

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

## РАЗРУШЕНИЕ УПРУГО-ВЯЗКИХ БАЛОК ВЗРЫВОМ В ВОДЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

**Аннотация.** Дано аналитическое решение задачи о гарантированном разрушении балки взрывом заряда конденсированного взрывчатого вещества (ВВ) в воде. Предполагается, что материал балки чувствителен к скорости деформации, используется критерий разрушения по максимальным нормальным напряжениям, эквивалентному при изгибе максимальному изгибающему моменту. Учитывается произвольное расположение заряда ВВ над балкой, эффекты отражения ударной волны и спутного потока воды от балки, глубина погружения конструкции и заряда в воду. Обнаружено существенное влияние величины коэффициента вязкости материала балки на величину заряда ВВ, необходимого для ее гарантированного разрушения.

**Ключевые слова:** упруго-вязкая балка, взрыв в воде, разрушение балочной конструкции.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.001

УДК: 531/534

В работе [1] получено определяющее уравнение при воздействии взрывной нагрузки на балку, свободно лежащую на идеальных (неразрушаемых взрывом) опорах в воде; материал балки принят упруго-вязким с известным из экспериментов коэффициентом вязкости. Найдены интервалы значений коэффициента вязкости, в которых определяется соответствующее решение, при этом расположение заряда ВВ предполагается в центре пролёта балки. В данной работе рассматривается произвольное расположение заряда ВВ над балкой, используется найденная в работе [2] формула для удельного импульса взрыва в воде, используется критерий разрушения, основанный на гипотезе о достижении в критическом поперечном сечении балки в момент разрушения максимального изгибающего момента и дополненный коэффициентом динамичности [3], [4]. Найдены для каждого возможного интервала значений коэффициента вязкости величины радиуса и массы сосредоточенного заряда ВВ, взрыв которого для его фиксированного расположения над балкой в воде, приводит к её гарантированному разрушению.

---

© Володин Г. Т., Кочергин Д. С., 2022

Володин Геннадий Тимофеевич

e-mail: g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Кочергин Денис Сергеевич

e-mail: sir.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 18.09.2022

Как известно [1], [2] в силу быстротечности взрывной нагрузки, действующей на упруго-вязкую балку в воде, её деформирование происходит в период её свободных колебаний, описываемых уравнением

$$(m_* + m_1) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta J \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0, \quad (1)$$

где  $m_* = \rho_* b h$ ,  $m_1 = \frac{\pi}{4} \rho_1 b h$  – соответственно погонная [3] масса балки и присоединенная погонная [5] масса воды,  $b$  и  $h$  – соответственно ширина и высота прямоугольного поперечного сечения балки, постоянного по всей её длине;  $w(x, t)$  – прогиб балки в сечении с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ,  $E$  – модуль упругости материала балки,  $J$  – момент инерции,  $\eta$  – коэффициент вязкости, при этом нормальные напряжения  $\sigma$  в поперечных сечениях балки удовлетворяют соотношению [6], [7].

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – относительная деформация,  $\dot{\varepsilon}$  – скорость относительной деформации. Уравнение (1) должно удовлетворять для свободно опертой по концам балки граничным условиям

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0. \quad (4)$$

Соотношения (3) соответствуют отсутствию смещений граничных сечений балки, а условия (4) – отсутствию изгибающих моментов на концах балки. Начальные условия для уравнения (1) соответствуют взрывному нагружению балки в начальный момент времени, а именно: условие

$$w(x, 0) = 0 \quad (5)$$

соответствует отсутствию начальных смещений по всей длине балки; условие

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \frac{i_*(x)}{m_* + m_1} \quad (6)$$

соответствует импульсному (взрывному) характеру действующей нагрузки, согласно которому в начальный момент времени сечения балки получают начальные скорости, пропорциональные действующему распределенному импульсу [3], при этом эффекты сопротивления воды движению балки учитываются введением присоединенной массы воды [5], [8],  $i_*(x)$  – распределенный по всей длине балки погонный импульс, при этом

$$i_*(x) = K_1 \cdot b \cdot i(x), \quad (7)$$

где  $K_1$  – коэффициент формы [3], учитывающий расположение балки по отношению к фронту падающей на неё ударной волны,  $i(x)$  – удельный импульс, полученный каждым сечением  $x$  балки за время действия взрывной нагрузки, а удельный импульс  $i(x)$  вычисляется по формуле [2]

$$i(x) = 1,4 \cdot \frac{r_0}{a_{01}} \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^{0,24} \cdot (\eta_*(x) \rho_2 u_2^2 - P_{01}), \quad (8)$$

где  $r_0$  – радиус заряда ВВ,  $a_{01}$  – скорость звука в воде,  $a$  – расстояние от центра взрыва до оси балки,  $\rho_2, u_2$  – соответственно плотность и скорость частиц на фронте падающей ударной волны,  $P_{01}$  – давление на поверхности водоёма. Отметим, что

значения  $\rho_2$  и  $u_2$  получены с использованием экспериментальных данных [2], [8], а

$$\eta_*(x) = \frac{a^2 [2a^2 + (x - x_*)^2]}{[a^2 + (x - x_*)^2]^2}, \quad (9)$$

где  $x_*$  – координата эпицентра взрыва.

Решение начально-краевой задачи (1), (3-6), ищем методом разделения переменных с выделением главного (низкочастотного) колебания в виде

$$w(x, t) = w_0(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (10)$$

где функция  $w_0(t)$  определяет в каждый момент времени  $t$  прогиб в центре пролёта балки. Выбор такого (главного) колебания объясняется тем, что вследствие краткосрочного действия взрывной нагрузки предполагается определить гарантированное разрушение балки уже при первом (низкочастотном) колебании. Функция (10) удовлетворяет всем краевым условиям задачи (3), (4).

Подставим функцию (10) в уравнение (1), в результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно искомой функции  $w_0(t)$ :

$$\frac{d^2 w_0}{dt^2} + \gamma_1 \frac{dw_0}{dt} + \gamma_2 w_0 = 0, \quad (11)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\eta J \pi^4}{l^4 (m_* + m_1)}; \quad \gamma_2 = \frac{E J \pi^4}{l^4 (m_* + m_1)} \quad (12)$$

Характеристическое уравнение для уравнения (11) запишем в виде

$$\lambda^2 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 = 0 \quad (13)$$

Дискриминант уравнения (13) равен

$$D = \gamma_1^2 - 4\gamma_2 \quad (14)$$

Поскольку коэффициент вязкости  $\eta$  не определен, а также неизвестен радиус заряда  $r_0$ , взрыв которого приводит к гарантированному разрушению балки, выразим искомую функцию  $w_0(t)$  через неизвестный радиус заряда  $r_0$  и коэффициент вязкости  $\eta$ , а затем воспользуемся критерием разрушения; тем самым получим дополнительное соотношение для нахождения искомого радиуса  $r_0$ , определяющего решение задачи в соответствующем интервале значений коэффициента вязкости  $\eta$ .

Как известно, знак и величина дискриминанта  $D$  определяет вид функции  $w_0(t)$ . Возможны случаи:  $D < 0$ ;  $D = 0$ ;  $D > 0$ .

*Случай 1.* Пусть  $D < 0$ , тогда должно выполняться соотношение

$$\gamma_1 < 2\sqrt{\gamma_2}, \quad (15)$$

откуда получим интервал для  $\eta$ :

$$0 < \eta < \frac{2l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{E}{J} (m_* + m_1)} \quad (16)$$

В интервале для коэффициента вязкости (16) получим решение

$$w_0(t) = \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{D_1}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2} t \right) \cdot e^{-\frac{\gamma_1}{2} t} \quad (17)$$

где  $D_1 = -D$ .

Из начального условия (5) найдем  $C_1 = 0$ . Следовательно, решение (17) примет вид

$$w_0(t) = C_2 \cdot e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2}t \quad (18)$$

Коэффициент  $C_2$  найдем из начального условия (6) при  $x = \frac{l}{2}$  так как  $w_0(t)$  – функция, определяющая прогиб в середине пролёта балки. В результате получим

$$C_2 = \frac{2 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{(m_* + m_1)\sqrt{D_1}}; \quad (19)$$

тогда функция  $w_0(t)$  примет вид

$$w_0(t) = \frac{2 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{(m_* + m_1)\sqrt{D_1}} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2}t \quad (20)$$

и решение  $w(x, t)$  можно записать в виде

$$w(x, t) = \frac{2 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{(m_* + m_1)\sqrt{D_1}} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2}t \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (21)$$

Максимальное значение прогиба балки будет в середине её длины в момент времени, определяемым из условия

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

Из уравнения (22) найдем

$$t_* = \frac{2}{\sqrt{D_1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{D_1}}{\gamma_1} + \frac{2\pi n}{\sqrt{D_1}}, \quad (23)$$

где  $n=0, 1, 2, \dots$

Таким образом, максимальные значения прогиба балка получает в середине пролёта в моменты времени  $t_*$ :

$$\max w = w\left(\frac{l}{2}, t_*\right) = \frac{2 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{(m_* + m_1)\sqrt{D_1}} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_*} \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2}t_* \quad (24)$$

Найдём теперь максимальное значение изгибающего момента, нужное для формулировки условия разрушения балки. Известно, [7] что формула для изгибающего момента в любом сечении  $x$  балки имеет вид

$$M(x, t) = -\frac{EJ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (25)$$

В работе [2] показано, что максимальный изгибающий момент соответствует максимальному прогибу балки. Следовательно,

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}, t_*\right) \quad (26)$$

Используем далее критерий гарантированного разрушения по достижению в критическом сечении максимального изгибающего момента [2]. Этот критерий модифицирован введением коэффициента динамичности  $\mu_3$ , а также коэффициента однородности

на гарантированное разрушение  $K_{0*}$  [3], [4] и имеет вид

$$\frac{M_{\max}}{W \cdot \delta_{*n}} - K_{0*} \mu_3 \geq 0, \quad (27)$$

где  $\delta_{*n}$  – нормированный браковочный минимум материала балки,  $W$  – осевой момент сопротивления сечения.

При этом согласно формулам (21), (23), (25)

$$M_{\max} = \frac{2\pi^2 EJ \cdot i_*(\frac{l}{2})}{l^2(m_* + m_1)\sqrt{D_1}} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_*} \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2}t_*, \quad (28)$$

а  $t_*$  определяется формулой (23).

Левая часть неравенства (27) является функцией искомого радиуса  $r_0$  заряда ВВ. Решение этого трансцендентного неравенства определяет минимальное значение радиуса  $r_0$  сферического заряда ВВ при взрыве которого балка с указанными физическими и геометрическими характеристиками и известными (фиксированными) координатами расположения заряда относительно балки в воде будет гарантированно разрушена. Полученное значение для максимального изгибающего момента соответствует вязкостным характеристикам материала балки с коэффициентом вязкости в интервале, определяемым неравенствами (16). Для другого интервала получим другое решение.

*Случай 2.* Пусть теперь  $D = 0$ . Тогда

$$\gamma_1^2 = 4\gamma_2, \quad (29)$$

Из (29) найдём

$$\eta = \frac{2l^2}{\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{J}(m_* + m_1)} \quad (30)$$

и решение  $w_0(t)$  можно записать в виде

$$w_0(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \quad (31)$$

Подчинив решение (31) начальным условиям, соответствующим (5) и (6), получим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{i_*(\frac{l}{2})}{m_* + m_1}, \quad (32)$$

при этом в момент времени  $t_*$ , определяемый формулой

$$t_* = \frac{2}{\gamma_1} = \frac{2l^4(m_* + m_1)}{\eta J \pi^4} \quad (33)$$

функция  $w_0(t)$  будет иметь максимальное значение

$$\max w_0(t) = w_0(t_*) \quad (34)$$

Итак, для величины  $\eta$ , определяемой формулой (30), получим решение

$$w_0(t) = \frac{i_*(\frac{l}{2})}{m_* + m_1} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \quad (35)$$

при этом

$$\max w_0(t) = w_0(t_*) = \frac{2 \cdot l^4 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{\eta J \pi^4 e} \quad (36)$$

Максимальное значение изгибающего момента наблюдается в момент времени  $t = t_*$  в середине пролёта балки. Согласно полученному решению

$$w(x, t) = \frac{i_*(\frac{l}{2})}{m_* + m_1} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (37)$$

и формулы (25) для изгибающего момента, найдём

$$M_{\max} = \frac{2 \cdot E \cdot l^2 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{\eta \pi^2 e} \quad (38)$$

Далее, определяем минимальный радиус  $r_0$  заряда из трансцендентного неравенства (27), в которое вместо  $M_{\max}$  следует подставить выражение из формулы (38).

*Случай 3.* Рассмотрим теперь случай  $D > 0$ , которому соответствует диапазон

$$\eta > \frac{2l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{E}{J} (m_* + m_1)}. \quad (39)$$

Для этого случая решение  $w_0(t)$  примет вид

$$w_0(t) = C_1 e^{-\frac{\gamma_1 + \sqrt{D}}{2}t} + C_2 e^{-\frac{\gamma_1 - \sqrt{D}}{2}t} \quad (40)$$

Подчинив найденное решение (40) начальным условиям, соответствующим (5) и (6), получим систему уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ (-\gamma_1 + \sqrt{D}) C_1 - (\gamma_1 + \sqrt{D}) C_2 &= 2i_*(\frac{l}{2}) \end{aligned} \right\}, \quad (41)$$

из которой находим

$$C_1 = \frac{i_*(\frac{l}{2})}{\sqrt{D}}; \quad C_2 = -\frac{i_*(\frac{l}{2})}{\sqrt{D}}; \quad (42)$$

Найдём момент времени  $t_*$ , в который прогиб в середине пролёта балки, а также изгибающий момент будут иметь максимальные значения. Для этого момента времени должно выполняться условие

$$\left. \frac{\partial w_0}{\partial t} \right|_{t=t_*} = 0 \quad (43)$$

Решение уравнения (43) определяет  $t_*$  в виде

$$t_* = \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \frac{(\gamma_1 + \sqrt{D})}{(\gamma_1 - \sqrt{D})} \quad (44)$$

Максимальный прогиб балки получим в её середине пролёта в момент времени  $t_*$ . Величина максимального прогиба выражается согласно (40) и (44) формулой

$$\max w = w_0(t_*) = C_1 e^{-\frac{\gamma_1 + \sqrt{D}}{2}t_*} + C_2 e^{-\frac{\gamma_1 - \sqrt{D}}{2}t_*}. \quad (45)$$

Максимальный изгибающий момент определяется также в середине пролёта балки в этот момент времени и выражается формулой

$$M_{\max} = M(\frac{l}{2}, t_*) = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left( C_1 e^{-\frac{\gamma_1 + \sqrt{D}}{2}t_*} + C_2 e^{-\frac{\gamma_1 - \sqrt{D}}{2}t_*} \right), \quad (46)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  определены формулой (42). Далее, для нахождения  $r_0$  используем соотношение (27).

На рисунках 1-2 в качестве примеров расчёта показано влияние коэффициента вязкости на величину радиуса заряда ВВ, гарантирующего при взрыве разрушение рассматриваемой балочной конструкции. На рисунке 3 показано изменение радиуса  $r_0$  заряда ВВ с учётом коэффициента вязкости в зависимости от смещения  $x_*$ . Все расчёты выполнены, исходя из следующих входных данных: длина балки  $l=2$ [м]; параметры сечения:  $b=0.20$  [м];  $h=0.30$  [м]; расстояние заряда от оси балки  $a=1$  [м]; глубина погружения  $H = 100$ [м], модуль упругости материала балки  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ [Па], коэффициент динамичности  $\mu_3 = 1.8$ , коэффициент однородности на гарантированное разрушение  $K_{0*} = 1.644$ , плотность материала балки (Ст.3)  $\rho_0 = 7800$ [кг/м<sup>3</sup>], нормированный браковочный минимум  $\delta_{*n} = 2.4 \cdot 10^8$ [Па], плотность воды  $\rho_1 = 1000$ [кг/м<sup>3</sup>], скорость звука в воде  $a_{01} = 1460$ [м/с], давление на поверхности  $P_{01} = 101325$ [Па], взрывчатое вещество – литой тротил, плотностью  $1620$  [кг/м<sup>3</sup>].

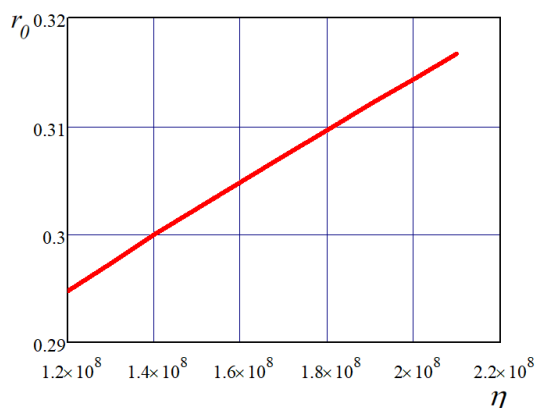


Рис.1 Зависимость радиуса  $r_0$ [м] заряда ВВ от коэффициента вязкости  $\eta$ [кг/м·с] ( $D < 0$ )

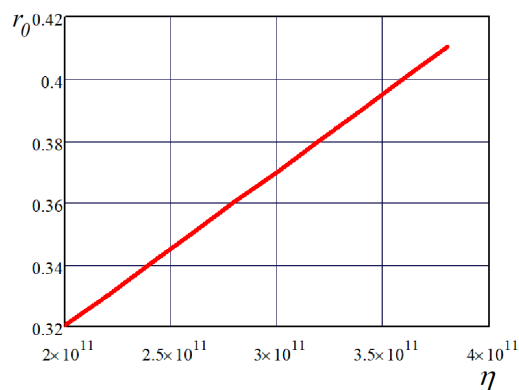


Рис.2 Зависимость радиуса  $r_0$ [м] заряда ВВ от коэффициента вязкости  $\eta$ [кг/м·с] ( $D > 0$ )

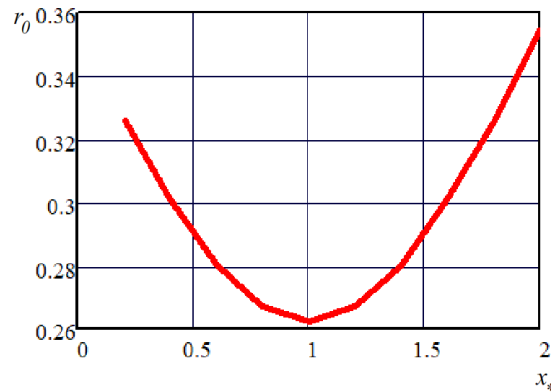


Рис.3 Зависимость радиуса  $r_0$ [м] заряда ВВ от смещения  $x_*$ [м] с учётом коэффициента вязкости  $\eta$ [кг/м · с] ( $D=0$ )

### Заключение.

Из представленных графиков (рис.1, рис.2) видно, что между коэффициентом вязкости и радиусом заряда ВВ существует зависимость, которая указывает на существенное влияние величины коэффициента вязкости материала балки на величину заряда ВВ, необходимого для её гарантированного разрушения. На рис.3 показана зависимость радиуса заряда ВВ от координаты эпицентра взрыва с учётом коэффициента вязкости, который является определенной фиксированной величиной. Таким образом, располагая информацией о геометрических и физических характеристиках материала балки и заряда ВВ, по предложенной в этой работе методике можно определить минимальный радиус заряда ВВ, взрыв которого, для его фиксированного расположения относительно материала балки в воде, приводит к её гарантированному разрушению.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Володин Г. Т., Кочергин Д. С. Деформирование упруго-вязких балок взрывной нагрузкой в воде. Чебоксары: Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 1(47), 2021. 56-63 с.
- [2] Володин Г. Т., Кочергин Д. С. Обобщенный анализ гарантированного разрушения взрывом балочных элементов конструкций в воде. № 2(52). Чебоксары, 2022. 62-71 с.
- [3] Саламахин Т. М. Разрушение взрывом элементов конструкций. Москва: ВИА, 1961. 275 с.
- [4] Володин Г. Т. Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидких средах. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. Тула: Левша, 2005. 160 с.
- [5] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, часть 1. Москва: ГИФМЛ, 1963. 584 с.
- [6] Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности, ползучести. Москва: Высшая школа, 1968. 612 с.
- [7] Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Москва: Наука, 1976. 607 с.
- [8] Саламахин Т. М. Физические основы механического действия взрыва и методы определения взрывных нагрузок. Москва: ВИА, 1974. 255 с.



G. T. Volodin, D. S. Kochergin

## GENERALIZED ANALYSIS OF GUARANTEED EXPLOSION DESTRUCTION OF BEAM STRUCTURAL ELEMENTS IN WATER

*Tula State University, Tula, Russia.*

**Abstract.** An analytical solution is given to the problem of guaranteed destruction of the beam by the explosion of a charge of a condensed explosive substance (BB) in water. It is assumed that the beam material is sensitive to the rate of deformation, the criterion of failure is used for maximum normal stresses equivalent to the maximum bending moment during bending. The arbitrary location of the explosive charge above the beam, the effects of the reflection of the shock wave and the satellite flow of water from the beam, the depth of immersion of the structure and the charge into the water are taken into account. A significant influence of the value of the viscosity coefficient of the beam material on the value of the explosive charge required for its guaranteed destruction was found.

**Keywords:** elastic-viscous beam, explosion in water, destruction of the beam structure.

### REFERENCES

- [1] Volodin G. T., Kochergin D. S. Deformation of elastic-viscous beams by explosive load in water. Cheboksary: Bulletin of the I. Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. No. 1(47), 2021. 56-63 p. (in Russian).
- [2] Volodin G. T., Kochergin D. S. A generalized analysis of the guaranteed destruction by explosion of beam structural elements in water. No. 2(52). Cheboksary: Bulletin of the I. Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state, 2022. 62-71 p. (in Russian).
- [3] Salamakhin T. M. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).
- [4] Volodin G. T. The effect of explosion of charges of condensed explosives in gas and liquid media. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).
- [5] Kochin N. E., Kibel I. A., Rose N. V. Theoretical hydromechanics, part 1. Moscow: GIFML, 1963. 584 p. (in Russian).
- [6] Bezukhov N. I. Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity, creep. Moscow: High School, 1968. 612 p. (in Russian).
- [7] Belyaev N. M. Strength of materials. Moscow, 1976. 608 p. (in Russian).
- [8] Salamakhin T. M. Physical foundations of the mechanical action of an explosion and methods for determining explosive loads. Moscow: VIA, 1974. 255 p. (in Russian).

---

*Volodin Gennady Timofeevich*, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula, Russia.

*Kochergin Denis Sergeevich*, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.