*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3 (53). С. 14–19*

*М. М. Вислогузова*[1], *А. В. Ковалев*[1,2]

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКА С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭФФЕКТОВ

[1] *Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия*
[2] *Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия*

***Аннотация.*** В данной работе рассмотрено термоупругопластическое состояние тонкого кругового диска. Тепловой источник известного радиуса действует в центре диска. Поле температур центральной части диска является однородным. На внешней границе диска определены температура и давление. Напряженное состояние определено при использовании условия пластичности Мизеса с учетом независимости всех механических констант материала от температуры. Показана невозможность одновременного зарождения нескольких пластических зон. Приведены графики напряжений. Проведено сравнение полученных результатов с известными решениями.

***Ключевые слова***: пластичность, упругость, плоское напряженное состояние, термоупругопластичность.

*DOI*: 10.37972/chgpu.2022.53.3.002

*УДК*: 539.3

Определению напряженно-деформированного состояния (НДС) посвящено большое число работ [1-10]. В части из них [1-5], [8-9] рассматривались задачи определения НДС в тонких дисках. В частности, в [2-5], [8-9] решались задачи о силовом и тепловом воздействии. В работе [2] определялось НДС в тонком упругопластическом диске с учетом предела текучести от температуры. При этом распределение температуры принималось стационарным.

**1. Постановка задачи.** В данной работе определялось напряженное состояние в тонком круговом диске радиуса $b$, находящемся под воздействием теплового

© Вислогузова М. М., Ковалев А. В., 2022
*Вислогузова Мария Михайловна*
`e-mail:` visloguzova99@mail.ru, студент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
*Ковалев Алексей Викторович*
`e-mail:` kav-mail@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.09.2022

источника и давления $p_b$ на внешней границе. Задача решалась в рамках плоского напряженного состояния в цилиндрической системе координат ($r$, $\theta$, $z$).

Тепловой источник действует в центральной части диска $0 \leq r \leq a$. Поле температур, согласно [1] - [4], определено формулой:

$$T = T_a f, \quad f = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\ln(\frac{b}{r})}{\ln(\frac{b}{a})}, & \text{если} \quad a \leq r \leq b. \end{cases} \tag{1}$$

Все искомые величины, вследствие осевой симметрии, зависят только от расстояния r до теплового источника. Механические константы материала приняты независимыми от температуры.

Все величины приведены к безразмерному виду с сохранением прежних обозначений. Масштаб для напряжений – предел пластичности $k$, масштаб длины- радиус a.

В рассматриваемой задаче, основные уравнения, описывающие поведение термоупругоплатического диска взяты согласно [5]-[7] и включают в себя:

- уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \tag{2}$$

где $\sigma_r$, $\sigma_\theta$ - компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат;

- соотношения Коши

$$e_r = \frac{du}{dr}, \;\; e_\theta = \frac{u}{r}, \tag{3}$$

где $e_r$, $e_\theta$ - компоненты тензора деформаций в цилиндрической системе координат, $u$-компонента вектора перемещений в цилиндрической системе координат;

В качестве условия пластичности было выбрано условие пластичности Мизеса:

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = k^2. \tag{4}$$

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука в форме:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}[e_r + \nu e_\theta - (1+\nu)\alpha T], \tag{5}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}[e_\theta + \nu e_r - (1+\nu)\alpha T]$$

где E – модуль Юнга, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $\alpha$ – коэффициент линейного температурного расширения, $T$ – температура, которая определяется (1).

Граничные условия:

$$\sigma_r|_{r=b} = -p_b, \tag{6}$$

$$\sigma_r|_{r=c_i} = -p_i, \tag{7}$$

где $c_i$ – радиус упругопластической границы, $p_i$ – давление на границе раздела упругой и пластической зон.

Условие сопряжения:

$$[\sigma_\theta]|_{r=c_i} = 0. \tag{8}$$

**2. Решение и результаты.** Аналогично [2], при решении задачи, введены обозначения $c_i$ и $c_e$ – радиусы границы упругой области. Давление на этих границах: $p_i$ и $p_e$.

Из (2), (3), (5), (6), (7) получим:

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E T_a}{r^2}\int\limits_{c_i}^{r} f r dr + \frac{c_i^2 p_i - b^2 p_b}{b^2 - c_i^2} + \frac{\alpha E T_a}{b^2 - c_i^2}\int\limits_{c_i}^{b} f r dr - \tag{9}$$

$$-\frac{1}{r^2}\left(\frac{b^2 c_i^2 (p_i - p_b)}{b^2 - c_i^2} + \frac{c_i^2 \alpha E T_a}{b^2 - c_i^2}\int\limits_{c_i}^{b} f r dr\right),$$

$$\sigma_\theta = \alpha E T_a\left(\frac{1}{r^2}\int\limits_{c_i}^{r} f r dr - f\right) + \frac{c_i^2 p_i - b^2 p_b}{b^2 - c_i^2} + \frac{\alpha E T_a}{b^2 - c_i^2}\int\limits_{c_i}^{b} f r dr + \tag{10}$$

$$+\frac{1}{r^2}\left(\frac{b^2 c_i^2 (p_i - p_b)}{b^2 - c_i^2} + \frac{c_i^2 \alpha E T_a}{b^2 - c_i^2}\int\limits_{c_i}^{b} f r dr\right)$$

(9), (10) представляют собой выражения для определения напряжений в упругой области. Алгоритм решения подобной задачи подробно рассмотрен в книге [7]. Аналогичные выражения для напряжений в упругой области были получены в [2].

В пластической области, согласно [5], (4):

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -k. \tag{11}$$

Радиус $b = b_k$, при котором возможно одновременное зарождение пластических зон на внешней границе и центральной части диска, определен основываясь на [2]. Из (11) следует:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -2k. \tag{12}$$

Тогда, с учетом выражений (9), (10):

$$-\alpha E T_a f + 2\frac{c_i^2 p_i - b^2 p_b}{b^2 - c_i^2} + 2\frac{\alpha E T_a}{b^2 - c_i^2}\int\limits_{c_i}^{b} f r dr = -2k. \tag{13}$$

Положив $c_i = 0, c_e = b$:

$$-\alpha E T_a f + 2\frac{\alpha E T_a}{b^2}\int\limits_{0}^{b} f r dr = 2p_b - 2k. \tag{14}$$

Отсюда температура:

$$T_a = \frac{2b^2(p_b - k)}{\alpha E\left(2\int\limits_{0}^{b} f r dr - b^2\right)}. \tag{15}$$

Температура, для которой на внешней границе выполнено (12) при $r = b$:

$$T_a = \frac{b^2\left(p_b - k\right)}{\alpha E \int\limits_0^b f r dr}. \tag{16}$$

Из (15), (16) следует, что радиус, при котором на внешней границе диска и на границе температурного источника зарождаются одновременно две пластические области:

$$b = b_k = 0. \tag{17}$$

Таким образом, одновременное зарождение пластических зон в центре и на внешней границе диска, в рамках решаемой задачи, невозможно, в отличие от [2].

Для определения радиуса границы раздела упругой и пластической зон, было использовано условие сопряжения окружного напряжения (8).

$$\alpha E T_a \left( \frac{2}{b^2 - c_i^2} \int\limits_{c_i}^{b} \frac{\ln\left(\frac{b}{c_i}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} r dr - \frac{\ln\left(\frac{b}{c_i}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right) + \frac{2b^2\left(p_i - p_b\right)}{b^2 - c_i^2} = 0. \tag{18}$$

Выражение (18) позволяет определить радиус упругопластической границы. Для значений параметров:

$$K = 1,\ \alpha E = 0.012,\ a = 1,\ b = 7,\ T_a = 330,\ p_b = 0,$$
$$c_i = 1.633. \tag{19}$$

**3. Результаты расчетов.** Для построения графиков, приведенных ниже, были приняты следующие значения параметров:

$$K = 1,\ \alpha E = 0.012,\ a = 1,\ b = 7,\ T_a = 330,\ p_b = 0,\ c_i = 1.633.$$

На рис. 1, приедены графики зависимостей компонент напряжения от радиуса диска без учета зависимости предела текучести от температуры, полученные по формулам (9), (10).

Аналогичные графики зависимости компонент напряжений от радиуса можно получить для условия пластичности Треска по результатам работы [2], но без учета зависимости предела текучести $k$ от температуры (рис. 2).

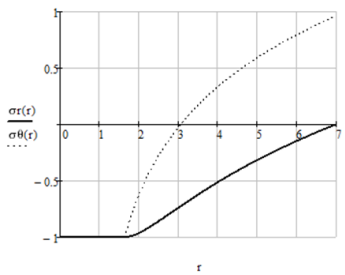


Рис. 1. Зависимость компонент напряжения $\sigma_r$ и $\sigma_\theta$ от радиуса $r$без учета зависимости предела текучести от температуры

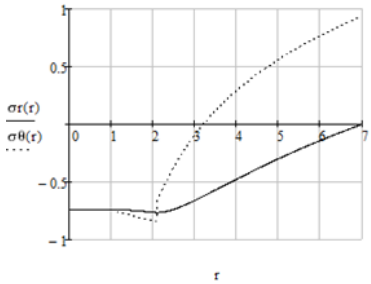


Рис. 2. Зависимость компонент напряжения $\sigma_r$ и $\sigma_\theta$ от радиуса $r$при учете зависимости предела текучести от температуры

Сравнение графиков рис. 1 с графиками на рис. 2 показало, что при учете зависимости предела текучести от температуры упругопластическая граница смещается в сторону внешней границы диска. Напряжения в пластической зоне не являются постоянными величинами.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Артемов М. А, Якубенко А. П. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. №1. С. 30-38.

[2] Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г., Переяславская И. И. О напряженном состоянии тонкого диска с учетом зависимости предела текучести от температуры // Инженерный вестник Дона.-науч. журн. 2017. № 3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-napryazhennom-sostoyanii-tonkogo-diska-s-uchetom-zavisimosti-predela-tekuchesti-ot-temperatury/viewer

[3] Артемов М. А., Барановский Е. С., Акиньшин В. В., Скорняков Н. С., Фатхудинов Д. Б. Математическое моделирование состояния тонкого диска при тепловом и силовом воздействиях // Инженерный вестник Дона.-науч. журн. 2019. № 4. Режим доступа: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_28_Artemov.pdf_4c0401978b.pdf. (Дата поступления статьи: 07.06.2019).

[4] Бердзенишвили Г. Г., Артемов М. А., Барановский Е. С., Семка Э. В., Фатхудинов Д. Б. О поведении упругопластического диска под действием теплового источника [Сетевое издание] // Инженерный вестник Дона.-науч. журн. 2018. № 2. Режим доступа: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_190_Berdzeneshvili_N.pdf_45978b1390.pdf– (Дата поступления статьи: 01.06.2018).

[5] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 252 с.

[6] Демидов С.П. Теория упругости/ С.П. Демидов – Москва: Высшая школа, 1979. – 432 с.

[7] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости/С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер Москва : Наука, 1979. 560 с.

[8] О механическом поведении упрочняющегося упругопластического диска под действием источника тепла / А.А. Афанасьев, К.К. Горностаев, А.В. Ковалев, А.С.Чеботарев // Вестник Томского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. 2017. № 50. С. 57–66.

[9] Вислогузова М. М., Гоцев Д. В., Ковалев А. В., Шашкин А. И. Определение напряженного состояния упрочняющегося диска под действием температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 168-173.

[10] Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е.В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздей-ствия // Изв. РАН. МТТ. 2014. Т. 49. № 2. С. 124-131.


*M. M. Visloguzova*[1], *A. V. Kovalev*[1,2]

## TO DETERMINE THE STRESS STATE OF THE DISK, TAKING INTO ACCOUNT TEMPERATURE INFLUENCES

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *Military training and research center of the air force "Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia*

***Abstract.*** In this paper, the thermoelastic state of a thin circular disk is considered. A heat source of known radius acts in the center of the disk. The temperature field of the central part is homogeneous. The temperature and pressure are determined at the outer boundary of the disk. The stress state is determined using the Mises plasticity condition, taking into account the independence of all mechanical constants of the material from temperature. The impossibility of simultaneous generation of several plastizones is shown. Stress graphs are given. The results obtained are compared with known solutions.

***Keywords***: plasticity, elasticity, plane stress state, thermoelasticity.

## Литература

[1] Artemov M. A., Yakubenko A. P. Mathematical modeling of mechanical behavior of a rotating disk / M. A. Artemov, A. P. Yakubenko // Voronezh. state. UN-t-2014. no. 1. pp. 30-38.

[2] Artemov M. A., Baranovsky E. S., Berdzenishvili G. G., Pereyaslavskaya I. I. On the stressed state of a thin disk taking into account the dependence of the yield strength on temperature [Online edition] // Engineering Bulletin of the Don.-scientific journal. 2017. No. 3. Access mode: https://cyberleninka.ru/article/n/o-napryazhennom-sostoyanii-tonkogo-diska-s-uchetom-zavisimosti-predela-tekuchesti-ot-temperatury/viewer

[3] Artemov M. A., Baranovsky E. S., Akinshin V. V., Skornyakov N. S., Fatkhudinov D. B. Mathematical modeling of the thin disk state under thermal and power effects [Online edition] // Engineering Bulletin of the don.- scientific journal-2019. No 4. Mode of delivery: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_28_Artemov.pdf_4c0401978b.pdf (date of receipt of the article: 07.06.2019).

[4] Berdzenishvili G. G., Artemov M. A., Baranovsky E. S., Semka E. V., Fatkhudinov D. B. On the behavior of an elastic-plastic disk under the action of a heat source [Online edition] // Engineering Bulletin of the don. scientific journal. 2018. No 2. Access Mode: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_190_Berdzeneshvili_N.pdf_45978b1390.pdf (date of receipt of the article: 01.06.2018).

[5] Parkus G. Unsteady temperature stresses. Moscow: State publishing house of physical and mathematical literature, 1963. 252 p.

[6] Demidov S. P. Theory of elasticity. Moscow: Higher school, 1979. 432 p.

[7] Timoshenko S. P., Goodyear J. Theory of elasticity Goodyer-Moscow: Nauka Publishing house, 1979. 560 p.

[8] Afanasyev A. A. , Gornostaev K. K., Kovalev A. V., Chebotarev A. S. On the mechanical behavior of a hardening elastic-plastic disk under the action of a heat source // Bulletin of the Tomsk State University. Ser. Mathematics and Mechanics. 2017. No. 50 pp. 57-66.

[9] Visloguzova M.M., Gotsev D.V., Kovalev A.V., Shashkin A.I. Determination of the stress state of a hardening disk under the influence of temperature // Bulletin of the I.Ya. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of the limit state. 2020. No. 3 (45). pp. 168-173.

[10] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the field of residual stresses under local thermal influence // Izv. RAS. MTT. 2014. Vol. 49. No. 2. Pp. 124-131.

---

*Maria Mikhailovna Visloguzova*, student, Voronezh State University, Voronezh, Russia.
*Alexey Viktorovich Kovalev*, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, Voronezh State University, Military training and research center of the air force “Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russia.