

С. Л. Субботин, А. А. Алексеев

## ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

*Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия*

**Аннотация.** В работе для случая плоского напряженного состояния получены определяющие соотношения связи за пределом упругости между напряжениями и деформациями в скоростях. За параметр прослеживания принимается обобщенное время, монотонно возрастающее в процессе деформирования. Представленные соотношения с конкретизированными функционалами пластичности позволяют решать краевые задачи в рамках теории упруго-пластических процессов с использованием метода конечных элементов в скоростях.

**Ключевые слова:** пластичность, определяющие соотношения, теория упругопластических процессов, плоское напряженное состояние, функционалы пластичности, краевая задача.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.005

УДК: 539.3

Для решения краевых задач теории пластичности в расчете должны использоваться физические соотношения, адекватно описывающие свойства конструкционных материалов. В известных программных комплексах по расчету элементов конструкций за пределом упругости современная теория упругопластических процессов пока не используется. При неоднородном НДС краевых задач на основе соотношений теории упругопластических процессов решено мало [1-4]. Сейчас имеется достаточно большое количество экспериментальных данных о свойствах материалов при сложном (непропорциональном) нагружении и деформировании [5-8], а также предложены математические модели [5, 9-15] в рамках теории упругопластических процессов, верификация которых проведена при сопоставлении с экспериментальными данными. В данной статье обсуждается новая форма определяющих соотношений теории упруго-пластических процессов, теоретически обоснованная В.Г. Зубчаниновым [5]. Удобство этих определяющих соотношений состоит в том, что они приводятся к удобной форме

---

© Субботин С. Л., Алексеев А. А., 2022

*Субботин Сергей Львович*

**e-mail:** sbtn@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

*Алексеев Андрей Алексеевич*

**e-mail:** alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

Поступила 01.07.2022

связи между скоростями напряжений и деформаций. Под скоростями напряжений и деформаций понимаются их первые производные по произвольному монотонно возрастающему параметру прослеживания процесса упругопластического деформирования (обобщенному времени). Существенной особенностью этой формы определяющих соотношений является то, что из трех функционалов пластичности  $N, P, Q$ , содержащихся в соотношениях, первые два определяются так же, как и в гипотезе компланарности А.А. Ильюшина [5, 16]. Третий функционал  $Q$  распространяет соотношения на общий случай плоского напряженного состояния. В этом смысле такая форма определяющих соотношений может рассматриваться как обобщение гипотезы компланарности [16].

Трехчленное определяющее соотношение теории упругопластических процессов для плоского напряженного состояния и пространственных траекторий деформирования может быть записано в виде [5, 16] :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} + Q \hat{\mu}, \quad (1)$$

где

$$\bar{\sigma} = S_1 \hat{e}_1 + S_2 \hat{e}_2 + S_3 \hat{e}_3$$

– вектор напряжений в трехмерном изображающем девиаторном пространстве А.А. Ильюшина [5];  $\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$  – его модуль;  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  – единичные векторы (орты) трехмерного изображающего пространства А.А. Ильюшина;

$$\frac{d\bar{\Theta}}{ds} = \frac{d\Theta_1}{ds} \hat{e}_1 + \frac{d\Theta_2}{ds} \hat{e}_2 + \frac{d\Theta_3}{ds} \hat{e}_3 = \hat{p}_1$$

– вектор скорости деформаций, направленный по единичному вектору репера Френе  $\hat{p}_1$ , касательному к траектории деформирования в каждой ее точке;  $s$  – длина дуги траектории деформирования;

$$\hat{\mu} = \mu_1 \hat{e}_1 + \mu_2 \hat{e}_2 + \mu_3 \hat{e}_3$$

– единичный вектор, перпендикулярный плоскости компланарности, то есть плоскости, в которой расположены векторы  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}$  и  $p_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}$ ;  $\vartheta_1$  – угол между векторами  $\hat{p}_1$  и  $\hat{\sigma}$ , для которого

$$\cos \vartheta_1 = \hat{p}_1 \hat{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \left( S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_2 \frac{d\Theta_2}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds} \right); \quad (2)$$

$N, P, Q$  – функционалы пластичности, определяемые из экспериментов.

Как будет показано ниже, существенной особенностью определяющих соотношений (1) является возможность решения краевых задач для произвольного плоского напряженного состояния в конструкциях, находящихся в условиях упругопластического деформирования.

Для координат единичного вектора  $\hat{\mu}$  получено [16]:

$$\mu_1 = \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right), \quad \mu_2 = \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right),$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right),$$

тогда в скалярной форме определяющее соотношение (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right), \\ \frac{dS_2}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right), \\ \frac{dS_3}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом формулы (2) преобразуем соотношения (3) так, чтобы каждое слагаемое в правой части содержало как множитель производную от компонента вектора деформации по длине дуги траектории деформирования, то есть

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{ds} &= \left[ N + (P - N) \frac{S_1^2}{\sigma^2} \right] \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + \left[ (P - N) \frac{S_1 S_2}{\sigma^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + \\ &\quad + \left[ (P - N) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}, \\ \frac{dS_2}{ds} &= \left[ (P - N) \frac{S_1 S_2}{\sigma^2} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + \left[ N + (P - N) \frac{S_2^2}{\sigma^2} \right] \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + \\ &\quad + \left[ (P - N) \frac{S_2 S_3}{\sigma^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}, \\ \frac{dS_3}{ds} &= \left[ (P - N) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + \left[ (P - N) \frac{S_2 S_3}{\sigma^2} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + \\ &\quad + \left[ N + (P - N) \frac{S_3^2}{\sigma^2} \right] \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для плоского напряженного состояния при использовании модели несжимаемого материала координаты векторов напряжений и деформаций связаны соответственно с компонентами  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  тензора напряжений и компонентами  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  тензора деформаций соотношениями [5]

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \right), \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_y, \quad S_3 = \sqrt{2} \tau_{xy}, \\ \mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_x, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_y, \quad \mathcal{E}_3 = \sqrt{2} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда, с учетом (5) для модуля вектора напряжений  $\sigma$  и косинуса угла  $\vartheta_1$  по (2) при переходе от компонент векторов напряжений и скоростей деформаций к компонентам тензоров напряжений и скоростей деформаций получим

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i, \quad (6)$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_1 &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \right) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \frac{1}{2} \sigma_y \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \sqrt{2} \frac{d\varepsilon_y}{ds} \right) + \sqrt{2} \tau_{xy} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\gamma_{xy}}{ds}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sigma_x \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \sigma_y \frac{d\varepsilon_y}{ds} + \tau_{xy} \frac{d\gamma_{xy}}{ds}}{\sigma_i}. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (5), (6) определяющие соотношения можно записать через компоненты тензоров напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{ds} &= \left[ 2N + \frac{3}{2}(P - N) \frac{\sigma_x^2}{\sigma_i^2} \right] \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \left[ N + \frac{3}{2}(P - N) \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} \right] \frac{d\varepsilon_y}{ds} + \\ &+ \left[ \frac{3}{2}(P - N) \frac{\sigma_x \tau_{xy}}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_i} \right] \frac{d\gamma_{xy}}{ds}, \\ \frac{d\sigma_y}{ds} &= \left[ N + \frac{3}{2}(P - N) \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_i^2} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} \right] \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \left[ 2N + \frac{3}{2}(P - N) \frac{\sigma_y^2}{\sigma_i^2} \right] \frac{d\varepsilon_y}{ds} + \\ &+ \left[ \frac{3}{2}(P - N) \frac{\sigma_y \tau_{xy}}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \cdot \frac{\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y}{\sigma_i} \right] \frac{d\gamma_{xy}}{ds}, \\ \frac{d\tau_{xy}}{ds} &= \left[ \frac{3}{2}(P - N) \frac{\sigma_x \tau_{xy}}{\sigma_i^2} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_i} \right] \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \\ &+ \left[ \frac{3}{2}(P - N) \frac{\sigma_y \tau_{xy}}{\sigma_i^2} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \cdot \frac{\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y}{\sigma_i} \right] \frac{d\varepsilon_y}{ds} + \left[ \frac{1}{2}N + \frac{3}{2}(P - N) \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_i^2} \right] \frac{d\gamma_{xy}}{ds}. \end{aligned}$$

Окончательно, определяющие соотношения теории упругопластических процессов в скалярной форме через компоненты тензоров напряжений и деформаций можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{ds} &= E_{11} \frac{d\varepsilon_x}{ds} + E_{12} \frac{d\varepsilon_y}{ds} + E_{13} \frac{d\gamma_{xy}}{ds}, \\ \frac{d\sigma_y}{ds} &= E_{21} \frac{d\varepsilon_x}{ds} + E_{22} \frac{d\varepsilon_y}{ds} + E_{23} \frac{d\gamma_{xy}}{ds}, \\ \frac{d\tau_{xy}}{ds} &= E_{31} \frac{d\varepsilon_x}{ds} + E_{32} \frac{d\varepsilon_y}{ds} + E_{33} \frac{d\gamma_{xy}}{ds}, \end{aligned} \quad (8)$$

где упругопластические характеристики

$$\begin{aligned}
E_{11} &= 2N + \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_x^2}{\sigma_i^2}, & E_{12} &= N + \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin\vartheta_1}\frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i}, \\
E_{13} &= \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_x\tau_{xy}}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin\vartheta_1} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_i}; \\
E_{21} &= N + \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_i^2} - \frac{Q}{\sin\vartheta_1}\frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i}, & E_{22} &= 2N + \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_y^2}{\sigma_i^2}, \\
E_{23} &= \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_y\tau_{xy}}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin\vartheta_1} \cdot \frac{\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y}{\sigma_i}; \\
E_{31} &= \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_x\tau_{xy}}{\sigma_i^2} - \frac{Q}{\sin\vartheta_1} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_i}, \\
E_{32} &= \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_y\tau_{xy}}{\sigma_i^2} - \frac{Q}{\sin\vartheta_1} \cdot \frac{\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y}{\sigma_i}, & E_{33} &= \frac{1}{2}N + \frac{3}{2}(P - N)\frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_i^2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Если вместо длины дуги траектории деформации  $s$  проследивать процесс деформирования по любому другому монотонно возрастающему параметру  $t$  (обобщенному времени), то с учетом выражения

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

определяющие соотношения, связывающие скорости напряжений и деформаций, принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_x}{dt} &= E_{11}\frac{d\varepsilon_x}{dt} + E_{12}\frac{d\varepsilon_y}{dt} + E_{13}\frac{d\gamma_{xy}}{dt}, \\
\frac{d\sigma_y}{dt} &= E_{21}\frac{d\varepsilon_x}{dt} + E_{22}\frac{d\varepsilon_y}{dt} + E_{23}\frac{d\gamma_{xy}}{dt}, \\
\frac{d\tau_{xy}}{dt} &= E_{31}\frac{d\varepsilon_x}{dt} + E_{32}\frac{d\varepsilon_y}{dt} + E_{33}\frac{d\gamma_{xy}}{dt}.
\end{aligned} \tag{10}$$

При этом из (7)

$$\cos\vartheta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sigma_i} \left( \sigma_x \frac{d\varepsilon_x}{dt} + \sigma_y \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \tau_{xy} \frac{d\gamma_{xy}}{dt} \right) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}}, \quad \sin\vartheta_1 = \sqrt{1 - \cos^2\vartheta_1},$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \sqrt{\left(\frac{d\Theta_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta_3}{dt}\right)^2} = \\
&= \sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon_x}{dt}\right)^2 + \frac{d\varepsilon_x}{dt} \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \left(\frac{d\varepsilon_y}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\gamma_{xy}}{dt}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Представленные выше соотношения позволяют решать краевые задачи методом конечных элементов в скоростях. Для этого система расчетных уравнений метода конечных элементов

$$K\vec{U} = \vec{P},$$

где  $K$  – матрица жесткости;  $\vec{U}$  – вектор узловых перемещений;  $\vec{P}$  – вектор узловых нагрузок, преобразуется к решению в скоростях

$$K_t \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

где  $K_t$  – касательная матрица жесткости, получаемая на основании определяющих соотношений через производные по обобщенному времени  $t$ ;  $\frac{d\vec{U}}{dt}$  и  $\frac{d\vec{P}}{dt}$  – векторы скоростей перемещений узлов и скоростей узловых нагрузок соответственно. Касательная матрица жесткости находится обычным методом, применяемым в методе конечных элементов, на основе метода возможных перемещений Лагранжа из условия равенства работ на возможных перемещениях внешних узловых нагрузок и внутренних сил, выраженных через напряжения, но записанных в скоростях. При этом, вместо зависимостей между перемещениями узлов и деформациями в конечных элементах используются зависимости в скоростях (при условии малых перемещений), а для связи между напряжениями и деформациями – определяющие соотношения в рассматриваемой форме. Такой метод для получения касательной матрицы жесткости рассмотрен в [1] для случая определяющих соотношений в форме гипотезы компланарности.

Функционалы  $N, P, Q$  определяются путем обработки результатов экспериментов, в которых реализуется плоское напряженное состояние, соответствующее решаемой задаче. На рис. 1 показана характерная зависимость величин функционалов от длины дуги траектории деформирования  $s$  в изображающем пространстве А.А. Ильюшина для трехмерной винтовой траектории деформирования постоянной кривизны и кручения, полученная в [16].

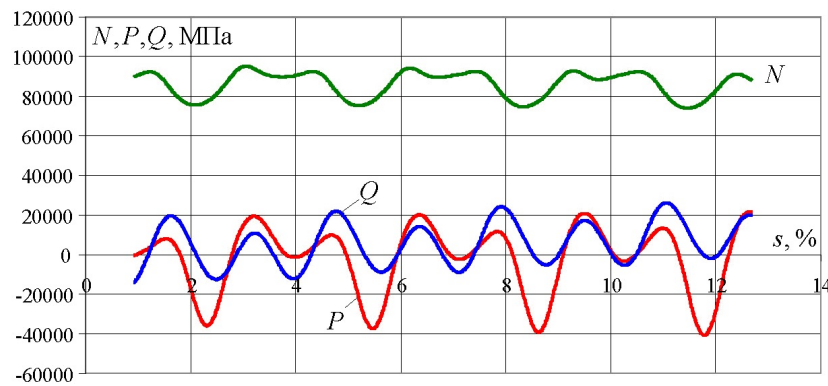


Рис. 1. Функционалы  $N, P, Q$  в зависимости от  $s$  для винтовой траектории

Уравнения метода конечных элементов в скоростях решаются на каждом шаге по параметру прослеживания. Таким образом, задача прослеживания процесса нагружения приведена к задаче Коши, где обобщенным временем является монотонно возрастающий параметр процесса. Задача решается численно по шагам. Для интегрирования может использоваться любой вариант метода прогноз-коррекция (Эйлера-Коши, Рунге-Кутты).

Необходимо отметить, что в рассматриваемых определяющих соотношениях использована модель несжимаемого материала, обладающая достаточной точностью при упругопластическом деформировании в условиях плоского напряженного состояния.

Таким образом, определяющие соотношения (10) с конкретизированными функционалами  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  в формулах (9) позволяют решать краевые задачи в рамках теории упругопластических процессов с использованием, например, метода конечных элементов в скоростях. Вопрос об аппроксимирующих функциях для функционалов пластичности  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  пока требует дополнительных исследований. Например, можно использовать, предложенный А.А. Ильюшиным экспериментально-теоретический метод СН-ЭВМ [17-19], реализация которого требует применения испытательной машины на сложное нагружение. В этом методе выбор аппроксимирующих функций выполняется по способу последовательных приближений. А большое количество уже накопленных экспериментальных данных позволяет применять метод СН-ЭВМ в численном эксперименте при решении краевых задач теории пластичности с проверкой на соответствие расчетных результатов экспериментальным данным.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алексеев А. А. Алгоритм численного решения плоской задачи теории упругопластических процессов методом конечных элементов // Вестник Тверского государственного технического университета. Тверь: ТвГТУ, 2005. Вып. 7. С. 45-49.
- [2] Субботин С. Л. Краевая задача теории упругопластических процессов при жестком, мягком и смешанном нагружении // Вестник Тверского государственного технического университета. Тверь: ТвГТУ, 2006. № 8. С. 10-13.
- [3] Субботин С. Л., Алексеев А. А. Программный комплекс для моделирования процессов сложного нагружения конструкционных материалов // Программные продукты и системы. 2006. № 4. С. 46-47.
- [4] Зубчанинов В. Г., Субботин С. Л., Алексеев А. А. Учет упрочнения в расчетах процессов сложного упругопластического нагружения // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2010. № 3. С. 207-212.
- [5] Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
- [6] Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л., Гараников В. В. Экспериментальная пластичность. Книга 1. Процессы сложного деформирования. Тверь: ТвГТУ, 2003. 172 с.
- [7] Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л., Гараников В. В. Экспериментальная пластичность. Книга 2. Процессы сложного нагружения. Тверь: ТвГТУ, 2004. 184 с.
- [8] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гулятьев В. И. Испытание стали 45 при упругопластическом деформировании по сложным траекториям постоянной и переменной кривизны // Деформация и разрушение материалов. 2016. № 9. С. 14-19.
- [9] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А. Расчеты сложного упругопластического деформирования металлов по модифицированной модели теории процессов // В сборнике: Современные проблемы механики сплошной среды. Труды конференции. 2014. С. 216-220.
- [10] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гулятьев В. И. Численное моделирование и построение образа процесса упругопластического деформирования стали по сложным плоским окружным траекториям // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 39-49.

- [11] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультияев В. И., Алексеева Е. Г. Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 32–44. doi: 10.17223/19988621/61/4
- [12] Алексеев А. А., Зубчанинов В. Г., Гультияев В. И. Экспериментальное и теоретическое исследование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по некоторым многозвенным траекториям // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 64–71.
- [13] Алексеев А. А. Моделирование процесса упругопластического деформирования стали 45 по траекториям типа спирали Архимеда // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14. № 1. С. 102–109.
- [14] Пелешко В. А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 110–135. DOI: 10.3103/S0025654416010106
- [15] Молодцов И. Н., Бабаева Д. О. Некоторые математические модели упругопластических процессов сложного нагружения // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22. № 3. С. 11–28.
- [16] Субботин С. Л., Алексеев А. А. Конкретизация обобщения гипотезы компланарности для упругопластических процессов в трехмерном изображающем пространстве А. А. Ильюшина // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. №1 (51). С. 84–94.
- [17] Ильюшин А. А. Метод СН-ЭВМ в теории пластичности // Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. С. 166–178.
- [18] Ильюшин А. А. Об одной модели, поясняющей аппроксимационный метод СН-ЭВМ в теории пластичности. // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1971, вып.1. С. 52–58.
- [19] Бабамуратов К. Ш., Ильюшин А. А., Кабулов В. К. Метод СН-ЭВМ и его приложения к задачам теории пластичности. Ташкент: ФАН, 1987, 288 с.

*S. L. Subbotin, A. A. Alekseev*

**CONSTITUTIVE RELATIONS OF THE THEORY OF ELASTOPLASTIC PROCESSES FOR SOLVING BOUNDARY PROBLEMS UNDER A PLANE STRESS STATE**

*Tver State Technical University, Tver, Russia*

**Abstract.** For the case of a plane stress state, the constitutive relations of the connection beyond the elastic limit between stresses and strains in velocities are obtained. The tracking parameter is taken to be the generalized time, which increases monotonically in the course of deformation. The presented relations with specified plasticity functionals make it possible to solve boundary value problems based on the theory of elastoplastic processes using the finite element method in velocities.

**Keywords:** plasticity, constitutive relations, theory of elastoplastic processes, plane stress state, plasticity functionals, boundary value problem.

---

*Subbotin Sergey Lvovich*

e-mail: sbtn@yandex.ru, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Alekseev Andrey Alekseevich*

e-mail: alexeev@bk.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.



## REFERENCES

- [1] Alekseev A. A. Algorithm for the numerical solution of a plane problem of the theory of elastoplastic processes by the finite element method // Bulletin of the Tver State Technical University. Tver: TvSTU, 2005. Issue. 7. P. 45-49. (in Russian)
- [2] Subbotin S. L. Boundary value problem of the theory of elastoplastic processes under rigid, soft and mixed loading // Bulletin of the Tver State Technical University. Tver: TvSTU, 2006. No. 8. P. 10-13. (in Russian)
- [3] Subbotin S. L., Alekseev A. A. A software package for modeling processes of complex loading of structural materials // Software and systems. 2006. No. 4. P. 46-47. (in Russian)
- [4] Zubchaninov V.G., Subbotin S.L., Alekseev A.A. Accounting for hardening in the calculation of processes of complex elastoplastic loading // News of the Tula state university. Technical sciences. 2010. №. 3. pp. 207-212.
- [5] Zubchaninov V.G. Mechanics of processes in plastic environments. Moscow: Fizmatlit, 2010, 352 p. (in Russian)
- [6] Zubchaninov V. G. , Okhlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental Plasticity. Book 1. Processes of complex deformation. Tver: TvSTU, 2003. 172 p.
- [7] Zubchaninov V. G. , Okhlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental Plasticity. Book 2. Complex loading processes. Tver: TvSTU, 2004. 184 p.
- [8] Zubchaninov V. G. , Alekseev A. A., and Gul'tyaev V. I. 45 steel test under elastoplastic deformation on complex trajectories of fixed and variable curvatures // Deformatsiya i Razrushenie materialov. 2016. No 9. P. 14-19.
- [9] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A. Calculations of complex elastoplastic deformation of metals using a modified model of the theory of processes // Modern problems of continuum mechanics: proceedings of the conference. 2014. P. 216-220.
- [10] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Numerical modelling and creation of the image of process under elasto-plastic deformation steel along complex plane circle trajectories // Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya. 2015. No. 4 (26). pp. 39-49.
- [11] Zubchaninov V. G., Alekseev A.A., Gul'tyaev V. I., Alekseeva E. G. The processes of a complex loading of structural steel in a five-link piecewise polygonal strain path // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2019, P. 32-44. DOI: 10.17223/19988621/61/4.
- [12] Alekseev A. A., Zubchaninov V. G., Gulyaev V. I. Experimental study and numerical calculation of the processes of complex elastoplastic deformation of materials along some multi-link strain paths // Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya. 2020. No. 3 (45). pp. 64-71.
- [13] Alekseev A. A. Modeling of elastoplastic deformation of steel 45 along archimedes spiral type trajectories // Computational Continuum Mechanics. 2021. Vol. 14. No. 1. pp. 102-109 DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.1.9
- [14] Peleshko V.A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification // Mechanics of Solids, 2016, Vol. 51, Issue 1, pp 91–113. doi: 10.3103/S0025654416010106
- [15] Molodtsov I. N., Babaeva D. O. Some mathematical models of elastoplastic processes of complex loading // Intelligent systems. Theory and applications. 2018. V. 22. No. 3. S. 11-28.
- [16] Subbotin S. L., Alekseev A. A. Concretization of generalization of the coplanarity hypothesis for elastic-plastic processes in a three-dimensional space by A.A. Ilyushin // Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya. 2022. No 1 (51). pp. 84–94.
- [17] Ilyushin A. A. The SN-EVM Method in the Theory of Plasticity // Problems of Applied Mathematics and Mechanics. M.: Nauka, 1971. P. 166-178.
- [18] Ilyushin A. A. On a model explaining the SN-EVM approximation method in the theory of plasticity. // Elasticity and inelasticity. M.: Publishing House of Moscow State University, 1971, issue 1. P. 52-58.
- [19] Babamuratov K. Sh., Ilyushin A. A., Kabulov V. K., The SN-EVM Method and Its Applications to Problems in the Theory of Plasticity. Tashkent: FAN, 1987, 288 p.