Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2 (52). С. 99–105

А. Н. Спорыхин

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА С УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. На основе модели упрочняющегося упруговязкопластического тела и вязкоупругого тела исследовано напряженно-деформированное состояние кусочно-неоднородного сферического тела под действием нагрузок, постоянной внешней, и зависящей от времени внутренней. Получены решения для полей напряжений и перемещений.

Ключевые слова: сферическое кусочно-неоднородное тело, пластичность, вязкость, упругость, упрочнение, динамическая нагрузка.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.011

УДК: 539.3

Известно [1–3], что сферические оболочки с кусочно-неоднородными свойствами широко используется в хозяйственной деятельности, в частности для хранения различного сырья (газ, нефть и т.д.), что и определяет актуальность данного исследования.

В работе [3] исследовано динамическое деформирование кусочно-неоднородного сферического тела, заполнитель которого упругопластический модели Ивлева-Ишлинского [4], [5].

В настоящей работе рассматривается динамическое деформирование сферической вязкоупругой оболочки с упруговязкопластическим заполнителем толщины h, модели тела Sp [6]. По контуру полости радиуса a, равномерно распределена нагрузка P, а по внешнему контуру радиуса b, нагрузка p, выражения для которых имеют вид:

$$P = P_0 e^{\hat{a}t}, \quad p = p_0 \quad t_* \le t < t_0, \tag{1}$$

$\hat{a}$ – известная константа.

Напряженно-деформированное состояние такого тела будем определять соотношениями геометрически линейной теории. Приведем основные соотношения этой теории.

Уравнения равновесия имеют вид:

Спорыхин Анатолий Николаевич
`e-mail:` vasya@mathd.vsu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 17.09.2022

$$\nabla_i \sigma^i_j = 0, \tag{2}$$

где символ ∇_i обозначает квадратичную производную по $i-$ой компоненте.

Граничные условия таковы:

$$n_j \sigma^j_\beta = P_\beta, \tag{3}$$

где n_j – орты нормали к поверхности тела, P_β – составляющие вектора поверхностных сил.

Геометрические соотношения представлены формулами Коши:

$$2\varepsilon^i_j = \nabla_j w^i + \nabla^i w_j. \tag{4}$$

Если в теле наряду с упругой зоной (V^e) существует и пластическая зона (V^p), то на границе раздела этих областей γ должны выполняться условия непрерывности перемещений:

$$[w_j]\Big|_\gamma = 0, \tag{5}$$

и поверхностных сил

$$[n_j \sigma^j_\beta]\Big|_\gamma = 0. \tag{6}$$

Присоединяя к уравнениям линейной теории (1)-(6) уравнение состояния для зоны упругого, пластического и вязкоупругого деформирования среды, получим замкнутую математическую задачу.

Связь между напряжениями и деформациями в упругой зоне будем определять несжимаемым телом Гука

$$S^i_j = 2\mu\varepsilon^i_j, \;\; \varepsilon_{kk} = 0. \tag{7}$$

Пластическая область включения подчиняется соотношениям для упруговязкопластического тела [6] с функцией нагружения:

$$(S^j_i - c\overset{p}{\varepsilon}{}^j_i - \eta\overset{p}{\dot{\varepsilon}}{}^j_i)(S^i_j - c\overset{p}{\varepsilon}{}^i_j - \eta\overset{p}{\dot{\varepsilon}}{}^i_j) = k^2, \tag{8}$$

и ассоциированным законом течения:

$$\overset{p}{\dot{\varepsilon}}{}^j_i = \psi(S^j_i - c\overset{p}{\varepsilon}{}^j_i - \eta\overset{p}{\dot{\varepsilon}}{}^j_i), \quad S^j_i = \sigma^j_i - \bar{p}_0\delta^j_i. \tag{9}$$

Здесь η - коэффициент вязкости, c- коэффициент упрочнения, k- предел текучести материала, ψ- -положительный скалярный множитель.

Полная деформация в пластической зоне слагается из упругой $\overset{e}{\varepsilon}{}^i_j$ и пластической $\overset{p}{\varepsilon}{}^j_i$ составляющей:

$$\varepsilon_{ij} = \overset{e}{\varepsilon}_{ij} + \overset{p}{\varepsilon}_{ij}, \tag{10}$$

причем, упругие деформации $\overset{e}{\varepsilon}_{ij}$ связаны с напряжениями законом Гука. Объемная деформация удовлетворяет условию несжимаемости:

$$\varepsilon_{nn} = 0. \tag{11}$$

Вязкоупругая область представлена несжимаемой моделью тела Кельвина-Фоихта.

$$S_i^j = 2\mu_1 \varepsilon_j^i + 2\eta_1 \dot{\varepsilon}_j^i, \quad \varepsilon_{kk} = 0. \tag{12}$$

На границе контакта $b - h$ заполнитель-оболочка трением пренебрегаем, полагая, что на границе оболочка и заполнитель деформируются совместно, без проскальзывания и отставания, тогда выполняются условия сплошности (5), (6).

В предположении, что в момент начала пластического течения $t = t_*$ зарождение пластической области начинается от границ внутренней полости сферического тела (шара), начальные условия задаются в форме:

$$\gamma|_{t=t_*} = a, \quad \overset{p}{\varepsilon}_{ij}\Big|_{t=t_*} = 0, \quad \dot{\overset{e}{\varepsilon}}_{ij}\Big|_{t=t_*} = 0. \tag{13}$$

2. Напряженно-деформированное состояние заполнителя в упругой области в осесимметричном случае ($\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$) в сферической системе координат (r, θ, φ) определяется уравнением равновесия (2):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \tag{14}$$

законом Гука (7), условием несжимаемости и соотношениями Коши (4). Решая эту систему уравнений, находим:

$$w = \frac{A_1}{r^2}, \quad \sigma_r = -4\mu_1 \frac{A_1}{r^3} + A_2, \quad \sigma_\theta = 2\mu_1 \frac{A_1}{r^3} + A_2. \tag{15}$$

Из условия отсутствия объемного расширения в пластической области включения и соотношения Коши, получаем:

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{dw}{dr} + 2\frac{w}{r} = 0, \tag{16}$$

откуда:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_r}{2}, \quad w = \frac{B_1}{r^2} \tag{17}$$

Из ассоциированного закона пластического течения (9) имеем:

$$e_r^p = \psi(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta e_r^p), \; e_\theta^p = \psi(S_\theta - c\varepsilon_\theta^p - \eta e_\theta^p), \quad e_\varphi^p = \psi(S_\varphi - c\varepsilon_\varphi^p - \eta e_\varphi^p) \tag{18}$$

Так как $\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\varphi^p$, то из этих равенств следует, что:

$$S_\theta = S_\varphi = -\frac{S_r}{2}$$

Функция нагружения (8) принимает вид:

$$(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta e_r^p)^2 = \overset{*}{k}{}^2, \quad \overset{*}{k}{}^2 = \frac{2}{3}k^2. \tag{19}$$

Из соотношений (4), (7), (10) и (17):

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_r - \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_r = \frac{dw}{wr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{r}, \quad S_r = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p),$$

получаем:

$$S_r = -2\mu\left(\frac{2B_1}{r^3} + \varepsilon_r^p\right) \tag{20}$$

Подставляя (20) в уравнение (19) получаем дифференциальное уравнение относительно ε_r^p:

$$\frac{d\varepsilon_r^p}{dt} + \frac{2\mu + c}{\eta}\varepsilon_r^p = -\frac{\overset{*}{k}}{\eta} - \frac{4\mu}{\eta r^3}B_1. \tag{21}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varepsilon_r^p = -\frac{(\overset{*}{k}r^3 + 4\mu B_1)}{(2\mu + c)r^3} + B_3 e^{-\frac{(2\mu+c)}{\eta}t}. \tag{22}$$

Из условия (13) $\varepsilon_r^p = 0$ при $t = t_*$ определяем постоянную интегрирования B_3.

$$B_3 = \frac{\overset{*}{k}r^3 + 4\mu B_1}{(2\mu + c)r^3} e^{\frac{(2\mu+c)}{\eta}t_*}. \tag{23}$$

С учетом этого (22) примет вид:

$$\varepsilon_r^p = -(\overset{*}{k} + \frac{4\mu B_1}{r^3})E, \tag{24}$$

где

$$E = \left(1 - e^{\frac{(2\mu+c)}{\eta}t_*} e^{-\frac{(2\mu+c)}{\eta}t}\right)\left(\frac{1}{2\mu + c}\right).$$

Вычисляя

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = -3\mu(2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r^p) = -3\mu(\frac{2B_1}{r^3} + \varepsilon_r^p), \tag{25}$$

из уравнения (14) находим поле напряжения в пластической области включения

$$\sigma_r = -2\mu\left[3\overset{*}{k}E\ln r + 2B_1(1 - 2\mu E)\frac{1}{r^3}\right] + B_2, \tag{26}$$

$$\sigma_\theta = -3\mu\overset{*}{k}E(1 + 2\ln r) + 2\mu B_1(1 - 2\mu E)\frac{1}{r^3} + B_2.$$

Из системы уравнений (2), (4) и (12) для вязкоупругой оболочки напряженно-деформированное состояние находим в виде:

$$\sigma_r = -\frac{4\left(\mu_2 \mathrm{C}_1 + \eta_2\dot{\mathrm{C}}_1\right)}{r^3} + C_2, \ \sigma_\theta = \frac{2\left(\mu_2 \mathrm{C}_1 + \eta_2\dot{\mathrm{C}}_1\right)}{r^3} + C_2, \tag{27}$$

$$w = \frac{\mathrm{C}_1}{r^2}, \quad \varepsilon_r = -\frac{2\mathrm{C}_1}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{\mathrm{C}_1}{r^3}, \quad \dot{\mathrm{C}}_1 = \frac{d\mathrm{C}_1}{dt}$$

Для определения неизвестных интегрирования $A_1, A_2, B_1,\ B_2, C_1, C_2$ и радиуса γ поверхности раздела областей упругого и пластического деформирования заполнителя имеем, согласно (2), (4), (5), (13):

- граничные условия

$$\sigma_r^p = -P_0 e^{\hat{a}t} \quad \text{при} \quad r = a, \qquad (28)$$

$$\sigma_r^b = -p_0 \quad \text{при} \quad r = b$$

- условия сопряжения

$$w^e{=}w^p \quad \sigma_r^e{=}\sigma_r^p \quad \sigma_\theta^e{=}\sigma_\theta^p \quad \text{при} \quad r{=}\gamma \qquad (29)$$

- условия контакта (жесткое сцепление) оболочка – включение

$$w{=}w^e \quad \sigma_r^b{=}\sigma_r^e \quad \text{при} \quad r{=}a{+}h \qquad (30)$$

- начальные условия

$$\gamma = a \quad \varepsilon_r^b = 0 \quad \text{при} \quad t{=}t_* \qquad (31)$$

Откуда находим:

$$A_1 = B_1 = C_1 = e^{-\left(\alpha_{11}t - \frac{\alpha_{12}}{\mu_0}e^{-\mu_0 t}\right)}. \qquad (32)$$

$$\cdot\left[\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}e^{\alpha_{11}t} - \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}-\mu_0}e^{(\alpha_{11}-\mu_0)t} - \frac{P_0}{4\eta_0(\alpha_{11}+\hat{a})}e^{(\alpha_{11}+\hat{a})t} + E_*(t) + C_1^*\right],$$

$$C_1^* = -\left.C_1\right|_{t=t_*}, \quad E_*(t) = \int e^{-\frac{\alpha_{12}}{\mu_0}e^{-\mu_0 t}}\left(\alpha_{21} - \alpha_{22}e^{-\mu_0 t} - \frac{P_0 e^{\hat{a}t}}{4\eta_2}\right)$$

$$C_2 = -p_0 + \frac{C_0}{b^3}A_2 = -\frac{C_0}{(a+h)^3} - \frac{4\mu_1}{(a+h)^3}A_1 + C_2 \qquad (33)$$

$$B_2 = 2\mu\left[3\overset{*}{k}Eln\,(a) + 2C_1\,(1-2\mu E)\,\frac{1}{a^3}\right] - P_0 e^{\hat{a}t}$$

$$C_0 = 4\left(\mu_2 C_1 + \eta_2\dot{C}_1\right)\dot{\mathrm{C}}_1 = \frac{d\mathrm{C}_1}{dt}$$

$$E = E_1 - E_2 e^{-\mu_0 t} = \frac{1}{2\mu+c} - \frac{1}{2\mu+c}e^{\mu_0 t_*}e^{-\mu_0 t},\ \mu_0 = \frac{2\mu+c}{\eta}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\eta_2}\left\{\mu_2 + \left[\mu_1\left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{(a+h)^3}\right) + \mu\left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{a^3}\right)\right]\right\} - \frac{1}{\eta_2}2\mu^2\left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{a^3}\right)E_1$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{\eta_2}2\mu^2\left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{a^3}\right)E_2 e^{-\mu_0 t}$$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{2\eta_2}\left\{\frac{p_0}{2} + 3\mu\overset{*}{k}E_1\left(\ln(a) - \ln(\gamma)\right)\right\}\alpha_{22} = \frac{3\mu\overset{*}{k}}{2\eta_2}\left\{E_2 e^{-\mu_0 t}\left(\ln(a) - \ln(\gamma)\right)\right\} \qquad (34)$$

При этом уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ имеет вид:

$$4\eta_2\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3}\right)\dot{C}_1 + \{4\mu_2\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3}\right) - \frac{4\mu_1}{(a+h)^3} - 4\mu\,(1-2\mu E)\,\frac{1}{a^3} - \qquad (35)$$

$$-\frac{2}{\gamma^3}\left[\mu_1 - \mu\,(1-2\mu E)\right]C_1 + 3\mu\overset{*}{k}E\,(1+2\ln(\gamma)) - 6\mu\overset{*}{k}Eln\,(a) - p_0 + P_0 e^{\hat{a}t} = 0.$$

Удовлетворяя начальному условию ($\gamma = a$ при $t = t_*$) получаем уравнение для определения начала зарождения пластической области на внутреннем контуре сферического тела:

$$p_0 + P_0 e^{\hat{a}t} = 4\eta_2 \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) \frac{d\overset{*}{C}_1}{dt}, \tag{36}$$

при этом в $\overset{*}{C}_1$ согласно (34):

$$\overset{*}{\alpha}_{11} = \frac{1}{\eta_2} \left[\mu_2 + \mu \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) \right], \quad \overset{*}{\alpha}_{12} = 0, \tag{37}$$

$$\overset{*}{\alpha}_{21} = \frac{p_0}{4\eta_2}, \quad \overset{*}{\alpha}_{22} = 0.$$

.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики и горных пород. М: Физматлит, 2004. 232 с.

[2] Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование полупространства со сферической полостью // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. №4 (42). С. 21-24

[3] Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование кусочно-неоднородного сферического тела // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. №1 (51). С. 110-114

[4] Ивлев Д. Д. , Быковцев Т.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.

[5] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 701 с.

[6] Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруго-вязкопластических тел // ПМТФ СО АН СССР. 1967. № 4. С. 52-58.

A. N. Sporihin

DYNAMIC DEFORMATION OF A SPHERICAL VISCOELASTIC BODY WITH AN ELASTIC-VISCOPLASTIC FILLER

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. Based on the model of a hardening elastic-plastic body and a viscoelastic body, the stress-strain state of a piecewise inhomogeneous spherical body under the action of loads, constant external and time-dependent internal, is investigated. Solutions for stress and displacement fields are obtained.

Keywords: spherical piecewise inhomogeneous body, plasticity, viscosity, elasticity, hardening, dynamic load.

Anatoly N. Sporykhin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia

REFERENCES

[1] Sporykhin A. N. , Shashkin A. I. Stability of equilibrium of spatial bodies and problems of mechanics and rocks. M: Fizmatlit, 2004, 232 p.

[2] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a half-space with a spherical cavity // Bulletin of the I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. 2019. No.4 (42). pp. 21-24

[3] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a piecewise inhomogeneous spherical body // Bulletin of the I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. 2022. No.1 (51). pp. 110-114 bibitemit4 Ivlev D. D., Bykovtsev T. I. Theory of hardening plastic body. M.: Nauka, 1971. 231 p. bibitemit5 Ishlinskiy A. Y., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmalit, 2001. 701 p.

[4] Sporykhin A. N. Nonconservative problems of the three-dimensional theory of inelastic stability in geomechanics. Voronezh: VSU Publishing House, 2015. 372 p.

[5] Sporykhin A. N. On the stability of deformation of elastic-viscoplastic bodies // PMTF SB of the USSR Academy of Sciences. 1967. No. 4. pp. 52-58.