

С. Л. Субботин, А. А. Алексеев

## РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА СН-ЭВМ В РАСЧЕТАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ВИНТОВЫХ ТРАЕКТОРИЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ

*Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия*

**Аннотация.** В работе представлена реализация метода СН-ЭВМ, предложенного А.А. Ильюшиным для решения краевых задач, в расчетах процессов упругопластического деформирования по траекториям постоянной кривизны и кручения. Приведены расчетные уравнения теории упругопластических процессов для определения скоростей деформаций (производных по длине дуги траектории деформирования).

**Ключевые слова:** теория упругопластических процессов, пластичность, функционалы пластичности, краевая задача, метод СН-ЭВМ.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.003

УДК: 539.3

Для решения краевых задач теории упругопластических процессов А.А. Ильюшиным году был предложен экспериментально-теоретический метод СН-ЭВМ [1, 2]. Реализация этого метода требует использования испытательной установки на сложное нагружение (СН). Развитие и обоснование метода СН-ЭВМ в дальнейшем было рассмотрено в работах [3-11]. Идея метода лежит в основе численного решения краевых задач теории пластичности, в которых определяющие соотношения содержат функционалы. Выбор аппроксимирующих функций для функционалов пластичности выполняется по способу последовательных приближений. В начальном приближении задается некоторый частный вид функций по одной из теорий пластичности. В результате решения краевой задачи определяется совокупность траекторий напряжений и деформаций во всех точках тела. Эти траектории группируются по классам. Для каждого класса траекторий деформаций проводятся эксперименты на испытательной машине, реализующей сложное нагружение по заданной траектории. В результате

---

© Субботин С. Л., Алексеев А. А., 2022

*Субботин Сергей Львович*

**e-mail:** sbtn@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

*Алексеев Андрей Алексеевич*

**e-mail:** alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

Поступила 10.10.2022

получаются экспериментальные траектории напряжений. Сопоставление расчетных траекторий напряжений с экспериментальными для одних и тех же траекторий деформации позволяет уточнить вид аппроксимирующих функций. Затем снова решается краевая задача с уточненными функциями процесса и находятся новые траектории напряжений и деформаций. Приближения повторяются до тех пор, пока расчетные и экспериментальные траектории не совпадут между собой с требуемой точностью. При экспериментах в пространстве напряжений процесс последовательных приближений организуется аналогично. Большое количество накопленных опытных данных позволяет применять метод СН-ЭВМ в численном эксперименте при решении краевых задач теории пластичности с проверкой на соответствие расчетных результатов эксперименту. Также, метод СН-ЭВМ можно применять для идентификации определяющих соотношений теории пластичности. Определяющие соотношения теории упругопластических процессов [12] в трехмерном изображающем девиаторном пространстве А.А. Ильюшина удобно принимать в виде [13-14]

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \left( \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right), \\ \frac{dS_2}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \left( \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right), \\ \frac{dS_3}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \left( \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  – функционалы пластичности, определяемые из экспериментов;

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$$

– модуль вектора напряжений;

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sigma} \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + S_2 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + S_3 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right)$$

– косинус угла отклонения вектора напряжений от касательной к траектории деформирования в каждой ее точке;  $\sin \vartheta_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_1}$ .

В расчетах конструкций обычно процесс задается по нагрузкам (напряжениям), а деформации нужно определить. В этом случае определяющие соотношения (1) разрешаются относительно скоростей деформаций

$$\begin{aligned}N \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} &= \frac{dS_1}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma}, \\ -\frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + N \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} &= \frac{dS_2}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma}, \\ \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + N \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} &= \frac{dS_3}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma}.\end{aligned}$$

Скорости деформаций из этой системы уравнений можно найти методом определителей. Главный определитель

$$Det = N^3 + N \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1},$$

тогда

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_1}{ds} &= \frac{1}{Det} \left[ b_1 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_1^2}{\sigma^2} + N^2 \right) + b_2 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_1 S_2}{\sigma^2} - N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_3 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} + N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \right) \right], \\ \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} &= \frac{1}{Det} \left[ b_1 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_1 S_2}{\sigma^2} + N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \right) + b_2 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_2^2}{\sigma^2} + N^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_3 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_2 S_3}{\sigma^2} - N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \right) \right], \\ \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} &= \frac{1}{Det} \left[ b_1 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} - N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \right) + b_2 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_2 S_3}{\sigma^2} + N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_3 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_3^2}{\sigma^2} + N^2 \right) \right],\end{aligned}$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{dS_1}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma}, \\ b_2 &= \frac{dS_2}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma}, \\ b_3 &= \frac{dS_3}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma}.\end{aligned}$$

В этих уравнениях значения  $\cos \vartheta_1$  и  $\sin \vartheta_1$  зависят от  $\frac{d\mathcal{E}_1}{ds}, \frac{d\mathcal{E}_2}{ds}, \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}$ , поэтому на каждом шаге по параметру нагружения величины  $\frac{d\mathcal{E}_1}{ds}, \frac{d\mathcal{E}_2}{ds}, \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}$  находятся по схеме прогноз-коррекция. Расчеты показали, что такой метод дает сходящийся вычислительный процесс.

Метод СН-ЭВМ позволяет на рассматриваемых траекториях проверить достоверность различных аппроксимаций функционалов пластичности и различных вариантов теорий пластичности (например, теории пластичного течения, деформационной теории пластичности и др.). Для реализации метода СН-ЭВМ для заданного процесса деформирования выполняются расчеты по какому либо варианту теорий пластичности и расчетные результаты сравниваются с результатами экспериментов. Принятый вариант теории пластичности корректируется, чтобы расчеты давали результаты, подтверждаемые экспериментально. Если корректировка выбранной теории пластичности не позволяет согласовать расчетные результаты с экспериментальными, то данная теория является не достоверной на данном классе траекторий.

При выполнении экспериментов в пространстве напряжений процесс ведется по длине дуги  $\Sigma$  траектории напряжений. Тогда в расчетных уравнениях вместо производных по длине дуги траектории деформации  $s$  нужно вычислить производные по  $\Sigma$ . Расчетные уравнения примут вид

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{ds} = \frac{d\mathcal{E}_1}{d\Sigma} \frac{d\Sigma}{ds}, \quad \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} = \frac{d\mathcal{E}_2}{d\Sigma} \frac{d\Sigma}{ds}, \quad \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} = \frac{d\mathcal{E}_3}{d\Sigma} \frac{d\Sigma}{ds},$$

$$\begin{aligned}
N \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\vartheta_2}{d\Sigma} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\vartheta_3}{d\Sigma} &= \frac{dS_1}{d\Sigma} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma} \frac{ds}{d\Sigma}, \\
-\frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} + N \frac{d\vartheta_2}{d\Sigma} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\vartheta_3}{d\Sigma} &= \frac{dS_2}{d\Sigma} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma} \frac{ds}{d\Sigma}, \\
\frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\vartheta_2}{d\Sigma} + N \frac{d\vartheta_3}{d\Sigma} &= \frac{dS_3}{d\Sigma} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma} \frac{ds}{d\Sigma}, \\
\cos \vartheta_1 &= \frac{1}{\sigma} \left( S_1 \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} + S_2 \frac{d\vartheta_2}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\vartheta_3}{d\Sigma} \right) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{d\Sigma}},
\end{aligned}$$

где

$$\frac{ds}{d\Sigma} = \sqrt{\left(\frac{d\vartheta_1}{d\Sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta_2}{d\Sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta_3}{d\Sigma}\right)^2}.$$

Аналогично преобразуются уравнения при выборе другого произвольного параметра нагружения  $t$  (обобщенного времени).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А.А. Метод СН-ЭВМ в теории пластичности // Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. С. 166–178.
- [2] Ильюшин А.А. Об одной модели, поясняющей аппроксимационный метод СН-ЭВМ в теории пластичности // Упругость и неупругость. М.: Издательство МГУ, 1971, вып. 1. С. 52–58.
- [3] Васин Р.А., Давранов Ю., Шешенин С.В. Метод последовательных приближений для сложного нагружения в плоской задаче теории пластичности // Механика деформируемых сред. МГУ, 1985. С. 90–94.
- [4] Васин Р.А., Широков Р.И. Применение метода СН-ЭВМ к решению краевой задачи при простом нагружении. // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1983, № 70, С.130–135.
- [5] Бабамуратов К.Ш. Некоторые вопросы решения краевых задач пластичности при сложных многопараметрических нагружениях // Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 1984, № 73. С. 3–15.
- [6] Бабамуратов К.Ш., Ильюшин А.А., Кабулов В.К. Метод СН-ЭВМ и его приложения к задачам теории пластичности. Ташкент: ФАН, 1987, 288 с.
- [7] Донской Д.Е. Сходимость метода СН-ЭВМ для вырожденной краевой задачи // Пластичность и устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Калинин: КПИ, 1984. С. 47–51.
- [8] Кравчук А. С. Метод А. А. Ильюшина для расчета конструкций из материалов с функциональными определяющими соотношениями // Упругость и неупругость: Материалы Междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рожд. А. А. Ильюшина, Москва, 20–21 янв. 2011 г. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2011. С. 165–171.
- [9] Моссаковский П.А., Васин Р.А., Антонов Ф.К. Развитие метода СН-ЭВМ Ильюшина применительно к краевым задачам динамической прочности // Упругость и неупругость: Материалы Междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рожд. А. А. Ильюшина, Москва, 20–21 янв. 2011 г. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2011. С. 210–216.

[10] Субботин С.Л. Проблема сходимости метода СН-ЭВМ в численном эксперименте // Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении: сборник научных трудов. ТвГТУ. Тверь, 1998. С. 68-75.

[11] Адилов Ф.Ф., Абиров Р.А. Исследование сходимости метода СН-ЭВМ для траекторий в виде трехзвенных ломаных // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск, 2020. С. 238-240.

[12] Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.

[13] Субботин С. Л., Алексеев А. А. Конкретизация обобщения гипотезы компланарности для упругопластических процессов в трехмерном изображающем пространстве А. А. Ильюшина // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. №1 (51). С. 84–94.

[14] Субботин С. Л., Алексеев А. А. Определяющие соотношения теории упругопластических процессов для решения краевых задач при плоском напряженном состоянии // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. №2 (52). С. 23–31

S. L. Subbotin, A. A. Alekseev

**IMPLEMENTATION OF THE CL-COMPUTER METHOD IN THE  
CALCULATIONS OF ELASTIC-PLASTIC PROCESSES ON HELICAL  
TRAJECTORIES OF DEFORMATION OF CONSTANT CURVATURE AND  
TORSION**

*Tver State Technical University, Tver*

**Abstract.** The paper presents the implementation of the CL-computer (complex loading) method proposed by A.A. Ilyushin for solving boundary value problems in the calculations of elastoplastic deformation processes along the trajectories of constant curvature and torsion. The constitutive equations of the theory of elastic-plastic processes for determining the strain rates (derivatives along the length of the arc of the strain trajectory) are given.

**Keywords:** theory of elastoplastic processes, plasticity, plasticity functionals, boundary value problem, CL-computer method

**REFERENCES**

- [1] Ilyushin A. A. The CL-computer method in the theory of plasticity // Problems of Applied Mathematics and Mechanics. M.: Nauka, 1971. pp. 166-178. (in Russian)
- [2] Ilyushin A. A. On a model explaining the CL-computer approximation method in the theory of plasticity. // Elasticity and inelasticity. M.: Publishing House of Moscow State University, 1971, issue 1. pp. 52-58. (in Russian)
- [3] Vasin R.A., Davranov Yu., Sheshenin S.V. The method of successive approximations for complex loading in a plane problem of the theory of plasticity // Mechanics of deformable bodies. Moscow State University, 1985, pp. 90-94. (in Russian)
- [4] Vasin R.A., Shirov R.I. Application of the CL-computer method to the solution of a boundary value problem under proportional loading. // Issues of Computational and Applied Mathematics. Tashkent, 1983, No. 70, pp. 130-135. (in Russian)
- [5] Babamuratov K.Sh. Some questions of solving boundary value problems of plasticity under complex multi-parameter loading // Issues of Computational and Applied Mathematics, Tashkent, 1984, No. 73. pp. 3-15. (in Russian)
- [6] Babamuratov K. Sh., Ilyushin A. A., Kabulov V. K., The SN-EVM Method and Its Applications to Problems in the Theory of Plasticity. Tashkent: FAN, 1987, 288 p. (in Russian)
- [7] Donskoy D.E. Convergence of the CL-computer method for a degenerate boundary value problem // Plasticity and stability in the mechanics of a deformable solid bodies. Kalinin: KPI, 1984. pp. 47-51. (in Russian)
- [8] Kravchuk A. S. A. A. Ilyushin's method for calculating structures made of materials with functional determining ratios // Elasticity and inelasticity: Materials of the International Scientific Symposium on the Problems of mechanics of deformable bodies,

---

*Subbotin Sergey Lvovich* Doctor of Technical Sciences, Professor, Tver State Technical University, Tver

*Alekseev Andrey Alekseevich* Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver

dedicated to the 100th anniversary of the birth of A. A. Ilyushin, Moscow, January 20-21, 2011. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 2011. pp. 165-171. (in Russian)

[9] Mossakovsky P.A., Vasin R.A., Antonov F.K. Development of the Ilyushin CH-computer method in relation to boundary value problems of dynamic strength // Elasticity and inelasticity: Materials of the International Scientific Symposium on the Problems of mechanics of deformable bodies, dedicated to the 100th anniversary of the birth of A. A. Ilyushin, Moscow, January 20-21, 2011. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 2011. pp. 210-216. (in Russian)

[10] Subbotin S.L. The problem of convergence of the CL-computer method in a numerical experiment // Stability, plasticity, creep under complex loading: collection of scientific papers. TvSTU. Tver, 1998. pp. 68-75. (in Russian)

[11] Adilov F.F., Abirov R.A. Investigation of convergence of the CL-computer method for trajectories in the form of three-link polylines // Control theory and mathematical modeling: materials of the All-Russian conference with international participation dedicated to the memory of Professor N. V. Azbelev and Professor E. L. Tonkov. Izhevsk, 2020. pp. 238-240. (in Russian)

[12] Zubchaninov V.G. Mechanics of processes in plastic environments. Moscow: Fizmatlit, 2010, 352 p. (in Russian)

[13] Subbotin S. L., Alekseev A. A. Concretization of generalization of the coplanarity hypothesis for elastic-plastic processes in a three-dimensional space by A.A. Ilyushin // Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya. 2022. № 1 (51). pp. 84-94. (in Russian)

[14] Subbotin S. L., Alekseev A. A. Constitutive relations of the theory of elastoplastic processes for solving boundary problems under a plane stress state // Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya. 2022. № 2 (52). pp. 23-31. (in Russian)