Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2 (52). С. 118–127

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

КОВАРИАНТНО ПОСТОЯННЫЕ ТЕНЗОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ЕВКЛИДА. ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ КОНТИНУУМА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе обсуждаются вопросы использования в механике сплошных сред ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров (в том числе, двухточечных) произвольной валентности и целого веса в Евклидовых пространствах. В работе продемонстрировано, что тензоры дистории и обратной дисторсии не являются ковариантно постоянными двухточечными тензорами, в противовес указаниям на их ковариантное постоянство, встречающееся в литературных источниках по нелинейной механике континуума. Приводится общая форма упругого потенциала для линейного анизотропного микрополярного континуума. На основе неконвенционального определения полуизотропного тензора приводятся координатные представления определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга в терминах дельт Кронекера и метрических тензоров. Показывается ковариантное постоянство определяющих линейный анизотропный микрополярный континуум тензоров и псевдотензоров четвертого ранга.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, символ перестановки, ковариантная производная, градиент, неконвенционально изотропный тензор, полностью изотропный тензор, демитропный тензор, гемитропный тензор, полуизотропный тензор, конвенционально изотропный тензор, тензор с постоянными компонентами, определяющий псевдотензор, хиральная среда, микрополярный гемитропный континуум

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013

УДК: 539.374

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 20-01-00666.

Поступила 20.06.2022

Вводные замечания. В предшествующей публикации [1] обсуждались элементы теории тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами произвольной валентности и целого веса в Евклидовых пространствах. Настоящее исследование посвящено вопросам применения развиваемой теории в механике сплошных сред. И в этом смысле настоящую работу следует рассматривать как продолжение публикации [1].

Статья представляется нам важной, поскольку встречаются утверждения (см., например, [2, с. 65]), что двухточечные тензоры дисторсии и обратной дисторсии, имеющие фундаментальное значение при построении моделей геометрически нелинейной механики сплошных сред, являются ковариантно постоянными. Это утверждение, в общем случае, неверно и должно считаться ошибочным, что можно выяснить с помощью формализма рациональной механики [3, 4]. Кроме того, требует уточнения понятие ковариантной производной двухточечных тензоров и псевдотензоров [5].

После вводных замечаний, в разделе 2, настоящей статьи рассматриваются определения, следуя формализму рациональной механики [3,4], двухточечных тензоров дисторсии (сопряженного градиента деформации) и обратной дисторсии. Фундаментальный положительный абсолютный скаляр J, широко используемый в рациональной механике, вычисляется в терминах фундаментальных ориентирующих псевдоскаляров, связанных с референциальной и пространственной системами координат. Предложены двухточечные тензорные формулировки уравнений Эйлера–Пиола–Якоби. Получены уравнения, наиболее близкие к условиям ковариантного постоянства дисторсии и обратной дисторсии.

В третьем разделе обсуждается общая форма упругого потенциала линейного анизотропного микрополярного упругого континуума. Приводятся координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров, использующихся при математическом моделировании линейных гемитропных микрополярных континуумов.

В разделе 4 доказывается ковариантное постоянство определяющих линейный гемитропный микрополярный континуум тензоров и псевдотензоров четвертого ранга. Выделяется тензорная часть с постоянными компонентами в декартовом координатном представлении полуизотропного тензора четвертого ранга. Отмечено, что характеристическая микродлина L проявляется как псевдоскаляр веса -1.

В работе используется неконвенциональная терминология, существо которой было ранее разъяснено в работах авторов [1]. Изложение элементов псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [6–10]. Псевдотензорный формализм использовался авторами при разработке моделей линейных гемитропных микрополярных упругих сред (см. [11–20]).

Тензоры дисторсии и обратной дисторсии в нелинейной механике континуума. Введем в евклидовом пространстве системы координат $X^\alpha\,(\alpha = 1, 2, 3)$ и $x^s\,(i = 1, 2, 3)$. Обе системы координат считаются равноправными, однако, в дальнейшем, следуя терминологии нелинейной механики континуума, будем называть одну из них X^α отсчетной (лагранжевой), а вторую x^s — пространственной (эйлеровой). Греческие и латинские индексы будут ассоциироваться с отсчетными X^α и пространственными x^s координатами.[2] Обозначим через ${}^{\backprime}\underset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}}$ и $\underset{s}{\boldsymbol{\imath}}$ векторы ковариантных базисов, а через ${}^{\backprime}E$ и e — фундаментальные ориентирующие псевдоскаляры. Будем считать

[2] В ранних работах по рациональной механике (см., например, [3]) латинские заглавные буквы K , L, M использовались вместо греческих. Однако в более поздней работе [4] использовались буквы греческого алфавита.

известными метрические тензоры ${}^{\backprime}g_{\alpha\gamma} = {}^{\backprime}\underset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}} \cdot {}^{\backprime}\underset{\gamma}{\boldsymbol{\imath}}$ и $g_{sk} = \underset{s}{\boldsymbol{\imath}} \cdot \underset{k}{\boldsymbol{\imath}}$ соответственно введенным системам координат. Сопряженный градиент деформации[3] (или тензор дисторсии), являющийся двухточечным тензором, определяется следующими компонентами, называемыми дисторсиями:

$$x_{\alpha}^{\cdot i} = \partial_{\alpha} x^{i}. \tag{1}$$

Обратный градиент деформации (или обратная дисторсия)[4] определяется на основании уравнения

$$X_{i}^{\cdot\alpha} = \partial_{i} X^{\alpha}. \tag{2}$$

Очевидно, что справедливы следующие соотношения

$$x_{\alpha}^{\cdot i} X_{j}^{\cdot\alpha} = \delta_{j}^{i}, \quad X_{i}^{\cdot\beta} x_{\alpha}^{\cdot i} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \tag{3}$$

Следуя схеме рациональной механики, дисторсия $x_{\alpha}^{\cdot i}$ и обратная дисторсия $X_{j}^{\cdot\alpha}$ могут быть определены согласно

$$x_{\alpha}^{\cdot i} = {}^{\backprime}\nabla_{\alpha}^{\text{total}} x^{i}, \quad X_{i}^{\cdot\alpha} = \nabla_{i}^{\text{total}} X^{\alpha}, \tag{4}$$

где дифференциальные операторы ${}^{\backprime}\nabla_{\alpha}^{\text{total}}$ и $\nabla_{i}^{\text{total}}$ обозначают полные ковариантные производные двухточечных тензоров, известные из работ по рациональной механике (см. [3, с. 810]):

$$ {}^{\backprime}\nabla_{\sigma}^{\text{total}} = {}^{\backprime}\nabla_{\sigma}^{\text{expl}} + (\partial_{\sigma} x^{p}) \nabla_{p}^{\text{expl}}, \tag{5}$$

$$\nabla_{p}^{\text{total}} = \nabla_{p}^{\text{expl}} + (\partial_{p} X^{\sigma}) {}^{\backprime}\nabla_{\sigma}^{\text{expl}}. \tag{6}$$

Неполные операторы Гамильтона определяются согласно

$$ {}^{\backprime}\boldsymbol{\nabla}^{\text{expl}} = {}^{\backprime}\overset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}}\, \partial_{\alpha}^{\text{expl}}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^{\text{expl}} = \overset{k}{\boldsymbol{\imath}}\, \partial_{k}^{\text{expl}}. \tag{8}$$

Выражение для полных частных производных записываются в виде цепных правил (chain rules)

$$\partial_{\alpha}^{\text{total}} = \partial_{\alpha}^{\text{expl}} + (\partial_{\alpha} x^{k}) \partial_{k}^{\text{expl}}, \tag{9}$$

$$\partial_{k}^{\text{total}} = \partial_{k}^{\text{expl}} + (\partial_{k} X^{\alpha}) \partial_{\alpha}^{\text{expl}}. \tag{10}$$

В книге В. Л. Бердичевского [2, с. 65] утверждается, что дисторсия и обратная дисторсия являются ковариантно постоянными тензорами. Это утверждение в целом не соответствует действительности. Это можно показать, действуя следующим образом.

Согласно формализму рациональной механики [3, с. 244, уравнение (16.5)], введем положительный абсолютный скаляр J:

$$J = \frac{E}{{}^{\backprime}E} > 0, \tag{11}$$

[3]Точнее, сопряженный градиент деформации $\overset{*}{\mathbf{F}}$.

[4]В современной механике сплошных сред наряду с прямым описанием $X^{\alpha} \to x^{i}$ используется “обратное описание движения” $x^{i} \to X^{\alpha}$ [21]. По-видимому, “обратное описание” (inverse description), введено в механику Г. Пиола.

где фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр E равен смешанному произведению конвективных базисных векторов $\underset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}}$ $(\alpha = {}^{\backprime}1, {}^{\backprime}2, {}^{\backprime}3)$, а ${}^{\backprime}E$ равен смешанному произведению референциальных базисных векторов ${}^{\backprime}\underset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}}$ $(\alpha = {}^{\backprime}1, {}^{\backprime}2, {}^{\backprime}3)$. Поэтому фундаментальные ориентирующие псевдоскаляры в уравнении (11) определяются как:

$$E = (\underset{{}^{\backprime}1}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{{}^{\backprime}2}{\boldsymbol{\imath}}) \cdot \underset{{}^{\backprime}3}{\boldsymbol{\imath}}, \quad {}^{\backprime}E = ({}^{\backprime}\underset{{}^{\backprime}1}{\boldsymbol{\imath}} \times {}^{\backprime}\underset{{}^{\backprime}2}{\boldsymbol{\imath}}) \cdot {}^{\backprime}\underset{{}^{\backprime}3}{\boldsymbol{\imath}}. \tag{12}$$

Очевидно, $J = +E$ в случае, когда референциальный базис правосторонний декартов, и $J = -E$, если референциальный базис левосторонний.

Якобиан деформации $\varDelta = \det(\partial_\alpha x^i)$, будет удовлетворять тождеству Якоби [3, с. 246, уравнение (17.8)]

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial x^{\cdot i}_{\alpha}} = X^{\cdot \alpha}_{i} \varDelta. \tag{13}$$

Используя последнее уравнение, можно получить уравнения Эйлера–Пиола–Якоби [3, стр. 246, уравнение (17.9)]:

$$\partial^{\text{total}}_{k}(\varDelta^{-1} x^{\cdot k}_{\alpha}) = 0, \quad \partial^{\text{total}}_{\alpha}(\varDelta X^{\alpha}_{k}) = 0. \tag{14}$$

Двухточечная тензорная формулировка уравнений (14) запишется в виде

$$\nabla^{\text{total}}_{l}(J^{-1} x^{\cdot l}_{\alpha}) = 0, \quad {}^{\backprime}\nabla^{\text{total}}_{\alpha}(J X^{\cdot \alpha}_{k}) = 0. \tag{15}$$

Уравнения (15) справедливы в любой системе координат, в том числе и в случае, когда Эйлеровы и Лагранжевы координаты декартовы. В этом случае имеет место следующее соотношение:

$$J = \varDelta. \tag{16}$$

С учетом (16) уравнение (15) можно вывести из (14), так как в декартовых координатах имеем

$$\begin{aligned} {}^{\backprime}\nabla^{\text{total}}_{\alpha}(J X^{\cdot \alpha}_{k}) &= \partial^{\text{expl}}_{\alpha}(\varDelta X^{\cdot \alpha}_{k}) + \partial^{\text{expl}}_{s}(\varDelta X^{\cdot \alpha}_{k})(\partial_\alpha x^s) = \partial^{\text{total}}_{\alpha}(\varDelta X^{\cdot \alpha}_{k}), \\ \nabla^{\text{total}}_{k}(J^{-1} x^{\cdot k}_{\alpha}) &= \partial^{\text{expl}}_{\beta}(\varDelta^{-1} x^{\cdot k}_{\alpha})(\partial_k X^{\beta}) + \partial^{\text{expl}}_{k}(\varDelta^{-1} x^{\cdot k}_{\alpha}) = \partial^{\text{total}}_{k}(\varDelta^{-1} x^{\cdot k}_{\alpha}), \end{aligned}$$

и, применяя уравнения (14), мы можем в итоге получить

$$\nabla^{\text{total}}_{i}(J^{-1} x^{\cdot i}_{\alpha}) = 0, \quad {}^{\backprime}\nabla^{\text{total}}_{\alpha}(J X^{\cdot \alpha}_{i}) = 0. \tag{17}$$

Кроме уравнений (15) никаких других утверждений о ковариантном постоянстве тензоров дисторсии и обратной дисторсии в нелинейной механике сплошных сред не известно.

Применение ковариантно постоянных абсолютных тензорных и псевдотензорных полей в линейных микрополярных теориях. Тензоры и псевдотензоры четвертого ранга играют исключительно важную роль в математических моделях линейных анизотропных микрополярных упругих континнуумов [22–24].

Введем в рассмотрение микрополярный упругий потенциал $\mathscr{U}$, рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с естественными псевдотензорными аргументами

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(\epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s}), \tag{18}$$

где ϵ_{ij} — асимметричный тензор деформации; $\overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s}$ — псевдотензор деформации изгиба–кручения. Упругий потенциал полагается абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим в том числе от зеркальных отражений и центральной инверсии трехмерного пространства.

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела упругий потенциал в произвольной системе координат получается в форме:

$$\mathscr{U} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \overset{[-2]}{\underset{2}{H}}{}^{islm}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{is}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{islm}\epsilon_{is}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm}. \tag{19}$$

Отметим, что единственным определяющим тензором четвертого ранга чувствительным к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства оказывается определяющий псевдотензор $\overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{islm}$. Микрополярное тело называется гемитропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются при поворотах координатного репера, т.е. полуизотропны, но, вообще говоря, изменяются при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного Евклидова пространства.

Чтобы воспользоваться результатами, развиваемой в работе [1] теории ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров четвертого ранга в Евклидовых пространствах, преобразуем энергетическую форму (19) с помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра e, элиминируя веса псевдотензоров:

$$\mathscr{U} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + e^2\overset{[-2]}{\underset{2}{H}}{}^{islm}\frac{\overset{[+1]}{\kappa}{}_{is}}{e}\frac{\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm}}{e} + e\overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{islm}\epsilon_{is}\frac{\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm}}{e}, \tag{20}$$

в итоге получим

$$\mathscr{U} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \underset{2}{H}^{islm}\kappa_{is}\kappa_{lm} + \underset{3}{H}^{islm}\epsilon_{is}\kappa_{lm}. \tag{21}$$

Полученная энергетическая форма упругого потенциала (21) как правило используется при построении моделей гемитропных микрополярных упругих континуумов. С помощью координатного представления [1, формула (31)] для определяющих линейный гемитропный микрополярный упругий континуум псевдотензоров можно получить

$$\begin{aligned}
\underset{1}{H}^{islm} &= \underset{1}{a}g^{is}g^{lm} + \underset{1}{b}g^{il}g^{sm} + \underset{1}{c}g^{im}g^{sl}\,,\\
\underset{2}{H}^{islm} &= \underset{2}{a}g^{is}g^{lm} + \underset{2}{b}g^{il}g^{sm} + \underset{2}{c}g^{im}g^{sl}\,,\\
\underset{3}{H}^{islm} &= \underset{3}{a}g^{is}g^{lm} + \underset{3}{b}g^{il}g^{sm} + \underset{3}{c}g^{im}g^{sl}\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $\underset{\mathfrak{a}}{a}$, $\underset{\mathfrak{a}}{b}$, $\underset{\mathfrak{a}}{c}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ — девять определяющих постоянных гемитропного микрополярного упругого тела. С точки зрения тензорной алгебры $\underset{\mathfrak{a}}{a}$, $\underset{\mathfrak{a}}{b}$, $\underset{\mathfrak{a}}{c}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ как минимум являются полуизотропными инвариантами.

С тем чтобы вернуться к энергетической форме (19) необходимо преобразовать представления для определяющих тензоров (22). Для этого выполним следующие замены

$$\begin{aligned}
&\overset{[-2]}{\underset{2}{H}}{}^{islm} = e^{-2}\underset{2}{H}^{islm}, \qquad \overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{islm} = e^{-1}\underset{3}{H}^{islm},\\
&\overset{[-2]}{\underset{2}{a}} = e^{-2}\underset{2}{a}, \qquad \overset{[-2]}{\underset{2}{b}} = e^{-2}\underset{2}{b}, \qquad \overset{[-2]}{\underset{2}{c}} = e^{-2}\underset{2}{c},\\
&\overset{[-1]}{\underset{3}{a}} = e^{-1}\underset{3}{a}, \qquad \overset{[-1]}{\underset{3}{b}} = e^{-1}\underset{3}{b}, \qquad \overset{[-1]}{\underset{3}{c}} = e^{-1}\underset{3}{c}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Подставив выражения (23) в координатные представления (22) получим

$$
\begin{aligned}
&\underset{1}{H}^{islm} = \underset{1}{a} g^{is} g^{lm} + \underset{1}{b} g^{il} g^{sm} + \underset{1}{c} g^{im} g^{sl}\,,\\
&\overset{[-2]}{\underset{2}{H}}{}^{islm} = \overset{[-2]}{\underset{2}{a}} g^{is} g^{lm} + \overset{[-2]}{\underset{2}{b}} g^{il} g^{sm} + \overset{[-2]}{\underset{2}{c}} g^{im} g^{sl}\,,\\
&\overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{islm} = \overset{[-1]}{\underset{3}{a}} g^{is} g^{lm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{b}} g^{il} g^{sm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}} g^{im} g^{sl}\,.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Если вместо определяющих постоянных $\underset{\alpha}{a}$, $\underset{\alpha}{b}$, $\underset{\alpha}{c}$ перейти к конвенциональным механическим постоянным, таким как G, ν, L, $\ldots$, то характерная микродлина L будет псевдоскаляром отрицательного веса -1.

Ковариантное постоянство определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга. Рассмотрим подробнее координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга (22). Сравнивая представление для абсолютного тензора четвертого ранга с постоянными компонентами [1, формула (22)] и представление полуизотропного тензора (22) в декартовой системе координат, заметим, что

$$
H_{islm} = C_{islm} + b\delta_{il}\delta_{sm}\,, \tag{25}
$$

где C_{islm} обозначает абсолютный тензор четвертого ранга с постоянными компонентами.

Формула (25) в произвольной системе координат примет вид

$$
H^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m} = C^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m} + b g^{il} g_{sm}\,, \tag{26}
$$

где $C^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}$ — тензор с постоянными коэффициентами в смысле Б.Г. Гуревича [6], являющийся ковариантно постоянным.

Ковариантно продифференцировав представление (26) в произвольной системе координат получим

$$
\nabla_k H_{islm} = 0, \tag{27}
$$

при условии, что выполнено

$$
\nabla_k b = \partial_k b = 0. \tag{28}
$$

Отметим тот факт, что тензорное уравнение (27) при условии (28), остается справедливым в любой координатной системе.

Полуизотропное тензорное поле H_{islm} оказывается ковариантно постоянным и, следовательно, удовлетворяет псевдотензорному уравнению (27) при условии ковариантного постоянства инвариантов a, b, c, т.е.

$$
\nabla_k a = 0, \qquad \nabla_k b = 0, \qquad \nabla_k c = 0, \tag{29}
$$

или

$$
\partial_k a = 0, \qquad \partial_k b = 0, \qquad \partial_k c = 0. \tag{30}
$$

В механике микрополярных сред инварианты a, b, c приходится считать псевдоскалярами, а условия (30) следует заменить условиями (29) с соответствующим правилом ковариантного дифференцирования псевдоскаляров. В частности, в микрополярных теориях упругих сред из псевдоскаляров a, b, c формируется характерная микродлина $L = \overset{[-1]}{L}$, являющаяся псевдоскаляром отрицательного целого веса. Тогда одним из условий ковариантного постоянства определяющих псевдотензоров гемитропного микрополярного упругого тела будет

$$\nabla_p \overset{[-1]}{L} = \partial_p \overset{[-1]}{L} + \overset{[-1]}{L} \frac{\partial_p e}{e} = \overset{[-1]}{0}. \tag{31}$$

В заключении отметим, что полуизотропные псевдотензоры четвертого ранга произвольного целого веса, также оказываются ковариантно постоянными, в силу ковариантного постоянства степеней фундаментального ориентирующего псевдоскаляра.

Результаты и выводы. В настоящей статье рассмотрены вопросы применения ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров (в том числе, двухточечных) произвольной валентности и целого веса в Евклидовых пространствах в нелинейной механике сплошных сред и линейных моделях микрополярных упругих сред.

(1) Продемонстрировано, что тензоры дисторсии и обратной дисторсии не являются ковариантно постоянными двухточечными тензорами, в противовес указаниям на их ковариантное постоянство, встречающимся в литературных источниках по нелинейной механике континуума.
(2) Получены двухточечные абсолютные тензорные уравнения, наиболее близкие к условиям ковариантного постоянства дисторсии и обратной дисторсии.
(3) Обсуждаются общие координатные представления упругого потенциала для линейного анизотропного микрополярного континуума.
(4) Приводятся координатные представления в терминах дельт Кронекера и метрических тензоров для определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга, использующихся при моделировании линейных гемитропных микрополярных упругих континуумов.
(5) Получены условия ковариантного постоянства определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга для линейного гемитропного микрополярного упругого континуума.
(6) Отмечено, что характерная микродлина L проявляется как псевдоскаляр веса -1, и удовлетворяет псевдотензорному уравнению (31).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). с. 106–116.
[2] Berdichevsky V. L. Variational Principles of Continuum Mechanics. Moscow: Nauka, 1983. 448 p.
[3] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
[4] Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Berlin: Springer, 2004. 579 p.
[5] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Theory of Covariant Differentiation of Two Point Pseudotensor Fields // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. P. 1365–1373.
[6] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
[7] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
[8] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
[9] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
[10] McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.

[11] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.

[12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.

[13] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.

[14] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио-Адамара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 104–114.

[15] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Псевдовекторные дифференциальные операторы микрополярной упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 4(50). С. 59–72.

[16] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130–138.

[17] Nickolaevich R. Y., Valeryevich M. E. GENERALIZED PSEUDOTENSOR FORMULATIONS OF THE STOKES'INTEGRAL THEOREM // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.

[18] Nikolaevich R. Y., Valeryevich M. E. et al. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.

[19] Radayev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.

[20] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 1(51). с. 17–26.

[21] Maugin G. A. Material inhomogeneities in elasticity. New York: CRC Press, 1993. 292 p.

[22] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.

[23] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474.

[24] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

COVARIANTLY CONSTANT TENSORS IN EUCLID SPACES. APPLICATIONS TO CONTINUUM MECHANICS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The present paper is devoted to applications of covariantly constant tensors and pseudotensors (including two-point ones) of arbitrary valency and integer weight in Euclidean spaces to continuum mechanics. The tensors of distortion and inverse distortion are not covariantly constant two-point tensors, in contrast to their covariant constancy mentions found in the literature on nonlinear continuum mechanics. The general form of the elastic potential for a linear anisotropic micropolar continuum is given. Based on the non-conventional definition of a semi-isotropic tensor, coordinate representations of constitutive tensors and pseudotensors of the fourth rank are given in terms of Kronecker deltas and metric tensors. The covariant constancy of the constitutive tensors and pseudotensors of the fourth rank for the linear anisotropic micropolar continuum is shown.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, permutation symbol, covariant derivative, gradient, unconventionally isotropic tensor, fully isotropic tensor, demitropic tensor, hemitropic tensor, semi-isotropic tensor, conventionally isotropic tensor, tensor with constant components, constitutive pseudotensor, chiral media, micropolar hemitropic continuum

REFERENCES

[1] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclid spaces. Elements of the theory // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. № 2(52). c. 106–116.
[2] Berdichevsky V. L. Variational Principles of Continuum Mechanics. Moscow: Nauka, 1983. 448 p.
[3] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
[4] Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Berlin: Springer, 2004. 579 p.
[5] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Theory of Covariant Differentiation of Two Point Pseudotensor Fields // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. P. 1365–1373.
[6] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
[7] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
[8] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
[9] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
[10] McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.
[11] Radaev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2020. T. 82, № 4. C. 399–412.
[12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.

Murashkin Evgenii Valeryevich, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.
Radayev Yuri Nikolaevich, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

[13] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.

[14] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a Pseudotensor Generalization of Ugonio-Hadamar Connecting Bilateral Boundary Conditions // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. № 2(48). C. 104–114.

[15] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Pseudovector differential operators of micropolar elasticity // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. № 4(50). C. 59–72.

[16] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a Generalization of the Hamilton-Cayley Algebraic Theory // Izv. RAN. MTT. 2021. № 6. C. 130–138.

[17] Radaev Y. N., Murashkin E. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform. 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.

[18] Radayev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.

[19] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. № 1(51). c. 17–26.

[20] Maugin G. A. Material inhomogeneities in elasticity. New York: CRC Press, 1993. 292 p.

[21] Радаев Ю. Н. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2018. T. 22, № 3. C. 504–517.

[22] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2021. T. 25, № 3. C. 457–474.

[23] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 20-01-00666.