Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

КОВАРИАНТНО ПОСТОЯННЫЕ ТЕНЗОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ЕВКЛИДА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе обсуждаются вопросы ковариантного постоянства тензоров и псевдотензоров (в том числе, двухточечных) произвольной валентности и веса в Евклидовом пространстве. Приводятся минимально необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров в пространствах Евклида. Выясняются общие условия ковариантного постоянства псевдотензоров. Рассматриваются примеры ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров из многомерной геометрии. Речь, в частности, идет о фундаментальном ориентирующем псевдоскаляре, целые степени которого удовлетворяют условию ковариантного постоянства. Обсуждаются свойства и способы координатного представления тензоров ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров четвертого ранга. На основе неконвенционального определения полуизотропного тензора четвертого ранга приводится координатное представление в терминах дельт Кронекера и метрических тензоров. Устанавливаются условия ковариантного постоянства полуизотропных тензоров четвертого ранга.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, символ перестановки, ковариантная производная, градиент, неконвенционально изотропный тензор, полностью изотропный тензор, демитропный тензор, гемитропный тензор, полуизотропный тензор, конвенционально изотропный тензор, тензор с постоянными компонентами, определяющий псевдотензор, хиральная среда, микрополярный гемитропный континуум

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012

УДК: 539.374

Вводные замечания. Вариационные и дифференциальные уравнения, описывающие деформирование твердых тел, сопровождающееся микроповоротами, в общем

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2022

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 20-01-00666.

Поступила 20.06.2022

случае требуют привлечения методов современной геометрии и формализма псевдотензорной алгебры [1–6]. Ковариантно постоянные тензорные и псевдотензорные поля играют важную роль, как при выводе определяющих уравнений, так и при преобразовании дифференциальных уравнений механики сплошных сред. В настоящей статье обсуждаются понятия и минимально необходимые сведения из алгебры псевдотензоров. Подробное и полное изложение псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [2–4, 7–10]. Псевдотензорный формализм неизбежен при разработке моделей линейных гемитропных микрополярных упругих сред (см. [11–14]).

В данной работе вводится и обсуждается понятие ковариантного постоянства абсолютных тензорных и псевдотензорных полей. Приведены примеры фундаментальных объектов псевдотензорного анализа, обладающих свойствами ковариантного постоянства. Рассмотрен алгоритм получения ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров, предложенный в монографии [2].

При ковариантном дифференцировании тензорного произведения или свертки тензора с ковариантно постоянным тензором последний может быть вынесен из под знака ковариантного дифференцирования. В работе приводятся и обсуждаются различные реализации ковариантной производной псевдотензоров, широко используемых в механике микрополярных упругих тел [11–13].

В настоящей работе показано, что относительные и абсолютные тензоры с постоянными компонентами являются ковариантно постоянными. Ряд ковариантно постоянных тензоров (например, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр и его целые степени, обобщенные дельты Кронекера, символы перестановок (альтернирующие символы, символы Леви-Чивита, дискриминантные не символы), сведены в таблицу. Обсуждается общий алгоритм получения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами, которые одновременно являются ковариантно постоянными, следуя монографии Б. Г. Гуревича [2].

После вводных замечаний, в разделе 2, приводятся и обсуждаются определения фундаментального ориентирующего псевдоскаляра, обобщенных дельт Кронекера, символов перестановок для N -мерного евклидова пространства. Рассмотрены три различные эквивалентные реализации ковариантного дифференцирования псевдотензорного поля произвольного ранга и целого веса. Приведен ряд частных случаев, широко используемых в современной механике сплошных сред.

Затем, в разделе 3, следуя рассуждениям монографии проф. Б. Г. Гуревича [2] обсуждается общий алгоритм получения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами. Предложены определения и примеры тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами. Показано, что относительные и абсолютные тензоры с постоянными компонентами являются ковариантно постоянными.

В разделе 4 устанавливается взаимосвязь произвольного полуизотропного тензора четвертого ранга и тензора с постоянными компонентами. Координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров, использующихся при математическом моделировании линейных гемитропных микрополярных континуумов, даны в терминах метрического тензора. Обсуждается оптимальная неконвенциональная терминология, связанная с понятиями полностью изотропных, конвенционально изотропных, неконвенционально изотропных, полуизотропных (демитропных, гемитропных) тензоров и псевдотензоров четвертого ранга. На основе неконвенционального

определения для полуизотропного тензора четвертого ранга приводится координатное представление в терминах дельт Кронекера и метрических тензоров.

В целом настоящую работу следует рассматривать как современную основу для важных в нелинейной механике сплошных сред задач ковариантного дифференцирования тензорных и псевдотензорных полей, а также построения координатных представлений ковариантно постоянных тензорных и псевдотензорных полей. В следующей статье будут детально рассмотрены проблемы применения развиваемой теории при построении математических моделей линейных гемитропных микрополярных упругих сред.

Необходимые понятия и уравнения из алгебры и анализа псевдотензоров в евклидовых пространствах заданной размерности. Рассмотрим N -мерное евклидово пространство, параметризованное координатами x^k . Фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e [11–14] и его целые степени играют важную роль в геометрии многомерных пространств. В N -мерном пространстве он определяется как косое произведение [1, р. 63–65] ковариантных базисных абсолютных векторов

$$e = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N]. \quad (1)$$

Псевдотензоры произвольного ранга и целого веса g могут быть преобразованы в абсолютные тензоры с помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра (1) (см. [11–14]), т.е.

$$T_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} = e^{-g} T_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots}. \quad (2)$$

Легко показать, что в евклидовом пространстве справедливо следующее соотношение

$$e^2 = g > 0, \quad (3)$$

где g — детерминант метрического тензора g_{ij} : $g = \det(g_{ij})$. Условие $g = 1$ ($|e| = 1$) является фундаментальным для развития общей теории относительности [15] и, например, математической теории пластичности [16]. Важно отметить, что в этом случае абсолютные тензоры совпадают с псевдотензорами с точностью до знака, учитывая уравнение (2) получим

$$T_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} = (\operatorname{sgn} e) e^{-g} T_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots}. \quad (4)$$

Откуда следует, что псевдотензоры меняют свой знак на противоположный при изменении ориентации координатного репера если их вес нечетный.

В трехмерном пространстве ($N = 3$) уравнение (1) приобретает вид

$$e = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3] = \mathbf{z}_1 \cdot (\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}_3). \quad (5)$$

Перейдем к обсуждению других фундаментальных объектов N -мерной геометрии, которыми являются абсолютные тензоры $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$, обычно называемые обобщенными кронекеровскими дельтами. Объекты $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$ определяются для каждого целого $M \leq N$ согласно [3, С. 242, § 7.105].

С помощью обобщенных дельт Кронекера $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$ символы перестановки, являющиеся псевдотензорами, могут быть немедленно определены как:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[-1]} = \delta_{i_1 i_2 \dots i_N}^{12 \dots N}, \quad (6)$$

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[+1]} = \delta_{12 \dots N}^{i_1 i_2 \dots i_N}. \quad (7)$$

Например, абсолютные знакопеременные тензоры могут быть получены из символов перестановки, умноженных на соответствующую степень (+1 или -1) фундаментального ориентирующего псевдоскаляра

$$\begin{aligned} e_{i_1 i_2 \dots i_N} &= e \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[-1]}, \\ e_{i_1 i_2 \dots i_N} &= e^{-1} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[+1]}. \end{aligned} \quad (8)$$

Индекс веса g в верхней позиции будет опущен для фундаментальных символов, таких как фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, символы перестановки, и он также применим к абсолютным тензорам с нулевым весом.

Ковариантная производная псевдотензора $T_{\dots i_j \dots l}^{[g] p q r \dots s}$ заданной валентности и веса определяется согласно работам О. Веблена [17, 18], в соответствии с аналогичной операцией для абсолютных тензоров, в виде:

$$\begin{aligned} \nabla_p T_{\dots i_j \dots k}^{[g] l m \dots n} &= \partial_p T_{\dots i_j \dots k}^{[g] l m \dots n} + T_{\dots i_j \dots k}^{[g] s m \dots n} \Gamma_{sp}^l + T_{\dots i_j \dots k}^{[g] l s \dots n} \Gamma_{sp}^m + \\ &+ \dots + T_{\dots i_j \dots k}^{[g] l m \dots s} \Gamma_{sp}^n - \Gamma_{ip}^s T_{\dots s j \dots k}^{[g] l m \dots n} - \Gamma_{jp}^s T_{\dots i s \dots k}^{[g] l m \dots n} - \\ &- \dots - \Gamma_{kp}^s T_{\dots i j \dots s}^{[g] l m \dots n} - g T_{\dots i j \dots k}^{[g] l m \dots n} \Gamma_{sp}^s, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}.$$

Градиент псевдотензора произвольной валентности и веса g можно вычислить согласно¹

$$\nabla \otimes \mathbf{T} = e^g \mathbf{i} \otimes \partial_k (e^g \mathbf{T}). \quad (10)$$

Однако, существуют альтернативные подходы реализации ковариантного дифференцирования псевдотензора. Определим ковариантную производную псевдотензора произвольной валентности и целого веса g с помощью соотношения:

$$\nabla_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots} = e^g \nabla_p \left(e^{-g} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots} \right). \quad (11)$$

В сокращенной записи имеем:

$$\nabla \otimes T_{(n)}^{[g]} = e^g \mathbf{i} \otimes \partial_p (e^{-g} T_{(n)}^{[g]}). \quad (12)$$

¹Набла Гамильтона обычно определяется, как обычно, согласно: $\nabla = \mathbf{i} \partial_s$.

Легко проверить, что

$$\nabla \otimes \mathbf{T} \binom{[g]}{(n)} = \mathbf{i} \otimes (\partial_p - \lambda_p) \mathbf{T} \binom{[g]}{(n)}, \quad (13)$$

где

$$\lambda_p = g \frac{\partial_p e}{e}.$$

Кроме того, существует третий способ реализовать ковариантное дифференцирование псевдотензора с целым положительным весом можно с помощью символов перестановок согласно правилу

$$\begin{aligned} \nabla_p \mathbf{T} \binom{[g]}{(n)} h_1 h_2 \dots h_s \dots \dots &= (N!)^{-g} \underbrace{\epsilon^{[+1]k_{r+1} \dots k_{r+N} \dots} \epsilon^{[+1]k_{r+(g-1)N+1} \dots k_{r+Ng}}}_g \times \\ &\times \nabla_p \left(\mathbf{T} \binom{[g]}{(n)} h_1 h_2 \dots h_s \dots \dots \underbrace{\epsilon^{[-1]k_{r+1} \dots k_{r+N} \dots} \epsilon^{[-1]k_{r+(g-1)N+1} \dots k_{r+Ng}}}_g \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Все три вида реализации ковариантной производной (9), (11) и (14) являются эквивалентными, что было продемонстрировано в работе [19].

Рассмотрим случаи ковариантного дифференцирования (9) псевдотензоров, широко используемых в механике сплошных сред:

- (1) ковариантная производная псевдоскаляра веса g :

$$\nabla_p \mathbf{T} \binom{[g]}{s} = \partial_p \mathbf{T} \binom{[g]}{s} - g \mathbf{T} \Gamma_{sp}^s; \quad (15)$$

- (2) ковариантная производная контравариантного псевдовектора веса g :

$$\nabla_p \mathbf{T}^k \binom{[g]}{s} = \partial_p \mathbf{T}^k \binom{[g]}{s} + \mathbf{T}^s \Gamma_{sp}^k - g \mathbf{T}^k \Gamma_{sp}^s; \quad (16)$$

- (3) ковариантная производная дважды контравариантного псевдотензора веса g :

$$\nabla_p \mathbf{T}^{ji} \binom{[g]}{s} = \partial_p \mathbf{T}^{ji} \binom{[g]}{s} + \mathbf{T}^{si} \Gamma_{sp}^j + \mathbf{T}^{js} \Gamma_{sp}^i - g \mathbf{T}^{ji} \Gamma_{sp}^s; \quad (17)$$

- (4) ковариантная производная от псевдоаффинора веса g :

$$\nabla_p \mathbf{T}_{i \cdot}^j \binom{[g]}{s} = \partial_p \mathbf{T}_{i \cdot}^j \binom{[g]}{s} - \mathbf{T}_{s \cdot}^j \Gamma_{ip}^s + \mathbf{T}_{i \cdot}^s \Gamma_{sp}^j - g \mathbf{T}_{i \cdot}^j \Gamma_{sp}^s. \quad (18)$$

Заданное псевдотензорное поле $\mathbf{T} \binom{[g]}{\dots ij \dots k}$ валентности N и веса g является ковариантно постоянным, если оно удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$\nabla_p \mathbf{T} \binom{[g]}{\dots ij \dots k} = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Уравнению (19) заведомо удовлетворяют абсолютные тензоры и псевдотензоры с постоянными компонентами, которые обсуждаются в следующем разделе настоящей статьи.

Заметим, что псевдотензорное уравнение (19), включающее псевдотензор, будучи верным в данной координатной системе, остается верным в любой другой координатной системе [7, 8]. В правосторонних декартовых координатах все тензоры из таблицы имеют постоянные компоненты, равные 0 или 1. В этом случае их ковариантные производные являются обычными частными производными. Таким образом, каждая

Таблица 1. Ковариантно постоянные тензоры и псевдотензоры в N -мерном Евклидовом пространстве.

Стандартная терминология	Корневое обозначение	Вес	Преобразование в абсолютный тензор
целая степень фундаментального ориентирующего псевдоскаляра	$e^m (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$	m	$e^{[m]} = e^m$
знак фундаментального ориентирующего псевдоскаляра	$\text{sgn } e$	–	
метрический тензор	g_{ij}	0	
фундаментальный тензор	g^{ij}	0	
определитель метрического тензора	g	+2	$g^{[+2]} = e^2$
знак определителя метрического тензора	$\text{sgn } g$	0	
обобщенные дельты Кронекера ($M \leq N$)	$\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$	0	
альтернирующие псевдотензоры	$\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_M}$	+1	$e^{i_1 i_2 \dots i_N} = \frac{1}{e} \epsilon^{[+1] i_1 i_2 \dots i_N}$
альтернирующие псевдотензоры	$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_M}$	–1	$e_{i_1 i_2 \dots i_N} = e \epsilon^{[-1] i_1 i_2 \dots i_N}$
альтернирующий тензор	$e^{i_1 i_2 \dots i_N}$	0	
альтернирующий тензор	$e_{i_1 i_2 \dots i_N}$	0	

ковариантная производная будет равна нулю, что доказывает ковариантное постоянство абсолютных тензоров и псевдотензоров из таблицы 1 в любой криволинейной координатной системе.

Тензоры и псевдотензоры с постоянными компонентами. Тензором (псевдотензором) с постоянными компонентами [2, стр. 164] называется тензор (псевдотензор), сохраняющий (retain) неизменными (unaltered) все свои компоненты при любых линейных преобразованиях координатного репера: самые важные из них — повороты, преобразования масштабирования (scaling), центральная инверсия, зеркальные отражения.

Абсолютный тензор второго ранга, с точностью до постоянного множителя a (абсолютного инварианта) совпадающий с единичным аффинором, будет тензором с постоянными коэффициентами:

$$C_k^h = a\delta_k^h. \quad (20)$$

Псевдотензор третьего ранга с постоянными коэффициентами пропорционален символам перестановок. Дельты Кронекера и символы перестановок простейшие и самые важные примеры тензоров с постоянными коэффициентами.

Несложно показать, что наиболее общий абсолютный тензор четвертого ранга C_{sm}^{il} с постоянными компонентами можно представить в виде

$$C_{sm}^{il} = a\delta_s^i\delta_m^l + c\delta_s^l\delta_m^i, \quad (21)$$

где a и c — абсолютные инварианты (абсолютные скаляры).

Уравнение (21), справедливое в любой системе координат в декартовых координатах можно представить следующим образом

$$C_{ilsm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + c\delta_{ls}\delta_{im}. \quad (22)$$

В монографии [2, стр. 164–176] предлагается общий алгоритм построения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами для целых положительных (отрицательных) весов. Например, общий вид псевдотензора $C_{k_1k_2\dots k_r}^{[g]h_1h_2\dots h_s}$ с постоянными компонентами целого отрицательного веса представляется формулой

$$C_{k_1k_2\dots k_r}^{[g]h_1h_2\dots h_s} = \sum_{P=1}^{r!} \lambda_P \delta_{\{k_1}^{h_1} \delta_{k_2}^{h_2} \dots \delta_{k_s}^{h_s} \underbrace{\epsilon_{k_{s+1}\dots k_{s+N}} \dots \epsilon_{k_{r-N+1}\dots k_r}}_{|g|} \}, \quad (23)$$

где r — число ковариантных индексов, s — число контравариантных индексов, N — размерность пространства, g — вес, целое отрицательное число, λ_P ($P = 1, 2, \dots, r!$) — произвольные постоянные (абсолютные инварианты), P — перестановка ряда индексов

$$k_1, \dots, k_s, \dots, k_{s+N}, \dots, k_{r-N+1}, \dots, k_r.$$

В формуле (23) по ковариантным индексам, заключенным в фигурные скобки производятся всевозможные перестановки. Число ковариантных, контравариантных индексов и вес псевдотензора должны удовлетворять ограничению

$$r = s + N|g|, \quad (24)$$

откуда

$$r \geq s. \quad (25)$$

Если условие (24) не выполняется, то псевдотензор $C_{k_1k_2\dots k_r}^{[g]h_1h_2\dots h_s}$ с постоянными компонентами будет равен нулю.

Отметим, что псевдотензорное поле $C_{k_1k_2\dots k_r}^{[g]h_1h_2\dots h_s}$ с постоянными компонентами является ковариантно постоянным и удовлетворяет псевдотензорному уравнению (19) при условии

$$\nabla_s \lambda_P = 0. \quad (26)$$

Обратим внимание, что псевдотензоры вида (23) не составляют полного набора ковариантно постоянных абсолютных тензоров. Наглядным примером является параллельное векторное поле, которое является ковариантно постоянным вектором, но

не может быть представлено в виде вектора с постоянными компонентами. Примеры ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров подробно обсуждались в работах (см. [2, 7, 8, 20, 21]). Среди них фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e и его алгебраические степени, обобщенные δ -символы, ϵ -символы, e -тензоры, метрические тензоры g^{kh} , g_{hk} которые часто используются в микрополярных теориях механики сплошных сред [12–14, 22].

Рассмотрим важный для приложений пример. Пусть $N = 3$, $g = \pm 2$, тогда, воспользовавшись соотношением (24), для тензора четвертого ранга получим

$$\begin{cases} r - s = 6, \\ r + s = 4. \end{cases} \quad (27)$$

Очевидно, что система (27) несовместна, и, следовательно, невозможно построить в трехмерном пространстве псевдотензор с постоянными компонентами с весами $g = \pm 2$.

Абсолютные полуизотропные тензоры четвертого ранга. В дальнейшем будем придерживаться неконвенциональной терминологии. Неконвенционально изотропным (полностью изотропным) будем называть тензор (псевдотензор) не меняющий свои компоненты при любых поворотах координатного репера, зеркальных отражениях и центральных инверсиях трехмерного пространства [23–26].

Конвенционально изотропным тензором (псевдотензором) называется тензор (псевдотензор), сохраняющий неизменными все свои компоненты при поворотах координатного репера. Конвенционально изотропные тензоры (псевдотензоры) терминологически лучше неконвенционально называть полуизотропными, демитропными или гемитропными.

Для абсолютного полуизотропного тензора четвертого ранга в декартовой системе координат будет справедливо представление [23, p. 77]

$$H_{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{b-c}{2}(\delta_{il}\delta_{sm} - \delta_{im}\delta_{sl}) + \frac{b-c}{2}(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}), \quad (28)$$

т.е.

$$H_{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + b\delta_{il}\delta_{sm} + c\delta_{im}\delta_{sl}. \quad (29)$$

Здесь a , b , c — ротационные инварианты, сохраняющие свои значения при поворотах декартова репера. В отличие от представления (21) для тензора с постоянными компонентами в представлении (29) для полуизотропных тензоров четвертого ранга участвует слагаемое $\delta_{il}\delta_{sm}$ с множителем b .

Принимая во внимание представление для тензора четвертого ранга с постоянными компонентами (22), в абсолютном гемитропном тензоре четвертого ранга можно выделить часть с постоянными компонентами

$$H_{islm} = C_{islm} + b\delta_{il}\delta_{sm}. \quad (30)$$

Представление (29) легко записывается в произвольной системе координат после замены δ -символов на метрические тензоры:

$$H^{islm} = ag^{is}g^{lm} + bg^{il}g^{sm} + cg^{im}g^{sl}. \quad (31)$$

Так как компоненты метрического тензора g^{is} не меняются при поворотах координатного репера, то правая часть в (31), очевидно, также остается неизменной. Если считать a , b , c абсолютными инвариантами, то правая часть в (31) не будет также меняться при зеркальных отражениях и центральных инверсиях.

Полуизотропное тензорное поле H^{ism} оказывается ковариантно постоянным и, следовательно, удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$\nabla_k H^{ism} = 0, \quad (32)$$

при условии ковариантного постоянства инвариантов a, b, c , т.е.

$$\nabla_k a = 0, \quad \nabla_k b = 0, \quad \nabla_k c = 0, \quad (33)$$

или

$$\partial_k a = 0, \quad \partial_k b = 0, \quad \partial_k c = 0. \quad (34)$$

Очевидно, что полностью изотропный тензор четвертого ранга не отличается от полуизотропного тензора.

В приложениях инварианты a, b, c приходится считать псевдоскалярами. В частности, в микрополярных теориях упругих сред из псевдоскаляров a, b, c формируется характеристическая микродлина $L = L^{[-1]}$, являющаяся псевдоскаляром отрицательного целого веса.

Результаты и выводы Ковариантное постоянство абсолютных тензорных и псевдотензорных полей произвольной валентности и веса обсуждалось для исправления ошибочных утверждений, имеющих в литературе по нелинейной механике сплошных сред.

- (1) Понятия и необходимые уравнения из алгебры и анализа псевдотензоров были представлены для ясного понимания и справочной основы.
- (2) Предложено и обсуждено понятие ковариантного постоянства тензоров и псевдотензоров.
- (3) Примеры ковариантных постоянных тензоров и псевдотензоров, интересных для микрополярной упругости, для удобства приведены в таблице. В частности, введено и применено к рассматриваемым задачам понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра, удовлетворяющего условию ковариантного постоянства.
- (4) Напоминается и обсуждается общий алгоритм построения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами, которые одновременно являются ковариантными константами.
- (5) Указаны условия приведения произвольного полуизотропного тензора четвертого ранга к тензору с постоянными компонентами. Координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров, использующихся при математическом моделировании линейных гемитропных микрополярных континуумов, даны в терминах метрического тензора.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
- [2] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
- [3] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [4] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.]
- [5] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130–138.

- [6] Radayev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [7] Sokolnikoff I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [8] McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.
- [9] Truesdell C., Toupin R. *The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [10] Maugin G. A. *Material inhomogeneities in elasticity*. New York: CRC Press, 1993. 292 p.
- [11] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.
- [12] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.
- [13] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [14] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [15] Koppf A. *Mathematical Theory of Relativity*. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.
- [16] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.
- [17] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Trans. Am. Math. Society*. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [18] Veblen O. *Invariants of quadratic differential forms*. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p. [Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 139 с.].
- [19] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 1(51). с. 17–26.
- [20] Radaev Y. N., Murashkin E. GENERALIZED PSEUDOTENSOR FORMULATIONS OF THE STOKES' INTEGRAL THEOREM // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.
- [21] Radaev Y. N., Murashkin E., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [22] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474.
- [23] Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [24] Jeffreys H., Swirles B. *Methods of mathematical physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. 712 p.
- [25] Лурье А. И. *Нелинейная теория упругости*. Москва: Наука, 1980. 512 с.
- [26] Spencer A. J. M. *Continuum mechanics and theory of materials*. New York: Courier Corporation, 2004. 192 p.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radaev

COVARIANTLY CONSTANT TENSORS IN EUCLID SPACES. ELEMENTS OF THE THEORY

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we discuss the covariant constancy of tensors and pseudotensors (including two-point ones) of arbitrary valency and weight in Euclidean space. The requisite notions and equations from algebra and analysis of pseudotensors in Euclidean spaces are given. The general conditions for the covariant constancy of pseudotensors are highlighted. Examples of covariantly constant tensors and pseudotensors from multidimensional geometry are considered. In particular, a fundamental orienting pseudoscalar whose integer powers satisfy the condition of covariant constancy is introduced. The properties and methods of coordinate representation of covariantly constant tensors and pseudotensors of the fourth rank are discussed. Based on an unconventional definition of a semi-isotropic tensor of the fourth rank, a coordinate representation in terms of Kronecker deltas and metric tensors is given. Conditions for the covariant constancy of semi-isotropic tensors of the fourth rank are derived.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, permutation symbol, covariant derivative, gradient, unconventionally isotropic tensor, fully isotropic tensor, demitropic tensor, hemitropic tensor, semi-isotropic tensor, conventionally isotropic tensor, tensor with constant components, constitutive pseudotensor, chiral media, micropolar hemitropic continuum

REFERENCES

- [1] Rozenfeld B. A. *Mnogomernye prostranstva*. M.: Nauka, 1966.
- [2] Gurevich G. B. *Osnovy teorii algebraicheskikh invariantov*. M., L.: GITTL, 1948. 408 c. [Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
- [3] Synge J. L., Schild A. *Tensor calculus*. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [4] Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. *Тензорный анализ для физиков*. М.: Наука. 1965. 456 с.]
- [5] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a Generalization of the Hamilton-Cayley Algebraic Theory // *Izv. RAN. MTT*. 2021. № 6. С. 130–138.
- [6] Radaev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [7] Sokolnikoff I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. *Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред*. М.: Наука, 1971. 376 с.]
- [8] McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.
- [9] Truesdell C., Toupin R. *The Classical Field Theories* // *Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie* / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [10] Maugin G. A. *Material inhomogeneities in elasticity*. New York: CRC Press, 1993. 292 p.

Murashkin Evgenii Valeryevich, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

Radaev Yuri Nikolaevich, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

- [11] Радаев Ю. Н. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2018. T. 22, № 3. С. 504–517.
- [12] Radaev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2020. T. 82, № 4. С. 399–412.
- [13] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [14] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [15] Koppf A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.
- [16] Radaev Y. N. Spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Samarskiy universitet, 2006. 340 p.
- [17] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
- [18] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [19] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. № 1(51). с. 17–26.
- [20] Radaev Y. N., Murashkin E. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform. 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.
- [21] Radaev Y. N., Murashkin E., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [22] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2021. T. 25, № 3. С. 457–474.
- [23] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [24] Jeffreys H., Swirls B. Methods of mathematical physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. 712 p.
- [25] Lurye A. I. Nelineynaya teoriya uprugosti. Moskva: Nauka, 1980. 512 c.
- [26] Spencer A. J. M. Continuum mechanics and theory of materials. New York: Courier Corporation, 2004. 192 p.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 20-01-00666.