

Ю. В. Немировский

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ И РАЦИОНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗОВЫХ МАТЕРИАЛОВ В ОДНОРОДНЫХ И ГИБРИДНЫХ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНАХ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

*Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** Для прямоугольных полиметаллических пластин из изотропных материалов разработан общий метод нелинейно упругого и пластического их деформирования вплоть до разрушения. Метод основан на использовании классических кинематических гипотез Кирхгофа-Лява и соотношений физической связи напряжений и деформаций в фазовых материалах в форме деформационной теории пластичности с учетом влияния эффектов упрочнения. В качестве критерия разрушения использован критерий предельно допустимой деформации. Соответствующий переход от состояния упрочнения к состоянию разрушения. Считается, что несущая способность гибридной пластины реализуется если предельное состояние достигается одновременно во всех фазовых материалах. Рассматриваются произвольные условия закрепления контурных сторон прямоугольника (незакрепленные, защемленные, шарнирно-опертые) в любых комбинациях. Получены общие уравнения, подробно описан метод их решения при использовании современных модификаций метода Бубнова-Галеркина. Сформулирован критерий отбора рациональных проектов гибридных пластинок на основе совпадения нагрузок с эквивалентной по несущей способности однослойной пластинки.

**Ключевые слова:** гибридные пластинки, контур, изгиб, внешние нагрузки, фазовые материалы, упрочнение, разупрочнение, деформация предразрушения, условия закрепления контурных сторон (свободная, защемленная, шарнирно-опертая), нагрузки несущей способности, эталонная однослойная пластинка, рациональные (оптимальные) проекты гибридных полиметаллических пластин.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.006

УДК: 539.374

---

© Немировский Ю. В., 2022

*Немировский Юрий Владимирович*

e-mail: nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Поступила 20.07.2022

## Введение

Прямоугольные пластинки изгибаемые поперечными распределенными давлениями находят широкое применение во многих изделиях авио-космической, судо- и машиностроительной промышленности и объектах индустриального и гражданского строительства [1–18]. Если до середины прошлого века теория расчета таких конструкций опиралась на законы линейной теории упругости и линейной алгебры были достаточно обоснованы и внедрены в расчетную практику повсеместно, то в настоящее время ситуация коренным образом изменилась. Жесткие требования современной конкуренции в промышленном производстве, связанные с необходимостью повышения надежности эксплуатации создаваемых конструкций, увязанные с экономией материальных и финансовых ресурсов требуют создания новых типов изделий в виде композитных конструкций, методы расчетов по которым находятся в состоянии пробных разработок, не всегда обоснованных и требующих больших временных и трудовых ресурсов для выправления и осознания совершенных ошибок. Поэтому проблема разработки относительно простых и надежных множественных методов композитных конструкций разных типов всегда будет актуальной. Удобнее всего такие разработки проводить на классах конструкций, наиболее широко встречающихся в практике производства и в пробных попытках решения подобных задач до настоящего времени. Некоторые из таких попыток нашли отражение в работах [2, 4, 5], некоторые из возникающих вопросов освещены в работах [1, 8–16, 19–23].

В данной статье сделана попытка учитывающая предыдущие (удачные с точки зрения авторов разработки) свести их воедино и разработать единый метод расчета изгибаемых полиметаллических пластин. Некоторые детали промежуточных математических выкладок, которые легко провести читателю, знакомому с изданными материалами [17, 18] автор опускает из-за ограниченности объема статьи.

## Формулировка общей задачи исследования

В декартовой системе координат  $Oxyz$  рассмотрим  $2n$ -слойную полиметаллическую прямоугольную пластинку

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$-h_n \leq -h_{n-1} \leq \dots \leq 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_n,$$

$$h_i = \sum_{i=1}^n \Delta_i, \quad h_0 = 0,$$

где  $\Delta_i$  – толщина  $i$ -го фазового материала,  $a$  и  $b$  – размеры сторон прямоугольника.

Будем считать структуру расположения фазовых материалов попарно симметричной относительно срединной плоскости  $z = 0$ .

При рассмотрении задач изгиба пластин поперечную нагрузку для простоты считаем равномерно распределенным давлением, контурные внешние нагрузки отсутствующими и контур пластины закрепленным по сторонам прямоугольника традиционным способом: защемление, шарнирное опирание в разных комбинациях по отрезкам контура. Все слои гибридной пластины считаем тонкими, находящимися в условиях плоского напряженного состояния и подчиняющимися в процессе деформирования классическим гипотезам Кирхгофа-Лява от начала деформирования и до разрушения.

Тогда для компонент деформаций будем иметь выражения

$$\varepsilon_{xx} = -z\kappa_{xx}, \quad \varepsilon_{yy} = -z\kappa_{yy}, \quad \varepsilon_{xy} = -z\kappa_{xy}, \quad (1)$$

$$\kappa_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \kappa_{yx}, \quad (2)$$

где  $w(x, y)$  – прогиб пластины.

Имеем также выражения

$$\kappa_{xx} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \kappa_{yy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \quad \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3)$$

где  $\theta_x, \theta_y$  – углы поворота,  $\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{xy}$  – компоненты тензора кривизны и кручения изгибаемой поверхности пластины. Очевидно, эти соотношения справедливы и для однослойной пластины.

В качестве уравнений состояния фазовых материалов рассматриваемых гибридных пластин будем использовать уравнения деформационной теории Генки-Ильюшина []. Тогда для напряжений  $i$ -го фазового слоя будем иметь

$$\sigma_{xxi} = -\frac{\sigma_{ui}}{\kappa_u} (2\kappa_{xx} + \kappa_{yy}), \quad \sigma_{yyi} = -\frac{\sigma_{ui}}{\kappa_u} (2\kappa_{yy} + \kappa_{xx}), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\sigma_{ui} \frac{\kappa_{xy}}{\kappa_{ui}}, \quad (4)$$

$$\kappa_u^2 = (\kappa_{xx}^2 + \kappa_{yy}^2 + 2\kappa_{xx}\kappa_{yy} + \kappa_{xy}^2 + \kappa_{yx}^2)^{1/2}. \quad (5)$$

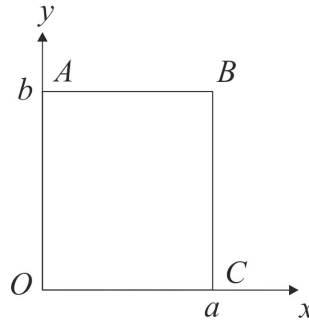


Рис. 1. Полиметаллическая пластина

Закон деформирования

$$\sigma_{ui} = (E_{1i} + z^2 E_{2i} \kappa_u^2) z \kappa_u, \quad (6)$$

$$E_{2i} = -\frac{1}{3} \frac{E_i^2}{\sigma_i^*}, \quad \varepsilon_i^* = \frac{3}{2} \frac{\sigma_i^*}{E_i}, \quad (7)$$

где  $E_i, \sigma_i^*$  – модуль Юнга и предел прочности  $i$ -го фазового материала, а  $\varepsilon_i^*$  – предельная деформация предразрушения (разупрочнения) материала для  $i$ -ой фазы.

Рассмотрим полиметаллическую пластинку в размерах  $a$  и  $b$  (рис. 1) в декартовой системе координат.

Уравнения сторон ее описываются соотношениями

$$\begin{aligned} OA: \quad x = 0, 0 \leq y \leq b, \quad AB: \quad y = b, 0 \leq x \leq a, \\ BC: \quad x = a, 0 \leq y \leq b, \quad OC: \quad y = 0, 0 \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (8)$$

По условиям закрепления на контуре исследуемые пластины разделены на группы, в каждой из которых функция прогибов с точностью до постоянного для данной группы слоистых пластин из изотропных фазовых материалов удовлетворяют всем условиям закрепления контура. Тогда будем иметь нижеследующие выражения:

- если все стороны контура защемлены, то

$$w_1(x, y) = C_1 x^2 y^2 (x - a)^2 (y - b)^2 = C_1 (x^4 - 2ax^3 + a^2 x^2)(y^4 - 2by^3 + b^2 y^2),$$

- если все стороны шарнирно оперты, то

$$w_2(x, y) = C_2 x^3 y^3 (x - a)^3 (y - b)^3,$$

- если стороны  $OA$  и  $BC$  защемленные, а стороны  $OC$  и  $AB$  шарнирно закреплены, то

$$w_3(x, y) = C_3 x^2 (x - a)^2 y^3 (y - b)^3,$$

- если стороны  $OA$  и  $BC$  шарнирно оперты, а стороны  $OC$  и  $AB$  защемлены, то

$$w_4(x, y) = C_4 x^3 (x - a)^3 y^2 (y - b)^2,$$

- если смежные стороны  $OA$  и  $AB$  защемлены, а другие смежные шарнирно оперты, то

$$w_5(x, y) = C_5 x^2 (y - b)^2 (x - a)^3 y^3,$$

- если смежные стороны  $OA$  и  $AB$  шарнирно оперты, а смежные стороны  $BC$  и  $OC$  защемлены, то

$$w_6(x, y) = C_6 x^2 (x - a)^3 y^2 (y - b)^3,$$

- если закрепления сторон  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $OC$  последовательно заменяют защемление на шарнирную опору, а ее – на защемление и шарнирную опору, то будем иметь

$$w_7(x, y) = C_7 x^3 (x - a)^2 y^3 (y - b)^2.$$

Совершенно иные формы изгибания будут реализовываться в пластинках, у которых одна, две или три контурные стороны окажутся не закрепленными. Рассмотрим их здесь последовательно.

Если сторона  $AB$  не защемлена, то возможны следующие формы изгибания

- при защемленных остальных сторонах

$$w_8(x, y) = C_8 (x - a)^2 y^2 (y - b)^2,$$

- при шарнирно опертых остальных сторонах

$$w_9(x, y) = C_9 (x - a)^3 y^3 (y - b)^3,$$

- при шарнирно опертой стороне  $BC$  и остальных защемленных сторонах

$$w_{10}(x, y) = C_{10} (x - a)^3 x^2 (y - b)^2,$$

- при шарнирно опертых стороне  $BC$  и  $CO$  и защемленной стороне  $OA$

$$w_{11}(x, y) = C_{11} x^2 (x - a)^2 y^3,$$

- если сторона  $BC$  не закреплена, а остальные – защемлены, то будем иметь

$$w_{12}(x, y) = C_{12} x^3 (x - a)^3 y^2,$$

- если сторона  $BC$  не закреплена, а остальные шарнирно оперты, то

$$w_{13}(x, y) = C_{13} x^3 (x - a)^3 y^3,$$

- если сторона  $BC$  не закреплена, сторона  $CD$  – шарнирно оперта, а остальные защемлены, то

$$w_{14}(x, y) = C_{14}(x - a)^3 y^2 (y - b)^2,$$

- если сторона  $BC$  не закреплена, а стороны  $CD$  и  $DA$  шарнирно оперты, а сторона  $AB$  защемлена, то

$$w_{15}(x, y) = C_{15} x^2 (x - a)^3 y^3,$$

- если сторона  $CO$  не закреплена, а остальные защемлены, то

$$w_{16}(x, y) = C_{16} x^2 y^2 (y - b)^2,$$

- если сторона  $CO$  не закреплена, а остальные – шарнирно оперты, то

$$w_{17}(x, y) = C_{17} x^3 y^3 (y - b)^3,$$

- если сторона  $CO$  не закреплена, сторона  $AO$  – шарнирно оперта, а остальные – защемлены, то

$$w_{18}(x, y) = C_{18} y^3 (y - b)^2 x^2,$$

- если сторона  $CO$  не закреплена, стороны  $AO$  и  $AB$  шарнирно оперты, а стороны  $BC$  – защемлены, то

$$w_{19}(x, y) = C_{19} y^3 (y - b)^2 x^3,$$

- если сторона  $AO$  не закреплена, а остальные защемлены, то

$$w_{20}(x, y) = C_{20} x^2 (x - a)^2 (y - b)^2,$$

- если сторона  $AO$  не закреплена, а остальные стороны – шарнирно оперты, то

$$w_{21}(x, y) = C_{21} x^3 (x - a)^3 (y - b)^3,$$

- если сторона  $AO$  не закреплена, сторона  $AB$  шарнирно оперта, а остальные – защемлены, то будем иметь

$$w_{22}(x, y) = C_{22} x^3 y^2 (y - b)^2,$$

- если сторона  $AO$  не закреплена, стороны  $AB$  и  $BC$  – шарнирно оперты, а сторона  $AO$  – защемлена, то будем иметь

$$w_{23}(x, y) = C_{23} x^2 (y - b)^3 (x - a)^3.$$

Возможны также ситуации, связанные с незакреплением двух или трех сторон. Рассмотрим здесь ситуации, приводящие к цилиндрическим и консольным изгибаниям прямоугольных плит. Пусть стороны  $AB$  и  $CO$  не закреплены, тогда возможны состояния:

- стороны  $BC$  и  $AO$  защемлены

$$w_{24}(x, y) = C_{24} (y - b)^2 y^2,$$

- стороны  $BC$  и  $AO$  шарнирно оперты

$$w_{25}(x, y) = C_{25} (y - b)^3 y^3,$$

- $AO$  – шарнирно оперта,  $BC$  – защемлена

$$w_{26}(x, y) = C_{26} (y - b)^2 y^3,$$

- $BC$  – шарнирно оперта,  $AO$  – защемлена

$$w_{26}(x, y) = C_{27} y^2 (y - b)^3.$$

Аналогичные зависимости получим с заменой  $y \rightarrow x$  и  $(y - b) \rightarrow (x - a)$ , когда незакрепленными будут параллельные стороны  $BC$  и  $AO$ . В случае трех незакрепленных сторон будем иметь зависимости

$$\begin{aligned} w_{27}(x, y) &= C_{26}x^2, & w_{28}(x, y) &= C_{28}(x - a)^2, \\ w_{29}(x, y) &= C_{29}y^2, & w_{30}(x, y) &= C_{30}(y - b)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого варианта рассматриваемых пластин с номером  $m$  искомое решение можно записать в форме

$$w_m(x, y) = C_m \varphi_m(x, y), \quad (9)$$

где  $\varphi_m(x, y)$  – известная функция.

Определение постоянных  $C_m$  может быть реализовано при использовании обобщенных модификаций метода Бубнова-Галеркина [ ], в которых функция  $\varphi_m(x, y)$  может быть использована для получения первого приближения, а набор функций  $\varphi_m(x, y)$ ,  $\varphi_m^2(x, y)$ ,  $\varphi_m^3(x, y)$  – для получения уточняющих решений.

Одним из важнейших вопросов, связанных с процессами деформирования гибридных полиметаллических плит является вопрос об их несущей способности, определяющей амплитуду нагрузки необходимой для их разрушения. При сформулированных выше гипотезах развития деформационных процессов, очевидно, что процесс их разрушения для проекта изделия с номером  $m$  может происходить только одновременно во всех фазовых материалах одновременно. В противном случае с развитием дальнейшего нагружения окружающие фазовые неразрушенные слои будут сохранять целостность конструкции. Допустим, что при некоторой амплитуде нагрузки  $q^*$  происходит разрушение  $m$ -го проекта с номером  $m$  вследствие достижения интенсивностью искривления некоторого уровня  $\varkappa_{um}^*$ , зависящего от  $q_m^*$ . В таком случае для любых пар  $i$  и  $j$  фазовых материалов будут справедливы зависимости [ ]

$$\varkappa_m^* h_i = \varepsilon_i^*, \quad \varkappa_m^* h_j = \varepsilon_j^*, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon_i^* = \frac{3\sigma_i^*}{2E_i}, \quad \varepsilon_j^* = \frac{3\sigma_j^*}{2E_j}, \quad (11)$$

где  $\sigma_i^*$ ,  $\sigma_j^*$ ,  $E_i$ ,  $E_j$  – пределы прочности и модули Юнга соответствующих фазовых материалов. Тогда будем иметь очевидно

$$\frac{h_i}{h_j} = \frac{\sigma_i^* E_j}{\sigma_j^* E_i}. \quad (12)$$

Среди предельных величин деформаций предразрушения существует величина

$$\varepsilon_k^* = \min(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \dots, \varepsilon_n^*) = \frac{3\sigma_k^*}{2E_k}. \quad (13)$$

Для сравнения различных проектов между собой введём эталонный проект в виде однослойной пластины толщиной  $2h_0$  из материала с параметрами  $E_0$ ,  $\sigma_0^*$  и  $\varepsilon_0^*$ , для которых при разрушении будут справедливы зависимости

$$\varkappa_0 h_0 = \varepsilon_0^* = \frac{3\sigma_0^*}{2E_0}. \quad (14)$$

Одним из важнейших вопросов, связанных с процессами деформирования гибридных полиметаллических плит, является вопрос об их несущей способности, определяющих амплитуду нагрузки, необходимой для их разрушения. При сформулированных гипотезах о развитии деформационных процессов, очевидно, что процесс их развития для определенного проекта с номером  $m$  может происходить только одновременно во всех фазовых материалах одновременно. В противном случае с развитием дальнейшего нагружения неразрушенные окружающие фазовые материалы будут сохранять целостность гибридной конструкции.

Будем рассматривать при одинаковых условиях на контурных сторонах, соответствующих проекту с номером  $m$  однородную однослойную пластинку с толщиной  $2h_0$  и полиметаллическую пластинку с общей толщиной  $2h_n$

$$h_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i. \quad (15)$$

$\Delta_i$  – толщина  $i$ -го фазового слоя и будем считать, что они разрушаются при одинаковых амплитудах равномерно распределенной нагрузки

$$q_0^* = q_m^*. \quad (16)$$

Тогда нагрузке  $q_0^*$  будет соответствовать предельно допустимая интенсивность изгиба эталонной пластинкой зависимостью

$$\varkappa_0^* h_0 = \varepsilon_0^*, \quad (17)$$

где  $\varepsilon_0^*$  – предельно допустимая деформация эталонного материала.

При разрушающей нагрузке  $q_0^*$  вес и стоимость рассматриваемой эталонной пластинки будут определяться формулами

$$B_0 = 2ab\rho_0 h_0, \quad (18)$$

$$C_0 = 2abc_0 h_0, \quad (19)$$

где  $\rho_i$ ,  $c_i$  – удельные плотность и стоимость материала  $i$ -ой фазы.

В момент разрушения можно определить также характеристики

$$w_0^* = \max_{(x,y) \in (a,b)} w_0(x,y), \quad (20)$$

$$w_m^* = \max_{(x,y) \in (a,b)} w_m(x,y), \quad (21)$$

и ввести относительную характеристику жесткости (податливости) рассматриваемого проекта

$$w_{0m}^* = \frac{w_m^*}{w_0^*}. \quad (22)$$

Очевидно, что местоположение точки накопленной максимальной податливости у обеих пластин будет совпадать

$$x_0^* = x_m^*, \quad y_0^* = y_m^*. \quad (23)$$

Введенные относительные характеристики характеризуют при одинаковой несущей способности качества вновь создаваемых проектов по расходам материалов и стоимости изделий. Очевидно, что наиболее рациональными следует чаще всего признавать

проекты, для которых справедливы неравенства

$$\frac{B}{B_0} < 1, \quad \frac{C}{C_0} < 1. \quad (24)$$

Ввиду определенного произвола параметров  $\Delta_i$ , и большого разнообразия механических и физических характеристик фазовых материалов и способов закрепления исследуемых пластин сформулировать экспромтом зависимости между геометрическими, механическими параметрами в любых из рассматриваемых комбинациях закрепления вряд-ли возможно из-за неполной формулировке всех обязательно требуемых законов механического поведения исследуемых объектов. Среди сформулированных в виде гипотез и предположений (в упрощенной приближенной форме) не был затронут обязательный для любого механического объекта при квазистатических нагружениях закон требующий обеспечение в заданных условиях нагружения и закрепления равновесного состояния изучаемого объекта, к необходимости обеспечения которого мы теперь и приступим.

Как известно, при изгибе пластин из любых материалов условия их равновесия требуют выполнения в процессе всего нагружения следующего уравнения

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - q + q_1 = 0. \quad (25)$$

Здесь  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$  – возникающие при изгибе пластины изгибающие и крутящий моменты,  $q$  – распределенная по поверхности внешняя (заданная) поперечная нагрузка,  $q_1$  – удельная (на единице длины) общая нагрузка от собственных удельных весов фазовых материалов

$$q_1 = 2 \sum_{i=1}^n \rho_i \Delta_i. \quad (26)$$

Изгибающие  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  и крутящий момент  $M_{xy}$  связаны с напряжениями  $\sigma_{xxi}$ ,  $\sigma_{yyi}$ ,  $\sigma_{xyi}$  в  $i$ -ом фазовом слое

$$M_{xx} = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{xxi} z^2 dz, \quad M_{yy} = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{yyi} z^2 dz, \quad (27)$$

$$M_{xy} = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{xyi} z^2 dz,$$

и с учетом зависимостей (4)-(6) могут быть представлены в форме

$$M_{xx} = -\frac{2}{3} (2\Phi_1 + \Phi_2) \sum_{i=1}^n E_{1i} (h_i^3 - h_{i-1}^3) - \frac{2}{5} (2\Phi_3 + \Phi_4) \sum_{i=1}^n E_{2i} (h_i^5 - h_{i-1}^5), \quad (28)$$

$$M_{yy} = -\frac{2}{3} (2\Phi_3 + \Phi_4) \sum_{i=1}^n E_{1i} (h_i^3 - h_{i-1}^3) - \frac{2}{5} (2\Phi_2 + \Phi_1) \sum_{i=1}^n E_{2i} (h_i^5 - h_{i-1}^5), \quad (29)$$

$$M_{xy} = -\frac{2}{3} \Phi_5 \sum_{i=1}^n E_{1i} (h_i^3 - h_{i-1}^3) - \frac{2}{5} \Phi_6 \sum_{i=1}^n E_{2i} (h_i^5 - h_{i-1}^5), \quad (30)$$

где



$$\Phi_1 = \kappa_{xx}, \quad \Phi_2 = \kappa_{yy}, \quad \Phi_3 = \kappa_{xx}\kappa_u^2, \quad \Phi_4 = \kappa_{yy}\kappa_u^2, \quad \Phi_5 = \kappa_{xy}, \quad \Phi_6 = \kappa_{xy}\kappa_u^2. \quad (31)$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов В. З. Тонкостенные пространственные системы. Москва: Госстройиздат, 1958. 502 с.
- [2] Немировский Ю. В. Динамика пластических слоисто-волоконистых пластин // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Самара: Самарский государственный технический университет, 2017. С. 106–110.
- [3] Кошур В. Д., Немировский Ю. В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1990. 190 с.
- [4] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. Труды второй международной конференции. Казань: Казанский государственный университет, 2009.
- [5] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Мир: Москва, 1988. 352 с.
- [6] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
- [7] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [8] Гемлеринг А. В. Расчет стержневых систем. Москва: Строительство, 1974. 208 с.
- [9] Ключева Н. А., Шувалов К. А. Методика экспериментального определения параметров деформирования и разрушения преднапряженных железобетонных статически неопределимых балочных систем в запредельных состояниях // Вестник МГСУ. 2012. № 11. С. 61–66.
- [10] Кодыш Э. Н., Трекин Н. Н., Никитин И. К. Проектирование многоэтажных зданий с железобетонным каркасом. Москва: Издательство строительных вузов. 352 с.
- [11] Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики. Москва: Строительство, 1974. 208 с.
- [12] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 133–146.
- [13] Мищенко А. В., Немировский Ю. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.
- [14] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.
- [15] Немировский Ю. В. Метод расчета стержневых композитных стержней из разномодульных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы V Всероссийской научной конференции. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. С. 288–290.
- [16] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник БГТУ им. В.Г.Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [17] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения и силы тяжести на деформирование многослойных бетонных стержней при квазистатических нагрузках // Моделирование и механика конструкций. 2020. № 12. С. 11–49.
- [18] Проценко А. М., Власов В. В. Статический принцип предельного равновесия и определение деформированного состояния статически неопределимых железобетонных конструкций в стадии исчерпания их несущей способности // Воздействие статических, динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций / под ред. Гвоздева А. А. 1972. С. 192–222.
- [19] Егорычев О. О., Чуринов П. С. Экспериментальное исследование ветровых нагрузок на высотные здания. № 6. 2015. С. 20–22.
- [20] Егорычев О. О., Чуринов П. С., Поддаева О. И. Экспериментальное исследование сило-моментных ветровых нагрузок на высотные здания. № 9. 2014. С. 28–30.
- [21] Крусь Ю. А. Трансформирования диаграмм деформирования бетона при центральном сжатии и растяжении // Известия вузов. Строительство. 2008. № 7. С. 113–122.

- [22] Маилян Л. Р., Иващенко Е. И. Расчет железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовский гос. строит. ун-т, 2006. 222 с.
- [23] Иващенко Е. И. Разработка методов расчета железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов с учетом фактического изменения площади их поперечных сечений // дис. ... канд. техн. наук. Воронеж, 2006. 230 с.

*Yu. V. Nemirovskii*

## INVESTIGATION OF DESTRUCTION AND RATIONAL DISTRIBUTION OF PHASE MATERIALS IN HOMOGENEOUS AND HYBRID POLYMETALLIC RECTANGULAR PLATES

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** For rectangular polymetallic plates made of isotropic materials, a general method has been developed for their nonlinear elastic and plastic deformation up to failure. The method is based on the use of the classical Kirchhoff-Love kinematic hypotheses and the relationship between the physical connection of stresses and strains in phase materials in the form of a deformation theory of plasticity, taking into account the influence of hardening effects. The criterion of maximum allowable deformation is used as a failure criterion. Corresponding transition from the state of hardening to the state of failure. It is believed that the bearing capacity of a hybrid plate is realized if the limiting state is reached simultaneously in all phase materials. Arbitrary conditions for fixing the contour sides of a rectangle (loose, pinched, hinged) in any combination are considered. General equations are obtained, a method for their solution is described in detail using modern modifications of the Bubnov-Galerkin method. A criterion for selecting rational designs of hybrid plates based on the coincidence of loads with a single-layer plate equivalent in bearing capacity is formulated.

**Keywords:** hybrid plates, contour, bending, external loads, phase materials, hardening, softening, pre-fracture deformation, conditions for fixing the contour sides (free, pinched, hinged), bearing capacity loads, reference single-layer plate, rational (optimal) designs of hybrid polymetallic plates

## REFERENCES

- [1] Vlasov W. Z. Thin-walled spatial systems. Moscow: Gosstroyizdat, 1958. 502 p.
- [2] Nemirovsky Y. V. Dynamics of plastic laminated fibrous plates // Proceedings of the X All-Russian Conference on Mechanics deformable rigid body. Samara: Samara State Technical University, 2017. P. 106–110.
- [3] Koshur W. D., Nemirovsky Y. V. Continuous and discrete models of dynamic deformation structural elements. Novosibirsk: Science, 1990. 190 p.
- [4] Nemirovsky Y. V. Nonlinear Deformation Prediction of Hybrid composite materials // Problems of non-linear mechanics of a deformable solid body. Proceedings of the second international conference. Kazan: Kazan State University, 2009.
- [5] Fletcher K. Numerical methods based on the Galerkin method. World: Moscow, 1988. 352 p.

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

- [6] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
- [7] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // *AIP Conference Proceedings*. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [8] Gemlering A. V. Calculation of bar systems. Moscow: Construction, 1974. 208 p.
- [9] Klyueva N. A., Shuvalov K. A. Method of experimental determination of the parameters of deformation and destruction of prestressed reinforced concrete statically indeterminate beam systems in transcendent states // *Bulletin of MGSU*. 2012. no. 11. P. 61–66.
- [10] Kodysh E. N., Trekin N. N., Nikitin I. K. Design of multi-storey buildings with reinforced concrete frame. Moscow: Publishing house of construction universities. 352 c.
- [11] Lukash P. Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics. Moscow: Construction, 1974. 208 p.
- [12] Mishchenko A. V., Nemirovskiy Y. V. Nonlinear deformation of concrete elements under longitudinal-transverse bending // *News of universities. Construction*. 2013. no. 4. P. 133–146.
- [13] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V., Vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered bar systems. Novosibirsk: NGASU, 2004. 488 p.
- [14] Nemirovsky Y. V. Prelimit deformation of hybrid reinforced concrete structures // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University*. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2018. no. 3(37). P. 26–37.
- [15] Nemirovsky Y. V. Method of calculation of rod composite rods from different-modulus materials // *Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics: Proceedings of the V All-Russian Scientific Conference*. Tomsk: TSU publishing house, 2006. P. 288–290.
- [16] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // *Bulletin of BSTU im. V.G.Shukhova*. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [17] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape and gravity on the deformation of multilayer concrete bars under quasi-static loads // *Modeling and structural mechanics*. 2020. no. 12. P. 11–49.
- [18] Protsenko A. M., Vlasov V. V. Static principle of limit equilibrium and determination of the deformed state of statically indeterminate reinforced concrete structures at the stage of exhaustion of their bearing capacity // *Influence of static, dynamic and repeatedly repeated loads on concrete and elements of reinforced concrete structures* / Ed. by G. A. A. 1972. P. 192–222.
- [19] Egorychev O. O., Churin P. S. Experimental study of wind loads on high-rise buildings. No. 6. 2015. P. 20–22.
- [20] Egorychev O. O., Churin P. S., Poddaeva O. I. Experimental study of force-moment wind loads on high-rise buildings. No. 9. 2014. P. 28–30.
- [21] Krus Y. A. Transformations of concrete deformation diagrams under central compression and tension // *News of universities. Construction*. 2008. no. 7. P. 113–122.
- [22] Mailyan L. R., Ivashchenko E. I. Calculation of reinforced concrete elements based on actual material deformation diagrams. Rostov-on-Don: Publishing house of the Rostov state. builds. un-t, 2006. 222 p.
- [23] Ivashchenko E. I. Development of methods for calculating reinforced concrete elements based on actual material deformation diagrams, taking into account the actual change in their cross-sectional area // *dis. ... cand. tech. Sciences. Voronezh*, 2006. 230 p.