Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. №2 (52). С. 78–88

А. В. Ковалев[1,2], *Ю. В. Малыгина*[1]

О ВЛИЯНИИ АССОЦИИРОВАННОЙ СЖИМАЕМОСТИ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ МАТЕРИАЛА

[1] *Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия*

[2] *Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Россия*

Аннотация. В работе рассмотрена задача об определении напряженного состояния упругопластической трубы, находящейся под действием температурных эффектов. Решение было проведено с помощью метода возмущений. При этом рассмотрен случай ассоциированной и упругой сжимаемости. В ходе решения было представлено решение в нулевом приближении, получены выражения полей напряжений в упругой и пластической областях в первом приближении. Определен радиус упругопластической границы. Решение задачи проводилось для случая плоской деформации.

Ключевые слова: напряжение, упругость, пластичность, ассоциированная сжимаемость, температура, плоская деформация.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.009

УДК: 539.374

Введение

Вопросу влияния сжимаемости и температурных эффектов на поведение упругопластических тел посвящены ряд статей, среди которых можно выделить работы [1–10]. Статья [1] посвящена определению напряженно-деформированного состояния упругопластических тел при учете ассоциированной сжимаемости. Исследование влияния сжимаемости по упругим деформациям подробно представлено в работах [2, 3]. В работах [4,5] рассмотрены задачи об определении напряженно-деформированного состояния упрочняющейся упруговязкопластической трубы и упругого пространства,

© Ковалев А. В., Малыгина Ю. В., 2022

Ковалев Алексей Викторович
e-mail: kovalev@amm.vsu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Малыгина Юлия Владимировна
e-mail: ymkahavren@gmail.com, преподаватель кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 15.09.2022

ослабленного цилиндрической полостью, с учетом температуры. В работах [6–10] исследовано влияние температуры и сжимаемости по упругим деформациям на определение напряженно-деформированного состояния упругопластических тел. В данной работе рассмотрена задача определения напряженного состояния упругопластической трубы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления, при учете температуры, сжимаемости по упругим деформациям и ассоциированной сжимаемости. Условие пластичности для задачи определено в виде [11]

$$\alpha_c\sigma_1 + \sqrt{S_{ij}S_{ij}} - \sqrt{2}k = 0, \tag{1}$$

где σ_1 – первый инвариант тензора напряжений, α_c – скорость дилатансии, S_{ij} – девиатор тензора напряжений, k – предел текучести.

Постановка задачи

Рассмотрим упругопластическую толстостенную трубу, поперечное сечение которой ограничено окружностями радиусов a и b, ($a < b$). При этом данная труба находится под действием равномерного внутреннего давления p. Материал трубы предполагается сжимаемым и учитывается влияние температурных эффектов. При этом рассматривается случай ассоциированной сжимаемости. Выражение для температуры задается по логарифмическому закону [12, 13] и является известным решением уравнения теплопроводности. Решение данной задачи будем проводить в цилиндрической системе координат (r, θ, z).

Запишем систему уравнений для решения задачи:

— уравнение равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \tag{2}$$

где σ_r, σ_θ – компоненты тензора напряжений;

— соотношения Коши

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, e_\theta = \frac{u}{r}, \tag{3}$$

где e_r, e_θ – компоненты тензора полных деформаций, u – компонента радиального перемещения;

— выражения для деформаций в упругой области

$$\begin{aligned} e_r^e &= \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha T, \\ e_\theta^e &= \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \mu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right] + \alpha T, \\ e_z^e &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha T, \end{aligned} \tag{4}$$

где e_r^e, e_θ^e, e_z^e – компоненты тензора деформаций в упругой области; E – модуль упругости, σ_z – компонента тензора напряжений, μ – коэффициент Пуассона, T – температура, которая задается выражением $T = P - Qlnr$, P, Q – известные постоянные [12], α – коэффициент температурного расширения [14, 15];

— условие пластичности (1) в цилиндрической системе координат

$$\left(\sigma_\theta - \sigma_r\right)^2 + \left(\sigma_\theta - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_r - \sigma_z\right)^2 = 3\Big(\sqrt{2}k - \alpha_c\sigma_1\Big)^2, \tag{5}$$

где $\sigma_1 = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$;

— ассоциированный закон пластического течения

$$\begin{aligned} de_r^p &= 2d\lambda \left[3\sigma_r - \left(1+3\alpha_c^2\right)(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z) + 3\sqrt{2}k\alpha_c\right], \\ de_\theta^p &= 2d\lambda \left[3\sigma_\theta - \left(1+3\alpha_c^2\right)(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z) + 3\sqrt{2}k\alpha_c\right], \\ de_z^p &= 2d\lambda \left[3\sigma_z - \left(1+3\alpha_c^2\right)(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z) + 3\sqrt{2}k\alpha_c\right], \end{aligned} \tag{6}$$

где e_r^p, e_θ^p, e_z^p – компоненты тензора пластических деформаций, $d\lambda$ – скалярный положительный множитель;

— граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_r\Big|_{r=a} &= -p, \\ \sigma_r\Big|_{r=b} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

— условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = [u] = 0, \tag{8}$$

— выражение полных деформаций тела в пластической области

$$e_r = e_r^e + e_r^p, e_\theta = e_\theta^e + e_\theta^p, e_z = e_z^e + e_z^p. \tag{9}$$

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука с учетом температуры (4), а приращения пластических деформаций – ассоциированным законом пластического течения (6). Поскольку в задаче мы будем рассматривать случай плоской деформации, то $e_z = 0$. Принимая во внимание соотношения (4), (6) и (9), запишем соотношения для определения полных деформаций тела в пластической области

$$\begin{aligned} de_r &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_r - \mu\left(d\sigma_\theta + d\sigma_z\right)\right] + \alpha dT + \\ &+2d\lambda\left[3\sigma_r - \left(1+3\alpha_c^2\right)(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z) + 3\sqrt{2}k\alpha_c\right], \\ de_\theta &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_\theta - \mu\left(d\sigma_r + d\sigma_z\right)\right] + \alpha dT + \\ &+2d\lambda\left[3\sigma_\theta - \left(1+3\alpha_c^2\right)(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z) + 3\sqrt{2}k\alpha_c\right], \\ 0 &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_z - \mu\left(d\sigma_r + d\sigma_\theta\right)\right] + \alpha dT + \\ &+2d\lambda\left[3\sigma_z - \left(1+3\alpha_c^2\right)(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z) + 3\sqrt{2}k\alpha_c\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Метод решения

В данной работе решение задачи будем проводить с помощью метода возмущений. Искомые соотношения представим в виде рядов по малому параметру δ. При этом мы ограничимся первыми двумя членами ряда. Таким образом, решение задачи будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}, e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + \delta e_{ij}^{(1)}, u = u^{(0)} + \delta u^{(1)}, \\ T = T^{(0)} + \delta T^{(1)}, \alpha = \alpha^{(0)} + \delta\alpha^{(1)}, \alpha_c = \alpha_c^{(0)} + \delta\alpha_c^{(1)}, \\ \mu = \mu^{(0)} + \delta\mu^{(1)}, \lambda = \lambda^{(0)} + \delta\lambda^{(1)}, k = k^{(0)} + \delta k^{(1)}, r_s = r_s^{(0)} + \delta r_s^{(1)}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\mu^{(0)} = \frac{1}{2}, \mu^{(1)}$ – известная постоянная, верхние индексы $(0), (1)$ определяют нулевое и первое приближения соответственно.

Решение и результаты

Данные разложения подставим в уравнения (2)–(5), (7), (8), (10) и, приравняв выражения при одинаковых степенях малого параметра, получим в каждом приближении систему дифференциальных уравнений для определения искомых соотношений.

В нулевом приближении, положив $\alpha^{(0)} = 0, \alpha_c^{(0)} = 0$, получим следующую систему уравнений:

— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}}{r}, \tag{12}$$

— соотношения Коши

$$e_r^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r}, e_\theta^{(0)} = \frac{u^{(0)}}{r}, \tag{13}$$

— выражения для деформаций в упругой области

$$\begin{aligned} e_r^{e(0)} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_r^{(0)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right], \\ e_\theta^{e(0)} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta^{(0)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right], \\ e_z^{e(0)} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z^{(0)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}\right)\right], \end{aligned} \tag{14}$$

— условие пластичности

$$\left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}\right)^2 + \left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right)^2 + \left(\sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right)^2 = 6{k^{(0)}}^2, \tag{15}$$

— выражение полных деформаций в пластической области

$$\begin{aligned} de_r^{(0)} &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_r^{(0)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_\theta^{(0)} + d\sigma_z^{(0)}\right)\right] + 2d\lambda^{(0)}\left[2\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right], \\ de_\theta^{(0)} &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_\theta^{(0)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(0)} + d\sigma_z^{(0)}\right)\right] + 2d\lambda^{(0)}\left[2\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right], \\ 0 &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_z^{(0)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(0)} + d\sigma_\theta^{(0)}\right)\right] + 2d\lambda^{(0)}\left[2\sigma_z^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}\right], \end{aligned} \tag{16}$$

— граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)}\Big|_{r=a} &= -p, \\ \sigma_r^{(0)}\Big|_{r=b} &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

— условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$\left[\sigma_r^{(0)}\right] = \left[\sigma_\theta^{(0)}\right] = \left[u^{(0)}\right] = 0. \tag{18}$$

Исходя их соотношений (12) – (18), в нулевом приближении имеем задачу о плоской деформации упругопластического несжимаемого материала. Тогда решение этой задачи представимо в виде [3]:

$$\sigma_r^{p(0)} = -p + 2k^{(0)} ln\left(\frac{r}{a}\right), \sigma_\theta^{p(0)} = -p + 2k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r}{a}\right)\right),$$
$$\sigma_z^{p(0)} = -p + k^{(0)}\left(1 + 2ln\left(\frac{r}{a}\right)\right),$$
$$u^{p(0)} = u^{e(0)} = \frac{3k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2}{2Er},$$
$$\sigma_r^{e(0)} = k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2 \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right], \sigma_\theta^{e(0)} = k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2 \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right], \tag{19}$$
$$\sigma_z^{e(0)} = \frac{k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2}{b^2},$$
$${r_s^{(0)}}^2 = \frac{b^2}{k^{(0)}}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + 2ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right)\right].$$

В первом приближении, согласно принятому методу решения, предполагая, что $T^{(1)} = 0$ получим следующую систему уравнений:

— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r^{(1)}}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}}{r}, \tag{20}$$

— соотношения Коши

$$e_r^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r}, e_\theta^{(1)} = \frac{u^{(1)}}{r}, \tag{21}$$

— выражения для деформаций в упругой области

$$e_r^{e(1)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_r^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_\theta^{(1)} + \sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} T^{(0)},$$
$$e_\theta^{e(1)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} T^{(0)}, \tag{22}$$
$$e_z^{e(1)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} T^{(0)},$$

— условие пластичности

$$2\left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}\right)\left(\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}\right) + 2\left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right)\left(\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_z^{(1)}\right) +$$
$$+2\left(\sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right)\left(\sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)}\right) = -6\sqrt{2}k^{(0)}\alpha_c^{(1)}\sigma_1^{(0)}, \tag{23}$$

— выражение полных деформаций в пластической области

$$\begin{aligned}
de_r^{(1)} &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_r^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_\theta^{(1)} + d\sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(d\sigma_\theta^{(0)} + d\sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)}dT^{(0)} + \\
&+2d\lambda^{(0)}\left[2\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} - \sigma_z^{(1)} + 3\sqrt{2}k^{(0)}\alpha_c^{(1)}\right] + 2d\lambda^{(1)}\left[2\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right], \\
de_\theta^{(1)} &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_\theta^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(d\sigma_r^{(0)} + d\sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)}dT^{(0)} + \\
&+2d\lambda^{(0)}\left[2\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)} + 3\sqrt{2}k^{(0)}\alpha_c^{(1)}\right] + 2d\lambda^{(1)}\left[2\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right], \\
0 &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_\theta^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(d\sigma_r^{(0)} + d\sigma_\theta^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)}dT^{(0)} + \\
&+2d\lambda^{(0)}\left[2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} + 3\sqrt{2}k^{(0)}\alpha_c^{(1)}\right] + 2d\lambda^{(1)}\left[2\sigma_z^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}\right],
\end{aligned} \tag{24}$$

— граничные условия

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=a} = \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=b} = 0, \tag{25}$$

— условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$\left[\sigma_r^{(1)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr}r_s^{(1)}\right] = \left[\sigma_\theta^{(1)} + \frac{d\sigma_\theta^{(0)}}{dr}r_s^{(1)}\right] = \left[u^{(1)} + \frac{u^{(0)}}{dr}r_s^{(1)}\right] = 0. \tag{26}$$

Определим соотношение для определения компоненты напряжений $\sigma_z^{(1)}$. Для этого преобразуем третье выражение уравнения (24).

$$\begin{aligned}
d\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_\theta^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(d\sigma_r^{(0)} + d\sigma_\theta^{(0)}\right) + E\alpha^{(1)}dT^{(0)} + \\
+2Ed\lambda^{(0)}\left[2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} + 3\sqrt{2}k^{(0)}\alpha_c^{(1)}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Введем обозначение $\chi^{(1)} = 2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}$. С учетом введенного обозначения, предыдущее выражение примет вид

$$\frac{d\chi^{(1)}}{d\lambda^{(0)}} + 4E\chi^{(1)} = 4\mu^{(1)}\frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 2E\alpha^{(1)}\frac{dT^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 12\sqrt{2}Ek^{(0)}\alpha_c^{(1)}. \tag{28}$$

Решение дифференциального уравнения (28) можно представить в виде:

$$\chi^{(1)} = e^{-4E\lambda^{(0)}}\int_0^{\lambda^{(0)}}\left[4\mu^{(1)}\frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 2E\alpha^{(1)}\frac{dT^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 12\sqrt{2}Ek^{(0)}\alpha_c^{(1)}\right]e^{4E\lambda^{(0)}}d\lambda^{(0)} + \chi_e^{(1)}, \tag{29}$$

где $\chi_e^{(1)} = 4\mu^{(1)}\sigma_z^{(0)} - 2E\alpha^{(1)}T^{(0)}$.

Таким образом, компоненту напряжений $\sigma_z^{(1)}$ можно определить согласно введенному обозначению и уравнению (29).

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)} + \chi^{(1)}\right). \tag{30}$$

Для определения компонент деформаций $e_r^{(1)}, e_\theta^{(1)}$ в упругой области, просуммируем первые два уравнения соотношения (22), при учете уже полученного решения в

нулевом приближении.

$$\begin{gathered} e_r^{(1)} + e_\theta^{(1)} = \frac{6\mu^{(1)}}{E}\sigma_z^{(0)} + 3\alpha^{(1)}T^{(0)}, \\ e_r^{(1)} - e_\theta^{(1)} = \frac{1}{2E}\left[3\left(\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}\right) + 2\mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}\right)\right]. \end{gathered} \tag{31}$$

Для определения компонент напряжений $\sigma_r^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}$ преобразуем условие пластичности (23), с учетом введенного обозначения, а также полученного нулевого решения. Таким образом, получим следующее выражение:

$$\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} = -\frac{2\sqrt{2}k^{(0)}\alpha_c^{(1)}\sigma_1^{(0)}}{\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}}. \tag{32}$$

Разрешая уравнения (31), (32), учитывая соотношения (19), получим выражения, определяющие компоненты напряжений в первом приближении.

$$\begin{gathered} \sigma_r^{p(1)} = -3\sqrt{2}{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)\right] ln\left(\frac{r}{a}\right), \\ \sigma_\theta^{p(1)} = -3\sqrt{2}{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + 2ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)\right] - \\ -3\sqrt{2}{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)\right] ln\left(\frac{r}{a}\right), \\ \sigma_r^{e(1)} = \alpha^{(1)}EQ\left[ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^2}\frac{r^2 - b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2}ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right)\right] - \\ -3\sqrt{2}{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right)\right]\frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^2}\frac{r^2 - b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2}ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right), \\ \sigma_\theta^{e(1)} = \alpha^{(1)}EQ\left[1 + ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^2}\frac{r^2 + b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2}ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right)\right] - \\ -3\sqrt{2}{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right)\right]\frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^2}\frac{r^2 + b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2}ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right), \end{gathered} \tag{33}$$

Выражение радиуса упругопластической границы получим из условия сопряжения (26) компонент напряжений $\sigma_\theta^{(1)}$ в упругой и пластической областях на упругопластической границе.

$$\begin{gathered} r_s^{(1)} = \left\{\alpha^{(1)}EQ\left[1 + ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right) - \frac{{r_s^{(0)}}^2 + b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2}ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right)\right] - \right. \\ -6\sqrt{2}{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right)\right]\frac{b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2}ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right) + \\ \left. +3\sqrt{2}{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + 2ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right)\right]\right\}\frac{r_s^{(0)}}{4k^{(0)}}. \end{gathered} \tag{34}$$

Согласно принятому методу решения, можем представить выражения компонент напряжений и уравнение радиуса упругопластической границы для поставленной задачи. Тогда, используя (11), (19), (33), (34) имеем

$$\sigma_r^p = -p + 2k^{(0)} ln\left(\frac{r}{a}\right) - 3\sqrt{2}\delta{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)\right] ln\left(\frac{r}{a}\right),$$

$$\sigma_\theta^p = -p + 2k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) -$$

$$-3\sqrt{2}\delta{\alpha_c}^{(1)}\left(-p + k^{(0)}\left(1 + 2ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \left[p - k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)\right] ln\left(\frac{r}{a}\right)\right),$$

$$\sigma_r^e = k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2 \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right] + \delta\left\{\alpha^{(1)} EQ\left[ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^2}\frac{r^2 - b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2} ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right)\right] -\right.$$

$$\left. -3\sqrt{2}{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right)\right]\frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^2}\frac{r^2 - b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2} ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right\},$$

$$\sigma_\theta^e = k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2 \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right] + \delta\left\{\alpha^{(1)} EQ\left[1 + ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^2}\frac{r^2 + b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2} ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right)\right] -\right. \tag{35}$$

$$\left. -3\sqrt{2}{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right)\right]\frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^2}\frac{r^2 + b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2} ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right\},$$

$$r_s = r_s^{(0)} + \delta\left\{\alpha^{(1)} EQ\left[1 + ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right) - \frac{{r_s^{(0)}}^2 + b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2} ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right)\right] -\right.$$

$$-6\sqrt{2}{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right)\right]\frac{b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2} ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right) +$$

$$\left. +3\sqrt{2}{\alpha_c}^{(1)}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + 2ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right)\right]\right\}\frac{r_s^{(0)}}{4k^{(0)}}.$$

где $r_s^{(0)}$ опрределяется из уравнения

$${r_s^{(0)}}^2 = \frac{b^2}{k^{(0)}}\left[-p + k^{(0)}\left(1 + 2ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right)\right]. \tag{36}$$

Заключение

Таким образом, согласно принятому методу малого параметра, было получено напряженное состояние и радиус упругопластической границы для поставленной задачи. Кроме того, если положить в приведенных выше соотношениях коэффициент температурного расширения и скорость дилатансии равным нулю, то получим выражения, представленные в работе [2]. Приравняв нулю только скорость дилатансии, можно прийти к результатам, полученным в работах [6, 7, 9, 10].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ковалев А. В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1(15). С. 65–69.

[2] Д. Д. Ивлев Е. В. Макаров Ю. М. Марушкей. Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации // Изв. РАН. МТТ. 1978. № 4. С. 80–87.

[3] Д. Д. Ивлев Л. В. Ершов. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.

[4] К. К. Горностаев А. В. Ковалев. О симметричной деформации упрочняющейся упруговякопластической трубы с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3(25). С. 176–184.

[5] А. В. Ковалев И. Г. Хвостов. Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 2(20). С. 29–35.

[6] Ю. В. Андреева А. В. Ковалев А.Н. Внуков. К определению напряженного состояния в упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д.Д. Ивлева. Чебоксары: Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2015.

[7] Ю. В. Андреева А. В. Ковалев А.Н. Внуков. К расчету сжимаемой упругопластической трубы // Механика деформируемого твердого тела : сборник трудов 9 Всероссийской конференции в рамках Международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". Воронеж: Воронежский государственный университет, 2016. С. 153–155.

[8] А.В. Ковалев Ю.В. Малыгина. К определению напряженно-деформированного состояния в упрочняющейся упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2021. С. 1306–1311.

[9] А.В. Ковалев Ю.В. Малыгина. Об определении напряженно-деформированного состояния в упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научно-технической конференции. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2017. С. 1079–1082.

[10] K.K. Gornostaev A.V. Kovalev Y.V. Malygina. Stress-strain state in an elastoplastic pipe taking into account the temperature and compressi-bility of the material // Journal of Physics: Conference Series. 2018. № 973. с. 012004.

[11] Д.Друкер В.Прагер. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Механика. Новое в зарубежной механике: в 2 т. Т.2 : Определяющие законы механики грунтов. 1975. № 6. С. 166–177.

[12] Даниловская В. И. Упругопластическая симметричная деформация толстостенной трубы с учётом неравномерности распределения температуры вдоль радиуса // Прикладная механика. 1965. № 6. С. 8–13.

[13] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Перевод с немецкого. Москва: Физматлит, 1963. 253 с.

[14] А. Н. Тихонов А. А. Самарский. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. 734 с.

[15] Э. Мелан Г. Паркус. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Москва: Физматгиз, 1958. 167 с.

A. V. Kovalev[1,2], *Y.V. Malygina*[1]

ON THE EFFECT OF ASSOCIATED COMPRESSIBILITY ON THE DETERMINATION OF THE STRESS STATE OF AN ELASTIC-PLASTIC PIPE TAKING INTO ACCOUNT THE TEMPERATURE OF THE MATERIALL

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*

[2] *Military educational scientific center air force "Air force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin, Voronezh, Russia*

Abstract. In the article the authors have considered the problem of determining the stress state of the elastoplastic pipe taking into account the temperature.The task was solved using the method of the small parameter. The case of associated and elastic compressibility is considered.

Keywords: stress, elasticity, plasticity, associated compressibility, temperature, plane strain.

REFERENCES

[1] Kovalev A.V. On the inclusion of the associated compression elastoplastic bodies in the case of plane strain // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 1(15). С. 65–69.

[2] D.D. Ivlev Ye.V. Makarov Yu.M. Marushkey. On the plasticity conditions of a compressible elastic-plastic material under flat deformation // A Journal of Russian Academy of Sciences: Mechanics of Solids. 1978. № 4. С. 80–87.

[3] Ivlev D.D. Yershov L.V. Perturbing approximation in theory of elastoplastic body. Moscow: Science, 1978. 208 с.

[4] K.K. Gornostaev A.V. Kovalev. About symmetric deformation hardening elastoviscoplastic pipe taking into account temperature // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 3(25). С. 176–184.

[5] A.V.Kovalev I.G.Khvostov. Stress and displacement analysis of an elastic space weakened by a spherical cavity in a thermal field // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. № 2(20). С. 29–35.

[6] Y. V. Andreeva A. N. Vnukov A. V. Kovalev. Determining the stress state of elastoplastic pipe considering temperature effects and compressibility // All-Russian Scientific School-Conference "Mechanics of Marginal State and Related Issues dedicated to the 85th anniversary of Professor D.D. Ivlev. Чебоксары: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, 2015.

[7] Y. V. Andreeva A. N. Vnukov A. V. Kovalev. To the calculation of a compressible elastic-plastic pipe // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh: Voronezh State University, 2016. С. 153–155.

[8] A.V. Kovalev Y.V. Malygina. Determination of the stress-strain state in an elastoplastic strengthening pipe, taking into account the temperature and compressibility of the material // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh: Voronezh State University, 2021. С. 1306–1311.

[9] A.V. Kovalev Y.V. Malygina. On the determination of the stress-strain state in an elastic plastic pipe, taking into account the temperature and compressibility of the material // International Conference

---

Kovalev Alexey Victorovich, Dr. Sci. Phys. and Math.,Professor,Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia, Military educational scientific center air force "Air force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. GagarinVoronezh, Russia.

Malygina Yuliya Vladimirovna, Lecturer of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

"Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh: Voronezh State University, 2017. С. 1079–1082.

[10] K.K. Gornostaev A.V. Kovalev Y.V. Malygina. Stress-strain state in an elastoplastic pipe taking into account the temperature and compressi-bility of the material // Journal of Physics: Conference Series. 2018. № 973. С. 1–10.

[11] D.C.Drucker W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Механика. Новое в зарубежной механике: в2 т. Т.2 : Определяющие законы механики грунтов. 1952. no. V.10, No.2). P. 157–165.

[12] Danilovskaya V. I. Elastoplastic symmetric deformation of a thick-walled tube with consideration of non-uniform temperature distribution along the radius // Applied Mechanics. 1965. № 6. С. 8–13.

[13] Parkus G. Nonsteady Temperature Stresses. Moscow: Fizmatlit, 1963. 253 с.

[14] A. N. Tikhonov A. A. Samarsky. The equations of mathematical physics. Moscow: Science, 1977. 734 с.

[15] E. Melan G. Parkus. Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields. Moscow: Fizmatgiz, 1958. 167 с.