Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2 (52). С. 36–41

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ АСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия

Аннотация. При решении задачи групповой классификации уравнений, описывающих движение чисто механического континуума, появились некоторые новые системы дифференциальных уравнений, которые можно использовать для описания реальных физических процессов. Одна из таких новых систем: асимметричная теория упругости. Эта система может быть использована для материалов имеющих малый модуль Юнга, а также для материалов, которые работают при нагрузках близких к критическим. В данной работе изучаются уравнения асимметричной теории упругости на основе их группового расслоения: разложения системы на автоморфную и разрешающую системы, которые являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. Построены бесконечные серии законов сохранения для разрешающей системы уравнений и автоморфной системы. Эти законы позволили решить краевую задачу Дирихле для асимметричной теории упругости в двумерном случае. Решения построены в виде квадратур, которые вычисляются по контуру исследуемой области.

Ключевые слова: асимметричная двумерная упругость, законы сохранения, краевая задача.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.004

УДК: 539.374

В работе [1] предлагается следующая связь тензоров напряжений и тензора деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{11} + 2\mu_0\varepsilon_{12} + \lambda\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= \mu_0\varepsilon_{11} + 2\mu\varepsilon_{12} + \mu_0\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{22} - 2\mu_0\varepsilon_{12} + \lambda\varepsilon_{11}, \end{aligned} \tag{1}$$

где σ_{ij} - компоненты тензора напряжений,ε_{ij} - компоненты тензора деформаций,$\lambda > 0, \mu > 0$ - постоянные Ламе, μ_0 - произвольное вещественное число, если $\mu_0 = 0$, то

Сенашов Сергей Иванович
`e-mail:` sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.
Савостьянова Ирина Леонидовна
`e-mail:` savostyanova@sibsau.ru, кандидат педагогических наук, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Поступила 05.07.2022

(1) есть классический закон Гука для изотропного, однородного случая.

Подставляя (1) в уравнения равновесия, тогда в случае отсутствия массовых сил получаем

$$\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)u_{xx}+\mu_0(u_{xy}+v_{xx})+\lambda v_{xy}+\mu_0 u_{xy}+\mu(u_{yy}+v_{xy})+\mu_0 v_{yy}=0,\\&\mu_0 u_{xy}+\mu(u_{xy}+v_{xy})+\mu_0 v_{xy}+(\lambda+2\mu)v_{yy}+\mu_0(u_{yy}+v_{xy})+\lambda u_{xy}=0,\end{aligned}\qquad(2)$$

где u, v - компоненты вектора деформаций, индексы внизу, если не указано иное, означают производные по соответствующим переменным. Известно, что система (2) является эллиптической.

Групповые свойства уравнений асимметричных уравнений упругости в динамическом случае изучены в [2], там, в частности, показано, что система (2) допускает бесконечную группу точечных преобразований, порождаемую операторами

$$X=h^1\partial_u+h^2\partial_v,\qquad(3)$$

где h^1, h^2 - произвольное решение уравнений Коши-Римана

$$h^1_x+h^2_y=0, h^1_y-h^2_x=0.\qquad(4)$$

Сделаем групповое расслоение системы уравнений (2) по методу [1] на подалгебре, порождаемой (3) [3]. Для этого продолжим операторы (3) на первые производные. Имеем

$$\underset{1}{X}=X+h^1_x\partial_{u_x}+h^2_y\partial_{v_y}+h^1_y\partial_{u_y}+h^2_x\partial_{v_x}.\qquad(5)$$

Дифференциальные инварианты для (5), с учетом (4), имеют вид

$$I_1=x, I_2=y, I_3=u_x+v_y, I_4=u_y-v_x.\qquad(6)$$

Тогда автоморфная система уравнений имеет вид

$$u_x+v_y=\theta(x,y), u_y-v_x=\omega(x,y).\qquad(7)$$

Напомним некоторые свойства автоморфных систем. Любое решение автоморфной системы может быть получено из одного решения этой системы с помощью преобразований, порождаемых оператором (3).

Подставляя (7) в (2) получаем разрешающую систему

$$\begin{aligned}F_1&=(\lambda+2\mu)\theta_x+\mu_0\theta_y-\mu\omega_y+\mu_0\omega_x=0,\\F_2&=(\lambda+2\mu)\theta_y-\mu_0\theta_x+\mu_0\omega_y+\mu\omega_x=0.\end{aligned}\qquad(8)$$

Повторяя почти дословно рассуждения из [2], можно утверждать, что система (8) равносильна системе уравнений (2).
Поэтому построив решение системы (8) мы получим решение системы (2).

Пусть для системы (8) поставлена задача Дирихле:

$$\theta|_L=\theta_0(x,y), \omega|_L=\omega_0(x,y),\qquad(9)$$

где L – некоторая гладкая замкнутая кривая. Для решения этой задачи построим законы сохранения для системы уравнений (8).

В силу линейности системы (8) она будет иметь бесконечное число законов сохранения. В работе будут найдены только те законы сохранения, которые позволят решить краевую задачу (9).

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (8) назовем выражение вида

$$A_x(x,y,\theta,\omega)+B_y(x,y,\theta,\omega)=\alpha F_1+\beta F_2=0, \tag{10}$$

где α,β - некоторые функции, которые не равны тождественно нулю одновременно. A,Bназываются компонентами сохраняющегося тока.

Более подробная информация о построении законов сохранения для произвольных систем дифференциальных уравнений может быть найдена в [4 - 6].
Предположим, что компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A=a^1\theta+a^2\omega, B=b^1\theta+b^2\omega, \tag{11}$$

где a^1,a^2,b^1,b^2 - некоторые функции от x,y.

Тогда из (10) получаем

$$\begin{array}{l} a^1=\alpha(\lambda+2\mu)-\beta\mu_0, a^2=\beta\mu+\alpha\mu_0,\\ b^1=\beta(\lambda+2\mu)+\alpha\mu_0, b^2=-\alpha\mu+\beta\mu_0,\\ a^1_x+b^1_y=0, a^2_x+b^2_y=0. \end{array} \tag{12}$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x+\beta_y=0, \alpha_y-\beta_x=0. \tag{13}$$

Из (10) следует

$$\int\int\limits_S(A_x+B_y)dxdy=\oint\limits_L -Ady+Bdx. \tag{14}$$

Пусть $(x_0,y_0)\in S$, тогда из (14) следует -

$$\oint\limits_L -Ady+Bdx=-\oint\limits_\varepsilon -Ady+Bdx. \tag{15}$$

где $\varepsilon:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon^2$ - окружность радиуса ε вокруг точки $(x_0,y_0)\in S$, если функции A,B имеют особенности в этой точке. Вычислим интеграл в правой части (15) для разных решений уравнений Коши-Римана. Пусть

$$\alpha=\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \beta=\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \tag{16}$$

$$\begin{array}{l}\oint\limits_\varepsilon -Ady+Bdx=\\ =\oint\limits_\varepsilon -(\alpha((\lambda+2\mu)\theta+\mu_0\omega)+\beta(-\mu_0\theta+\mu\omega))dy+(\alpha(\mu_0\theta-\mu\omega)+\beta((\lambda+2\mu)\theta+\mu_0\omega)dx\end{array} \tag{17}$$

Подставим (16) в (17) и сделаем замену переменных по формулам $x-x_0=\varepsilon\cos\phi, y-y_0=\varepsilon\sin\phi$ получаем

$$\begin{aligned}&\oint\limits_{\varepsilon} -Ady+Bdx=\\&=\int\limits_0^{2\pi}[-((\lambda+2\mu+\mu_0)\theta+(\mu_0-\mu)\omega)+2\sin\phi\cos\phi(\mu+\mu_0)\omega)]d\phi=\\&=-2\pi[(\lambda+2\mu+\mu_0)\theta(x_0,y_0)+(\mu_0-\mu)\omega(x_0,y_0)].\end{aligned}\tag{18}$$

В формуле (18) устремили $\varepsilon\to 0$ и использовали теорему о среднем.

Теперь сделаем аналогичные вычисления, положив

$$\alpha=-\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\beta=\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.\tag{19}$$

Формулы (18) и(19) позволяют, с учетом граничных условий (9) и равенства (15) определить значения функций θ и ω в произвольной точке $(x_0,y_0)\in S$.

Теперь после восстановления решений разрешающей системы, найдем решения автоморфной системы, т.е. решения исходной системы уравнений (2). Имеем

$$F_3=u_x+v_y-\theta(x,y)=0, F_4=u_y-v_x-\omega(x,y)=0.\tag{20}$$

Здесь в правой части стоят известные функции. Найдем законы сохранения уравнений (20) в следующем виде

$$A=a^3\theta+a^4\omega+c^1, B=b^3\theta+b^4\omega+c^2,\tag{21}$$

где a^3,a^4,b^3,b^4,c^1,c^2 - некоторые функции от x,y.

Имеем

$$A_x(x,y,u,v)+B_y(x,y,u,v)=\alpha F_3+\beta F_4=0.\tag{22}$$

Расщепляя систему уравнений (22) получаем

$$\begin{aligned}&a^3=\alpha, a^4=-\beta, b^3=\beta, b^4=\alpha,\\&a^3_x+b^3_y=0, a^4_x+b^4_y=0, c^1_x+c^2_y=-\alpha\theta-\beta\omega.\end{aligned}\tag{23}$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x+\beta_y=0, \alpha_y-\beta_x=0.\tag{24}$$

Пусть для системы (2) поставлена следующая краевая задача:

$$u|_L=u_0(x,y), v|_L=v_0(x,y).\tag{25}$$

Рассмотрим закон сохранения в виде

$$\oint\limits_L -Ady+Bdx=-\oint\limits_{\varepsilon} -Ady+Bdx.\tag{26}$$

Пусть решение уравнений (24) имеет вид

$$\alpha=\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\beta=\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\tag{27}$$

Подставляем (27) в правую часть (26), получаем

$$\begin{aligned}&\oint_{\varepsilon} -Ady + Bdx = \oint_{\varepsilon} -(\alpha u - \beta v + c^1)dy + (\beta u + \alpha v + c^2)dx = \\ &= \oint_{\varepsilon} -(\alpha \cos\phi - \beta \sin\phi + c^1)dy - (\beta \sin\phi + \alpha \cos\phi + c^2)dx = -2\pi u(x_0, y_0)\end{aligned} \tag{28}$$

Пусть решение уравнений (24) имеет вид

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \tag{29}$$

Подставляем (29) в правую часть (26), получаем

$$\begin{aligned}&\oint_{\varepsilon} -Ady + Bdx = \oint_{\varepsilon} -(\alpha u - \beta v + c^1)dy + (\beta u + \alpha v + c^2)dx = \\ &= \oint_{\varepsilon} -(-u \sin\phi - v \cos\phi + c^1)dy - (u \cos\phi - v \sin\phi + c^2)dx = -2\pi v(x_0, y_0)\end{aligned} \tag{30}$$

В результате получаем формулы для вычисления компонент вектора деформации

$$2\pi u(x_0, y_0) = \oint_L -Ady + Bdx, 2\pi v(x_0, y_0) = \oint_L -Ady + Bdx, \tag{31}$$

где $c^1 = \int \alpha\theta dx, c^2 = \int \beta\omega dx$.

Заключение. В статье получены новые бесконечные серии законов сохранения, которые позволили решить краевую задачу для разрешающей системы уравнений, а также для автоморфной системы. Все это позволило построить аналитическое решение задачи Дирихле для уравнений асимметричной теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аннин Б. Д. Черепанов Г. П. Упруго пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 239 с.

[2] Бельмецов Н. Ф., Чиркунов Ю. А. Точные решения уравнений динамической асимметричной модели теории упругости. // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т.15. №4. С. 38–50.

[3] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во Наука, 1978. 192 с.

[4] Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во Наука, 2001. 192 с.

[5] Senashov S.I., Vinogradov A.M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity.// Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. V.3(2). pp. 415–439.

[6] Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Симметрии и законы сохранения. Москва: Фактор, 1996.

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova

SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF ASYMMETRIC ELASTICITY THEORY

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. When solving the problem of group classification of equations describing the motion of a purely mechanical continuum, some new systems of differential equations have appeared that can be used to describe real physical processes. One of such new systems is the asymmetric theory of elasticity. This system can be used for materials with a small Young's modulus, as well as for materials that operate at loads close to critical. In this paper, the equations of the asymmetric theory of elasticity are studied on the basis of their group bundle: decomposition of the system into automorphic and resolving systems, which are systems of differential equations of the first order. Infinite series of conservation laws are constructed for a resolving system of equations and an automorphic system. These laws made it possible to solve the Dirichlet boundary value problem for the asymmetric theory of elasticity in the two-dimensional case. The solutions are constructed in the form of quadratures, which are calculated along the contour of the studied area.

Keywords: asymmetric two-dimensional elasticity, conservation laws, boundary value problem.

REFERENCES

[1] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic plastic problem. Novosibirsk: Nauka, 1983. 239 p. (in Russian)
[2] Belmetsov N. F., Chirkunov Yu. A. Exact solutions of the equations of the dynamic asymmetric model of elasticity theory. // Sib. journal. industry. matem. 2012. Vol. 15. No. 4. P. 38–50. (in Russian)
[3] Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. Novosibirsk: Nauka Publishing, 1978. 192 p.(in Russian)
[4] Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations. Novosibirsk: Izd.Nauka, 2001. 192 p. (in Russian)
[5] Senashov S. I., A. M. Vinogradov, Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // The Proc. Edinburgh Math. Soc. 1988. V. 3(2). pp. 415-439.
[6] Vinogradov A. M., Dyer I. S., Lychagin V. V. Symmetries and conservation laws. Moscow: Factor, 1996. (in Russian)

Senashov Sergei Ivanovich
e-mail: sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology , Krasnoyarsk, Russia.
Savostyanova Irina Leonidovna
e-mail: savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology , Krasnoyarsk, Russia.