Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2 (52). С. 72–77

Б. Г. Миронов[1], *Ю. Б. Миронов*[2]

О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ С ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

[1] *Российский университет транспорта, г. Москва, Россия*
[2] *Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия*

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию соотношений теории кручения стержней. Предполагается, что стержень состоит из идеального жесткопластического материала, обладающего свойством трансляционной анизотропии. При этом стержень находится под действием давления, которое меняется вдоль его образующей линейно. В работе определено напряженно-деформированное состояние рассматриваемого стержня. Получены уравнения характеристик общих соотношений, описывающих предельное состояние стержня, и найдены компоненты напряжений и деформаций вдоль этих характеристик.

Ключевые слова: пластичность, трансляционная анизотропия, кручение, деформация, напряжение, депланация.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.008

УДК: 539.374

Кручение – это вид деформации стержней, в ходе которой под влиянием моментов, действующих в поперечных сечениях, происходит их взаимный поворот. При кручении поперечные сечения стержней подвержены депланации. Исследования по теории предельного состояния стержней, подвергающихся кручению, содержатся во многих работах. В работах [1] и [2] рассмотрено кручение стержней из идеально пластического материала. Математические основы теории предельного состояния стержней при кручении изложены в работе [3]. Исследованию кручения анизотропных стержней из идеального жесткопластического материала посвящены работы [4, 5]. В [6] рассмотрено кручение стержней из идеального жесткопластического материала при условии, что они находятся под действием меняющегося внешнего давления. Вопросы кручения стержней из при условии трансляционной анизотропии рассмотрены в работах [7] и [8].

Миронов Борис Гурьевич
`e-mail:` mbg.chspu@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.
Миронов Юрий Борисович
`e-mail:` i.b.mironov@mtuci.ru, кандидат технических наук, декан, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 14.08.2022

Рассмотрим стержень из идеального жесткопластического материала, удовлетворяющей условию трансляционной анизотропии. Стержень ориентирован в пространстве x, y, z так, что его образующие параллельны оси z. Предполагается, что стержень находится под внешнего давления, которое меняется вдоль образующей стержня линейно. Пусть боковая поверхность стержня свободна от нагрузок и он закручивается вокруг своей оси.

Напряженное состояние в стержне определяется из следующих соотношений:

$$\begin{gathered}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + \mu \ \ (\lambda,\, \mu - const) \\ \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = \tau_{xz}\left(x,\, y\right), \, \tau_{yz} = \tau_{yz}\left(x,\, y\right),\end{gathered} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda, \tag{2}$$

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = k^2 \ \ (k_1, k_2, k - const) \tag{3}$$

Компоненты скоростей деформаций ε_{ij} определяются из соотношений

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \tag{4}$$

и

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \tag{5}$$

На контуре поперечного сечения закручиваемого стержня вектор $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ на направлен по касательной к ней и имеет место равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}, \tag{6}$$

Дифференцируя уравнение (3) по переменной x имеем

$$(\tau_{xz} - k_1)\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + (\tau_{yz} - k_2)\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = 0. \tag{7}$$

Согласно (7) из (2) получим

$$-(\tau_{yz} - k_2)\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + (\tau_{xz} - k_1)\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda(\tau_{xz} - k_1). \tag{8}$$

Следовательно, характеристики уравнения (8) определяются из системы

$$\frac{dx}{-(\tau_{yz} - k_2)} = \frac{dy}{\tau_{xz} - k_1} = \frac{d\tau_{yz}}{\lambda(\tau_{xz} - k_1)} \tag{9}$$

Из системы (9) имеем, что характеристики уравнения (2) задаются уравнением

$$(\tau_{xz} - k_1)dx + (\tau_{yz} - k_2)dy = 0, \tag{10}$$

а вдоль характеристик справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = k_1 \pm \sqrt{k^2 - (\lambda(y + c_1) - k_2)^2}\ , \ \tau_{yz} = \lambda(y + c_1), \tag{11}$$

где $c_1 = const$

Согласно (10) характеристики уравнения (2) направлены по касательной к кривой текучести (3).

Аналогично, дифференцируя (3) по y и поставляя полученное соотношение в (2), получим

$$(\tau_{yz} - k_2)\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - (\tau_{xz} - k_1)\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \lambda(\tau_{yz} - k_2). \tag{12}$$

$$\frac{dx}{\tau_{yz}-k_2} = \frac{dy}{-(\tau_{xz}-k_1)} = \frac{d\tau_{xz}}{\lambda(\tau_{yz}-k_2)} \tag{13}$$

Из (13) вытекает справедливость соотношений

$$\tau_{xz} = \lambda(x+c_2),\ \ \tau_{yz} = k_2 \pm \sqrt{k^2 - (\lambda(x+c_2)-k_1)^2} \tag{14}$$

где $c_2 = const$

В ходе кручении стержня компоненты напряжения остаются постоянными, в силу чего соотношения (4) и (5) интегрируются. В начальный момент компоненты деформации можно принять равными нулю. Тогда в соответствии (3) имеем

$$e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \quad \frac{e_{xz}}{\tau_{xz}-k_1} = \frac{e_{yz}}{\tau_{yz}-k_2} \tag{15}$$

где e_{ij} – компоненты деформаций.

Запишем соотношения для перемещений u, v, w в виде

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w\,(x,y) \tag{16}$$

где w – депланация θ – крутка. Тогда компоненты деформации выражаются через компоненты перемещения в следующем виде

$$e_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta y\right),\ e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta x\right) \tag{17}$$

Из (17) следует справедливость соотношения

$$\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = \theta. \tag{18}$$

Последнее уравнение из системы (15) представим в виде

$$(\tau_{yz}-k_2)e_{xz} - (\tau_{xz}-k_1)e_{yz} = 0. \tag{19}$$

Продифференцируем уравнение (19) по переменной x

$$(\tau_{yz}-k_2)\frac{\partial e_{xz}}{\partial x} - (\tau_{xz}-k_1)\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = e_{yz}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - e_{xz}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \quad . \tag{20}$$

Тогда из (18) получим

$$-(\tau_{yz}-k_2)\frac{\partial e_{xz}}{\partial x} + (\tau_{xz}-k_1)\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} = \theta(\tau_{xz}-k_1) - e_{yz}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + e_{xz}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \tag{21}$$

Характеристики уравнения (19) согласно (21) определяются из системы

$$\frac{dx}{-(\tau_{yz}-k_2)} = \frac{dy}{(\tau_{xz}-k_1)} = \frac{de_{xz}}{\theta(\tau_{xz}-k_1) - e_{yz}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + e_{xz}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}} \tag{22}$$

Следовательно, характеристики соотношения (19) также имеют вид (10), а соотношения вдоль характеристик (10) примут вид

$$\begin{aligned}
&(\tau_{yz}-k_2)de_{xz} + \left(\theta(\tau_{xz}-k_1) - e_{yz}\tfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + e_{xz}\tfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}\right)dx = 0,\\
&(\tau_{xz}-k_1)de_{xz} - \left(\theta(\tau_{xz}-k_1) - e_{yz}\tfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + e_{xz}\tfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}\right)dy = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

С учетом (11) из второго уравнения (23) имеем

$$e_{xz} = \theta\,(y+c_3) \tag{24}$$

где $c_3 = const$. В соответствии (11) и (24) из (19) находим

$$e_{yz} = \frac{\theta\,(y + c_3)\,(\lambda(y + c_1) - k_2)}{\pm\sqrt{k^2 - (\lambda(y + c_1) - k_2)^2}} \tag{25}$$

Дифференцируя соотношение (19) по y, получим, что вдоль характеристик (10) справедливы соотношения

$$\begin{gathered}(\tau_{yz} - k_2)de_{yz} + \left(\theta(\tau_{yz} - k_2) + e_{yz}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y} - e_{xz}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)dx = 0,\\ (\tau_{xz} - k_1)de_{yz} - \left(\theta(\tau_{yz} - k_2) + e_{yz}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y} - e_{xz}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)dy = 0.\end{gathered} \tag{26}$$

Согласно (14) из первого уравнения (26) получим

$$e_{yz} = -\theta\,(x + c_4) \tag{27}$$

где $c_4 = const$.

Тогда из (19) согласно (14) и (27) имеем

$$e_{xz} = \frac{-\theta\,(x + c_4)\,(\lambda\,(x + c_2) - k_1)}{\pm\sqrt{k^2 - (\lambda(x + c_2) - k_1)^2}} \tag{28}$$

Положим, что точка $(x_0,\, y_0)$ контура сечения стержня принадлежит характеристике и $\tau_{xz}\,(x_0,\, y_0) = \tau_x^0$, $\tau_{yz}\,(x_0,\, y_0) = \tau_y^0$. Тогда вдоль этой характеристики согласно (11) справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = k_1 \pm \sqrt{k^2 - \left(\lambda(y - y_0 + \frac{\tau_y^0}{\lambda}) - k_2\right)^2},\ \tau_{yz} = \lambda(y - y_0 + \frac{\tau_y^0}{\lambda}). \tag{29}$$

При этом уравнение характеристики, содержащей точку $(x_0,\, y_0)$ контура поперечного сечения стержня, запишется в виде

$$\left(\lambda(x - x_0 + \frac{\tau_x^0}{\lambda}) - k_1\right)^2 + \left(\lambda(y - y_0 + \frac{\tau_y^0}{\lambda}) - k_2\right)^2 = k^2 \tag{30}$$

Аналогично, согласно (14) вдоль характеристики (11) имеем

$$\tau_{xz} = \lambda(x - x_0 + \frac{\tau_x^0}{\lambda}),\ \tau_{yz} = k_2 \pm \sqrt{k^2 - \left(\lambda(x - x_0 + \frac{\tau_x^0}{\lambda}) - k_1\right)^2} \tag{31}$$

При этом уравнение характеристики, содержащей точку $(x_0,\, y_0)$, также имеет вид (30)

С учетом (29), из (24) и (25) получим

$$e_{xz} = \theta\,(y + c_3)\,,\ e_{yz} = \frac{\theta\lambda(y - y_0 + \frac{\tau_y^0}{\lambda})\,(y + c_3)}{k_1 \pm \sqrt{k^2 - \left(\lambda(y - y_0 + \frac{\tau_y^0}{\lambda}) - k_2\right)^2}} \tag{32}$$

Аналогично, согласно (31) из (27) и (28) имеем

$$e_{yz} = -\theta\,(x + c_4)\,,\ e_{xz} = -\frac{\theta\lambda\left(x - x_0 + \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right)(x + c_4)}{k_2 \pm \sqrt{k^2 - \left(\lambda\left(x - x_0 + \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right) - k_1\right)^2}} \tag{33}$$

Так как на линиях разрыва напряжений справедливы соотношения

$$e_{xz} = e_{yz} = 0, \tag{34}$$

то константы c_3 и c_4 определяются из соотношений (34).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соколовский В. В. Теория пластичности. М: Высшая школа, 1969. 608 с.
[2] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
[3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
[4] Быковцев Г. И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред. Сборник статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.
[5] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. К вопросу о кручении анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. Т. 1, № 23. с. 196–199.
[6] Козлова Л. С., Миронов Б. Г. Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей// // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2014. № 3. с. 107–113.
[7] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. Деформированное состояние трансляционно-анизотропных тел при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2014. № 4(72). с. 57–60.
[8] Миронов Б. Г., Тихонов С. В. Об одном виде анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1. с. 36–38.

B. G. Mironov[1], *Yu. B. Mironov*[2]

ON TORSION OF RODS WITH TRANSLATIONAL ANISOTROPY UNDER EXTERNAL PRESSURE

[1]*Russian University of transport, Moscow, Russia*
[2]*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. This work is devoted to the study of relations in the theory of torsion of rods. It is assumed that the rod consists of an ideal rigid-plastic material with the property of translational anisotropy. In this case, the rod is under the action of pressure, which varies linearly along its generatrix. The stress-strain state of the considered rod is determined in the work. Equations for the characteristics of general relations describing the limit state of the rod are obtained, and the components of stresses and strains along these characteristics are found.

Keywords: plasticity, translational anisotropy, torsion, deformation, stress, warping.

REFERENCES

[1] Sokolovsky V. V. Theory of plasticity. M: high school, 1969. 608 p.
[2] Prager V., Hodge F. G. Theory of Ideally Plastic Solids. M.: IL, 1956. 398 p.
[3] Ivlev D. D. Theory of Ideal Plasticity. M.: Science, 1966. 232 p.
[4] Bykovtsev G. Selected problematic issues of the mechanics of deformable media. Digest of articles. Vladivostok: Far Science, 2002. 566 p.
[5] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. To the question of torsion of anisotropic rods // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2015. Vol. 1, no. 23. p. 196–199.
[6] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. Deformed state of translationally anisotropic bodies under torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. 2014. no. 4(72). p. 57–60.
[7] Kozlova L. S., Mironov B. G. Torsion of prismatic rods under the action of pressure changing linearly along the generatrix// // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 2014. no. 3. p. 107–113.
[8] Mironov B. G., Tikhonov S. V. About one kind of anisotropy in torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2012. no. 1. p. 36–38.

Mironov Boris Gurjevich , Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.
Mironov Yuri Borisovich , Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.