения (39) можно получить более простые соотношения, если учесть, что задача о защемленном с одного края стержне является статически определимой (рис. 5).

Из уравнения равновесия (6) и граничных условий на вершине колонны (9) имеем

$$\int_{h_j}^x \frac{dN}{dz} = -q_j(z - h_j), \quad (40)$$

которое перепишем в виде

$$N = N(h_j) - q_j(z - h_j), \quad (41)$$

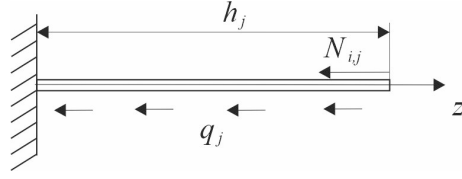


Рис. 5. Колонна, защемленная с одного края и свободная с другого

откуда окончательно получим

$$N = N_{i,j} - q_j(z - h_j). \quad (42)$$

Из (38), (42) получим дифференциальное уравнение для определения перемещений в колоннах

$$C_{i,j,1} \frac{dw_0(z)}{dz} + C_{i,j,2} \left(\frac{dw_0(z)}{dz} \right)^2 = N_{i,j} - q_j(z - h_j), \quad (43)$$

с условиями на границе

$$w_0(0) = 0. \quad (44)$$

Уравнение (43) перепишем в виде

$$\left(\frac{dw_0(z)}{dz} \right)^2 + \frac{C_{i,j,1}}{C_{i,j,2}} \frac{dw_0(z)}{dz} = \frac{N_{i,j}}{C_{i,j,2}} - \frac{q_j}{C_{i,j,2}}(z - h_j). \quad (45)$$

Решив квадратное уравнение (45) относительно $\frac{dw_0}{dz}$, получим

$$\frac{dw_0}{dz} = -\frac{C_{i,j,1}}{2C_{i,j,2}} \pm \sqrt{\frac{C_{i,j,1}^2}{4C_{i,j,2}^2} + \frac{1}{C_{i,j,2}}(N_{i,j} - q_j(z - h_j))}. \quad (46)$$

Для выбора нужного знака в соотношениях (46) нужно выбрать решение, которому соответствует равенство нулю правой части при отсутствии нагрузок, соответственно, нужно взять со знаком плюс, тогда, с учетом (44), находим выражение для прогиба колонны

$$w_0(z) = \int_0^z \left(-\frac{C_{i,j,1}}{2C_{i,j,2}} + \sqrt{\frac{C_{i,j,1}^2}{4C_{i,j,2}^2} + \frac{1}{C_{i,j,2}}(N_{i,j} - q_j(z - h_j))} \right) dz. \quad (47)$$

Тогда получим из соотношений (4), (46) выражение для деформации

$$\varepsilon = \frac{dw_0}{dz} = -\frac{C_{i,j,1}}{2C_{i,j,2}} + \sqrt{\frac{C_{i,j,1}^2}{4C_{i,j,2}^2} + \frac{1}{C_{i,j,2}}(N_{i,j} - q_j(z - h_j))}. \quad (48)$$

Как видно из уравнения (48), деформация с увеличением нагрузок $N_{i,j}$ и q_j возрастает по абсолютной величине. Значение под корнем в выражении деформации должно быть неотрицательно

$$\frac{C_{i,j,1}^2}{4C_{i,j,2}^2} + \frac{1}{C_{i,j,2}}(N_{i,j} - q_j(z - h_j)) > 0, \quad (49)$$

причем наименьшее значение левой части выражения (49) достигается в месте защемления $z = 0$, тогда для нагрузок получим ограничение

$$\frac{C_{i,j,1}^2}{4C_{i,j,2}^2} + \frac{1}{C_{i,j,2}}(N_{i,j} + q_j h_j) > 0,$$

откуда получим

$$N_{i,j} + q_j h_j > -\frac{C_{i,j,1}^2}{4C_{i,j,2}}. \quad (50)$$

Также деформация не должна превышать предельные значения для каждого из составляющих фазовых материалов, если принять

$$\varepsilon_{i,j}^{*-} = \min\{\varepsilon_{i,j,k}^{*-}\}, \quad k = 1, 2, \quad (51)$$

тогда получим соотношения для нагрузок, при которых деформация не превышает предельных значений в месте защемления, где деформация наибольшая по абсолютной величине

$$-\frac{C_{i,j,1}}{2C_{i,j,2}} + \sqrt{\frac{C_{i,j,1}^2}{4C_{i,j,2}^2} + \frac{1}{C_{i,j,2}}(N_{i,j} - q_j(z - h_j))} > -\varepsilon_{i,j}^{*-}, \quad (52)$$

из соотношений (52) получим

$$N_{i,j} + q_j h_j > C_{i,j,2} \left(\frac{C_{i,j,1}}{2C_{i,j,2}} - \varepsilon_{i,j}^{*-} \right)^2 - \frac{C_{i,j,1}^2}{4C_{i,j,2}}. \quad (53)$$

Величины нагрузок, с которыми колонна действует на ниже расположенную колонну, можно определить из выражения (42)

$$N_{i,j-1} = N_{i,j} + q_j h_j. \quad (54)$$

Решение задачи сводится к определению, при заданных нагрузках на ригели $q_{i,j}$, по соотношениям (35) нагрузок на соседние колонны. По соотношениям (27) определяются прогибы ригелей, границы нагрузок $q_{i,j}$, при которых деформация не превышает предельных значений для каждого фазового материала ригеля, определяются неравенствами (20), (30), (31), (33), (34).

Для расчета прогибов и деформаций колонн по соотношениям (47), (48) необходимо знать нагрузки от вышестоящих колонн, поэтому расчет необходимо делать, начиная с верхних этажей, последовательно применяя формулу (54).

При расчете с учетом массовых нагрузок необходимо в выражение $q_{i,j}$ нагрузок на ригели добавить нагрузку, вызванную массовыми силами, и в распределенные нагрузки на колонны q_j подставить выражение для массовых сил для колонн. В случае отсутствия массовых сил в расчетах следует брать $q_{i,j}$ без учета массовых сил, а q_j принять равной 0.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гемлеринг А. В. Расчет стержневых систем. Москва: Строительство, 1974. 208 с.
- [2] Мищенко А. В., Немировский Ю. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.
- [3] Бухтиярова А. С. Некоторые результаты исследований живучести пространственных железобетонных рамно-стержневых систем // Известия Юго-Западного государственного университета. 2011. № 5-2(38). С. 243–246.

- [4] Клюева Н. А., Шувалов К. А. Методика экспериментального определения параметров деформирования и разрушения преднапряженных железобетонных статически неопределимых балочных систем в запредельных состояниях // Вестник МГСУ. 2012. № 11. С. 61–66.
- [5] Проценко А. М., Власов В. В. Статический принцип предельного равновесия и определение деформированного состояния статически неопределимых железобетонных конструкций в стадии исчерпания их несущей способности // Воздействие статических, динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций / под ред. Гвоздева А. А. 1972. С. 192–222.
- [6] Кодыш Э. Н., Трекин Н. Н., Никитин И. К. Проектирование многоэтажных зданий с железобетонным каркасом. Москва: Издательство строительных вузов. 352 с.
- [7] Егорычев О. О., Чурин П. С., Поддаева О. И. Экспериментальное исследование сило-моментных ветровых нагрузок на высотные здания // Промышленное и гражданское строительство. 2014. № 9. С. 28–30.
- [8] Егорычев О. О., Чурин П. С. Экспериментальное исследование ветровых нагрузок на высотные здания // Жилищное строительство. 2015. № 6. С. 20–22.
- [9] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [10] Маилян Л. Р., Иващенко Е. И. Расчет железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовский гос. строит. ун-т, 2006. 222 с.
- [11] Крись Ю. А. Трансформирования диаграмм деформирования бетона при центральном сжатии и растяжении // Известия вузов. Строительство. 2008. № 7. С. 113–122.
- [12] Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188.
- [13] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.
- [14] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // Известия Алтайского государственного университета. 2021. № 1(117). С. 40–46.
- [15] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polymetallic disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [16] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения многослойного бетонного стержня на несущую способность при продольно-поперечной нагрузке // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник тезисов 9-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию ИПРИМ РАН. 2019. С. 185–189.
- [17] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных бетонных стержней армированных стальной арматурой под действием массовых сил // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 94–103.
- [18] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
- [19] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [20] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб физически-нелинейных железобетонных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3(49). С. 85–93.
- [21] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 133–146.

- [22] Плевков В. С., Колупаева С. Н., Кудяков К. Л. Расчетные диаграммы нелинейного деформирования базальто-фибробетона при статических и кратковременных динамических воздействиях // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 3. с. 95–110.
- [23] Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики. Москва: Строительство, 1974. 208 с.
- [24] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения и силы тяжести на деформирование многослойных бетонных стержней при квазистатических нагрузках // Моделирование и механика конструкций. 2020. № 12. С. 11–49.
- [25] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела : материалы второй международной конференции, Казань, Россия, 8-11 декабря 2009 г. Казань: Казанский гос. ун-т, 2009.
- [26] Немировский Ю. В. Метод расчета стержневых композитных стержней из разномодульных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы V Всероссийской научной конференции. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. С. 288–290.
- [27] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.
- [28] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник ПНИПУ. Механика. 2020. № 1. с. 60–73.

Yu. V. Nemirovskii, S. V. Tikhonov

DETERMINATION OF THE BEARING CAPACITY OF MULTI-STOREY BUILDINGS FROM PHYSICALLY NON-LINEAR CONCRETE RODS

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The paper considers a multi-storey building made of reinforced concrete. As a constructive scheme, a braced building frame with a transverse arrangement of frames was chosen. Columns and crossbars are considered as multilayer composite reinforced concrete structures. The calculations take into account the physical nonlinearity of strain diagrams and the difference in ultimate strains in tension and compression of the constituent phase materials of the rods, taking into account their mass loads. Ratios are given for the limiting values of loads at which the deformation does not exceed the corresponding limiting values in tension and compression in each of the phase materials of the columns and crossbars. Relationships for determining forces, moments, deformations and deflections in the considered bar structures are given.

Keywords: crossbar, column, multi-storey building, body forces, physical nonlinearity, concrete deformation diagram, longitudinal-transverse bending, static determinability, bending moment, composites

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Professor, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.
Tikhonov Sergey Vladimirovich, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

REFERENCES

- [1] Gemlering A. V. Calculation of bar systems. Moscow: Stroitelstvo, 1974. 208 p.
- [2] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V., Vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered bar systems. Novosibirsk: NGASU, 2004. 488 p.
- [3] Bukhtiyarova A. S. Some results of studies of the survivability of spatial reinforced concrete frame-rod systems // *Izvestiya of the Southwestern State University*. 2011. no. 5-2(38). P. 243–246.
- [4] Klyueva N. A., Shuvalov K. A. Method of experimental determination of the parameters of deformation and destruction of prestressed reinforced concrete statically indeterminate beam systems in transcendent states // *Vestnik of MGSU*. 2012. no. 11. P. 61–66.
- [5] Protsenko A. M., Vlasov V. V. Static principle of limit equilibrium and determination of the deformed state of statically indeterminate reinforced concrete structures in the stage of exhaustion of their bearing capacity // *Influence of static, dynamic and repeatedly repeated loads on concrete and elements of reinforced concrete structures* / Ed. by A. A. Gvozdev. 1972. P. 192–222.
- [6] Kodysh E. N., Trekin N. N., Nikitin I. K. Design of multi-storey buildings with reinforced concrete frame. Moscow: Publishing house of construction universities. 352 c.
- [7] Egorychev O. O., Churin P. S. Experimental study of wind loads on high-rise buildings // *Zhilishnoe Stroitelstvo*. 2015. no. 6. P. 20–22.
- [8] Egorychev O. O., Churin P. S., Poddaeva O. I. Experimental study of force-moment wind loads on high-rise buildings // *Industrial and civil engineering*. 2014. no. 9. P. 28–30.
- [9] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // V. G. Shukhov *Vestnik of the Belgorod State Technological University*. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [10] Mailyan L. R., Ivashchenko E. I. Calculation of reinforced concrete elements based on actual material deformation diagrams. Rostov-on-Don: Publishing house of the Rostov state. builds. un., 2006. 222 p.
- [11] Krus Y. A. Transformations of concrete deformation diagrams under central compression and tension // *News of universities. Construction*. 2008. no. 7. P. 113–122.
- [12] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered bars taking into account physical nonlinearity // *Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and plasticity: Proceedings of the XIX All-Russian Conference, Biysk, August 28-31, 2005. Parallel, 2005*. P. 184–188.
- [13] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimate state of concrete and reinforced concrete bars under complex and longitudinal-transverse bending // *Bulletin of PNRPU. Mechanics*. 2020. no. 1. p. 60–73.
- [14] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete and steel-fiber-reinforced concrete bars // *News of the Altai State University*. 2021. no. 1(117). P. 40–46.
- [15] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polymetallic disc // *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [16] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape of a multilayer concrete bar on the bearing capacity under longitudinal-transverse loading // *Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media. Collection of abstracts of the 9th All-Russian scientific conference with international participation named after I. F. Obraztsov and Yu. G. Yanovsky dedicated to the 30th anniversary of IPRIM RAS*. 2019. P. 185–189.
- [17] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete bars reinforced with steel reinforcement under the action of body forces // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state*. 2021. no. 2(48). P. 94–103.
- [18] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
- [19] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // *AIP Conference Proceedings*. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [20] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically non-linear reinforced concrete beams // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state*. 2021. no. 3(49). P. 85–93.
- [21] Mishchenko A. V., Nemirovskiy Y. V. Nonlinear deformation of concrete elements during longitudinal-transverse bending // *News of universities. Construction*. 2013. no. 4. P. 133–146.

-
- [22] Plevkov V. S., Kolupaeva S. N., Kudyakov K. L. Design diagrams of non-linear deformation of basalt-fiber-reinforced concrete under static and short-term dynamic effects // Bulletin of the Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2016. no. 3. p. 95–110.
- [23] Lukash P. A. Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics. Moscow: Construction, 1974. 208 p.
- [24] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape and gravity on the deformation of multilayer concrete bars under quasi-static loads // Modeling and structural mechanics. 2020. no. 12. P. 11–49.
- [25] Nemirovsky Y. V. Nonlinear Deformation Prediction for Hybrid Composite Materials // Problems of non-linear mechanics of a deformable solid: materials of the second international conference, Kazan, Russia, December 8-11, 2009. Kazan: Kazan state. un-t, 2009.
- [26] Nemirovsky Y. V. Method of calculation of rod composite rods from different-modulus materials // Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics: Proceedings of the V All-Russian Scientific Conference. Tomsk: TSU publishing house, 2006. P. 288–290.
- [27] Nemirovsky Y. V. Prelimit deformation of hybrid reinforced concrete structures // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2018. no. 3(37). P. 26–37.
- [28] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimate state of concrete and reinforced concrete bars under complex and longitudinal-transverse bending // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2020. no. 1. P. 60–73.