

Д. К. Андрейченко¹, К. П. Андрейченко², Д. В. Мельничук¹

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДВЕСА

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Россия

Аннотация. Исследована устойчивость сферического гидродинамического подвеса с полным учетом зависимости профиля распределения скоростей жидкости от радиальной координаты в поддерживающем слое. Подвес с легким внутренним телом устойчив в большом диапазоне изменения относительного эксцентриситета, и при изменении перегрузок на величину порядка десятка ускорений свободного падения переходит из одного равновесного состояния в другое. Подвес с тяжелым внутренним телом неустойчив.

Ключевые слова: сферический гидродинамический подвес, вязкая несжимаемая жидкость, комбинированные динамические системы, частотный критерий устойчивости, краевые задачи.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.005

УДК: 532.516.5+531.36

Введение

Гидродинамические подвесы [1–3] представляют собой чувствительные элементы высокоперегрузочных гидродинамических гироскопов. Ранее при умеренных значениях колебательного числа Рейнольдса на основе метода осреднения профиля скорости жидкости по толщине поддерживающего слоя [4] был сделан вывод о том, что сферический гидродинамический подвес с «легким» внутренним телом устойчив в малой

© Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В., 2022

Андрейченко Дмитрий Константинович

e-mail: andreichenkodk@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Андрейченко Константин Петрович

e-mail: kp_andreichenko@renet.ru, доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия.

Мельничук Дмитрий Вадимович

e-mail: melnichukdv@sgu.ru, ассистент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Поступила 17.11.2022

окрестности центрального положения. В работе [2] строго показано, что цилиндрический гидродинамический подвес с легким внутренним телом достаточно быстро центрируется при возрастании колебательного числа Рейнольдса, и при возрастании внешней нагрузки остается устойчивым вплоть до значительных относительных эксцентриситетов. Экспериментальные данные [1] подтверждают эти эффекты для сферического гидродинамического подвеса. С учетом влияния кориолисовых сил инерции [5], их теоретическое объяснение требует детального компьютерного моделирования. Ставится задача исследования устойчивости абсолютно твердого сферического тела в сферическом гидродинамическом подвесе с полным учетом зависимости профиля распределения скоростей жидкости от радиальной координаты. Используется частотный критерий устойчивости комбинированных динамических систем [6, 7].

Модель гидродинамического подвеса

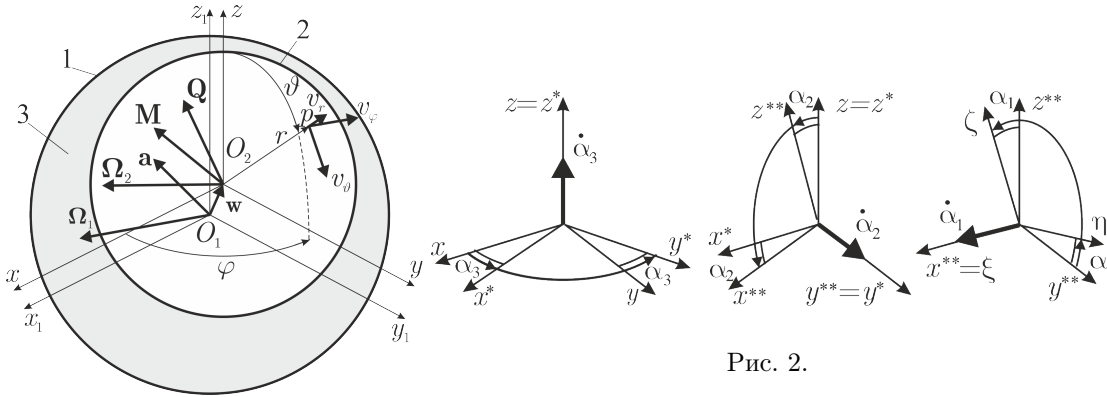


Рис. 1.

Рис. 2.

Внешняя недеформируемая сфера 1 радиуса R_1 (рис. 1) движется поступательно с абсолютным ускорением \mathbf{a} , заданным проекциями на оси связанной с центром O_1 сферы 1 поступательно движущейся (относительно некоторой инерциальной системы координат) системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и вращается (относительно $O_1x_1y_1z_1$) с абсолютной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_1$ [4]. Между внешней сферой 1 и внутренней недеформируемой сферой 2 (ротором) радиуса R_2 залит поддерживающий слой вязкой несжимаемой жидкости 3 который приводится в движение из-за движения сферы 1 и приводит в движение сферу 2. Свяжем с центром масс внутренней сферы O_2 систему координат O_2xyz , оси которой параллельны осям системы координат $O_1x_1y_1z_1$, т.е. $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$, $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$, $\mathbf{\Omega}_1 = (\Omega_{1x}, \Omega_{1y}, \Omega_{1z})^T$. Центр внутренней сферы получает смещение $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$, абсолютная угловая скорость вращения внутренней сферы суть $\mathbf{\Omega}_2$, p , $\mathbf{V} = \mathbf{\Omega}_1 \times \mathbf{r} + \mathbf{v}$ – давление в поддерживающем слое и скорость частиц жидкости относительно O_2xyz , $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)^T$ и $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ – соответственно сила и момент сил, действующих со стороны поддерживающего слоя на внутреннее тело. Поворот от некоторой декартовой системы координат (x, y, z) к декартовой системе координат (ξ, η, ζ) характеризуется набором углов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ в порядке $\alpha_3 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_1$ (рис. 2), и вспомогательные матрицы суть

$$\begin{aligned}
 A(\boldsymbol{\alpha}) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \\
 B(\boldsymbol{\alpha}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad B_1(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (1)$$

Система координат $O_1x_ky_kz_k$ жестко связана с внешним корпусом подвеса, а сфера 1 вращается относительно корпуса вокруг оси O_1x_k с угловой скоростью ω_1 . Углы $\boldsymbol{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})^T$ характеризует повороты от координатных осей $O_1x_1y_1z_1$ к координатным осям $O_1x_ky_kz_k$. Резалева система координат $O_2x_r y_r z_r$ связана с ротором. Ось O_2x_r является главной центральной осью с максимальным моментом инерции, и ротор вращается относительно $O_2x_r y_r z_r$ вокруг оси O_2x_r с угловой скоростью ω_2 . Углы $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, \alpha_{22}, \alpha_{23})^T$ характеризуют повороты от координатных осей $O_2x_ky_kz_k$ к осям $O_2x_r y_r z_r$. С декартовой системой координат O_2xyz связана сферическая система координат $(\xi, \vartheta, \varphi)$ с единичными направляющими векторами $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad r = R_2 + \xi, \quad \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^T \\
 \mathbf{e}_r &= (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T, \quad \mathbf{e}_\vartheta = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)^T
 \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть m, J_1, J_2 – масса и моменты инерции внутренней сферы (ротора), $J_1 > J_2$; $\mathbf{g} = \text{Const}$, $|\mathbf{g}| = g$ – ускорение свободного падения; k_{1a} и k_{2a} – коэффициенты демпфирования и упругой жесткости аксиального центрирующего устройства; ρ, ν – плотность жидкости и ее кинематическая вязкость. При приведении модельных уравнений к безразмерным переменным полагаем $\delta = R_1 - R_2$, $\beta = \delta/R_2 \ll 1$, $\xi = R_2\beta\xi^*$, $r = R_2r^*$, $r^* = 1 + \beta\xi^*$, $x = R_2x^*$, $y = R_2y^*$, $z = R_2z^*$, $h = \delta h^*$, $\omega_1 = \Omega_h\omega_1^*$, Ω_h – характерное значение угловой скорости вращения сферы 1 относительно корпуса подвеса; $t = t^*/\Omega_h$, $\rho_2 = m/(\frac{4}{3}\pi R_2^3)$, $\gamma = g/(R_2\Omega_h^2)$ – характеризует нагруженность подвеса, $\mathbf{w} = \delta\mathbf{w}^*$, $\mathbf{g} = g\mathbf{g}^*$, $\mathbf{g}^* = \text{Const}$, $|\mathbf{g}^*| = 1$, $\mathbf{a} = g\mathbf{a}^*$, $\omega_2 = \Omega_h\omega_2^*$, $\boldsymbol{\Omega}_1 = \Omega_h\boldsymbol{\Omega}_1^*$, $\boldsymbol{\Omega}_2 = \Omega_h\boldsymbol{\Omega}_2^*$, $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)^T = \boldsymbol{\Omega}_1 - \boldsymbol{\Omega}_2 = \Omega_h\boldsymbol{\Omega}^*$ – угловая скорость «скольжения» внутренней сферы, $v_\vartheta = \Omega_h R_2 v_\vartheta^*$, $v_\varphi = \Omega_h R_2 v_\varphi^*$, $v_r = \beta\Omega_h R_2 v_r^*$, $\mathbf{v}^* = \beta v_r^* \mathbf{e}_r + v_\vartheta^* \mathbf{e}_\vartheta + v_\varphi^* \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{v} = \Omega_h R_2 \mathbf{v}^*$, $p = \rho\Omega_h^2 R_2^2 p^*$, $J_{1,2} = mR_2^2 J_{1,2}^*$, $\sigma = \Omega_h \delta^2/\nu$ – колебательное число Рейнольдса, $\mathbf{Q} = \rho R_2^4 \Omega_h^2 \mathbf{Q}^*$, $\mathbf{M} = \rho\nu R_2^4 \Omega_h \mathbf{M}^*/\delta$, $k_{1a}^* = k_{1a}/(\rho R_2^4 \Omega_h)$, $k_{2a}^* = k_{2a}/(\rho R_2^4 \Omega_h^2)$. Далее символ $(\cdot)^*$ над безразмерными переменными опущен. Начальные значения $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}|_{t=0}$, $\omega_1^{(0)} = \omega_1|_{t=0}$, $\alpha_1^{(0)} = \alpha_1|_{t=0}$ соответствуют равновесному состоянию, и

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \mathbf{a}_0 + \mu\mathbf{a}_1(t), \quad \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} + \mu\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}(t), \quad \omega_1 = \omega_1^{(0)} + \mu\omega_1^{(1)}(t), \quad \boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} + \mu\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \\
 \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} &= \omega_1^{(0)} \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}), \quad \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} = B_1(\boldsymbol{\alpha}_1)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^{(1)} + \omega_1^{(1)} \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1) + \omega_1^{(0)} \mathbf{f}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}) \\
 \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}) &= A(\boldsymbol{\alpha})(1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{f}_a(\boldsymbol{\alpha}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(1)}) = \frac{1}{\mu}[\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}^{(0)} + \mu\boldsymbol{\alpha}^{(1)}) - \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}^{(0)})], \quad (\dot{\cdot}) = d(\cdot)/dt
 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь μ характеризует амплитуду изменения входного возмущения. Уравнения движения в безразмерных переменных следуют из [8] в пренебрежении сжимаемостью жидкости и некоторыми малыми порядков β^2 и после редукции давления имеют вид

$$\begin{aligned}
 \beta(\rho_2/\rho - 1)\ddot{\mathbf{w}} &= \gamma(\rho_2/\rho - 1)(\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \frac{3}{4\pi}\mathbf{Q} - ((k_{1a}\dot{\mathbf{w}} + k_{2a}\mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1))\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1) \\
 \frac{\rho_2}{\rho}(J\dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 + \boldsymbol{\omega}^{(r)} \times J\boldsymbol{\Omega}_2) &= \frac{3}{4\pi}\frac{\beta}{\sigma}A^T(\boldsymbol{\alpha}_2)A^T(\boldsymbol{\alpha}_1)\mathbf{M}, \quad J = \text{diag}(J_1, J_2, J_2) \\
 \boldsymbol{\Omega}_2 &= (\omega_2, 0, 0)^T + \boldsymbol{\omega}^{(r)}, \quad \boldsymbol{\omega}^{(r)} = B(\boldsymbol{\alpha}_2)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \mu_1 A^T(\boldsymbol{\alpha}_2)B(\boldsymbol{\alpha}_1)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^{(1)}
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} h &= \beta^{-1} \{ [(1 + \beta)^2 + \beta^2 ((\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_r)^2 - \mathbf{w}^2)]^{1/2} - 1 \} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_r \\ \boldsymbol{\Omega} &= \omega_1 \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1) - A(\boldsymbol{\alpha}_1) [B_1(\boldsymbol{\alpha}_2) \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \omega_2 \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2)] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \beta v_r \mathbf{e}_r + \mathbf{v}_{\parallel}, \quad \mathbf{v}_{\parallel} = v_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + v_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_r = -(1 + \beta \xi)^{-2} \nabla^{(s)} \cdot \int_0^{\xi} (1 + \beta \xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi \\ \nabla^{(s)} \cdot \Phi[\mathbf{v}_{\parallel}] &= 0, \quad \Phi[\mathbf{v}_{\parallel}] = \int_0^h (1 + \beta \xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi + \frac{1}{2} (1 + \beta h)^2 [\dot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{w}] \\ \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial t} &= -\frac{1}{1 + \beta \xi} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_{\vartheta}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \xi} \right) + \mathcal{F}_{\vartheta}[\mathbf{v}] \\ \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial t} &= -\frac{1}{1 + \beta \xi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \xi} \right) + \mathcal{F}_{\varphi}[\mathbf{v}] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{v}] &= \mathcal{F}_r[\mathbf{v}] \mathbf{e}_r + \mathcal{F}_{\vartheta}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\vartheta} + \mathcal{F}_{\varphi}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\varphi} = -\mu (1 + \beta \xi) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1^{(1)} \times \mathbf{e}_r - \\ &- \nabla^{(s)} (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}) - v_r \partial \mathbf{v} / \partial \xi - \beta v_r \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}_1 \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) + \\ &+ (1 - \beta \xi) [(\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) - \frac{1}{2} \nabla^{(s)} (v_{\vartheta}^2 + v_{\varphi}^2)] + \frac{\beta^2}{\sigma} [\nabla^{(s)} (\nabla^{(s)} \cdot \mathbf{v}) - \\ &- \mathbf{e}_r \times \nabla^{(s)} (\nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}))] - \frac{\beta}{1 + \beta \xi} \nabla^{(s)} \int_0^{\xi} W d\xi, \quad W = v_{\vartheta}^2 + v_{\varphi}^2 - 2\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{\vartheta}|_{\xi=0} &= -\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_{\vartheta}|_{\xi=h(\vartheta, \varphi, t)} = -\beta [\dot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{w}] \cdot \mathbf{e}_{\vartheta} \\ v_{\varphi}|_{\xi=0} &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{\vartheta}, \quad v_{\varphi}|_{\xi=h(\vartheta, \varphi, t)} = -\beta [\dot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{w}] \cdot \mathbf{e}_{\varphi} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\beta \sigma^{-1} (\mathbf{e}_{\vartheta} (\partial v_{\vartheta} / \partial \xi)|_{\xi=0} + \mathbf{e}_{\varphi} (\partial v_{\varphi} / \partial \xi)|_{\xi=0}) - p|_{\xi=0} \mathbf{e}_r \right] \\ \mathbf{M} &= \frac{8}{3} \pi \beta \boldsymbol{\Omega} + \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\mathbf{e}_{\varphi} (\partial v_{\vartheta} / \partial \xi)|_{\xi=0} - \mathbf{e}_{\vartheta} (\partial v_{\varphi} / \partial \xi)|_{\xi=0} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

В качестве начальных условий для (4) и (6) задаются $\mathbf{w}|_{t=0}$, $\dot{\mathbf{w}}|_{t=0}$, $\omega_2|_{t=0}$, $\alpha_{22}|_{t=0}$, $\dot{\alpha}_{22}|_{t=0}$, $\alpha_{32}|_{t=0}$, $\dot{\alpha}_{32}|_{t=0}$, $v_{\vartheta}|_{t=0}$, $v_{\varphi}|_{t=0}$. Для скалярного $f = f(\xi, \vartheta, \varphi)$ и векторного $\mathbf{F} = F_r(\xi, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_r + F_{\vartheta}(\xi, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_{\vartheta} + F_{\varphi}(\xi, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_{\varphi}$ полей

$$\nabla^{(s)} f = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_{\varphi}, \quad \nabla^{(s)} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_{\vartheta} \sin \vartheta) + \frac{\partial F_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \quad (9)$$

Моделльные уравнения (4), (6)-(8) представляют собой связанную посредством граничных условий (7) и условий связи (8) систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4) динамики абсолютно твердого тела и уравнений в частных производных (6) – уравнения несжимаемости, уравнения баланса расхода жидкости и укороченных уравнений Навье-Стокса, т.е. комбинированную динамическую систему (КДС) [6]. Функции $\mathbf{a}_1(t)$, $\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}(t)$, $\omega_1^{(1)}(t)$ являются входными, а функции $\mathbf{w}(t)$, $\boldsymbol{\alpha}_2(t)$, $\omega_2(t)$ – выходными. При неограниченном возрастании угловой скорости вращения подвеса, т.е. $\sigma \rightarrow \infty$, безразмерный параметр $\chi = (\rho_2/\rho - 1)\gamma\sigma^{-2} = \text{const} = \underline{\underline{Q}}(1)$.

В равновесном состоянии величины $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0$, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^{(0)}$, $h = h_0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, $p = p_0$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ являются решением нелинейных краевых задач, которые следуют из (1)-(9) при $\mathbf{a}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)} = \omega_1^{(1)} = 0$, $(\dot{\quad}) = 0$, $\partial(\quad)/\partial t = 0$. Их асимптотическим интегрированием в [9] показано, что при поперечных нагрузках с ростом колебательного числа Рейнольдса σ подвес быстро центрируется. При $\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} = (0, -\frac{1}{2}\pi, 0)^T$, $\mathbf{g} = (0, -1, 0)^T$, $\mathbf{a}_0 = (a_{0x}, a_{0y}, 0)^T$, $\omega_1^{(0)} = 1$, $\mathbf{w}_0 = -\frac{20}{9} (1 - \frac{20}{9}\beta) \chi (a_{0x}, 1 + a_{0y}, 0)^T \sigma^{-2} + \bar{o}(\sigma^{-2})$, $\sigma \rightarrow \infty$, что согласуется с результатами численного моделирования в [10].

Моделирование устойчивости

При выводе линейных уравнений возмущенного движения полагаем $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mu \mathbf{w}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2^{(0)} + \mu \boldsymbol{\alpha}_2^{(1)}$, $\omega_2 = \omega_2^{(0)} + \mu \omega_2^{(1)}$, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^{(0)} + \mu \boldsymbol{\Omega}^{(1)}$, $h = h_0 + \mu h_1$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mu \mathbf{v}^{(1)}$, $p = p^{(0)} + \mu p^{(1)}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mu \mathbf{Q}_1$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mu \mathbf{M}_1$, $\mu \rightarrow 0$. Величины \mathbf{w}_1 , $\boldsymbol{\alpha}_2^{(1)}$, $\omega_2^{(1)}$, $\boldsymbol{\Omega}^{(1)}$, h_1 ,

$\mathbf{v}^{(1)}, p^{(1)}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{M}_1$ являются решением следующей системы линейных уравнений (на подвижной границе выполняется снесение граничных условий на невозмущенную стенку [11]), которая после преобразования Лапласа по времени $f(t) \rightarrow \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$ принимает вид (символ $\tilde{}$ над изображениями Лапласа далее опущен)

$$\begin{aligned}
 & \beta(\rho_2/\rho - 1)\lambda^2 \mathbf{w} = -\gamma(\rho_2/\rho - 1)\mathbf{a}_1 + \frac{3}{4\pi} \mathbf{Q} - ((k_{1a}\lambda + k_{2a})\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}))\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}) - \\
 & - k_{2a} [((\partial \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}) \cdot \mathbf{w}_0] \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}) + (\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}))(\partial \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}] \\
 & \frac{\rho_2}{\rho} (J\lambda \boldsymbol{\Omega}_2 + \boldsymbol{\omega}^{(r)} \times J(\omega_2^{(0)}, 0,)^T) = \frac{3}{4\pi} \frac{\beta}{\sigma} A^T(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}) A^T(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}) \mathbf{M} \\
 & \boldsymbol{\Omega}_2 = (\omega_2, 0, 0)^T + \boldsymbol{\omega}^{(r)}, \quad \boldsymbol{\omega}^{(r)} = \lambda [B(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})\boldsymbol{\alpha}_2 + A^T(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})B(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}] \\
 & \boldsymbol{\Omega} = \omega_1^{(1)} \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}) - A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})[\omega_2 \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}) + [B_1(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})\lambda + \omega_2^{(0)}(\partial \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})/\partial \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_2] + \\
 & + \omega_1^{(0)}(\partial \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)} - \omega_2^{(0)} \left[\sum_{j=1}^3 (\partial A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial \alpha_j) \alpha_{1j} \right] \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 & h = -\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_r + \beta[(1 + \beta)^2 + \beta^2((\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{e}_r)^2 - \mathbf{w}_0^2)]^{-1/2} [(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{e}_r)(\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_r) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_0] \\
 & \mathbf{v} = \beta v_r \mathbf{e}_r + \mathbf{v}_{\parallel}, \quad \mathbf{v}_{\parallel} = v_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + v_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_r = -(1 + \beta\xi)^{-2} \nabla^{(s)} \cdot \int_0^{\xi} (1 + \beta\xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi \\
 & \boldsymbol{\Phi}^{(L)}[\mathbf{v}_{\parallel}] = \int_0^{h_0} (1 + \beta\xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi + \frac{1}{2} (1 + \beta h_0)^2 (\lambda \mathbf{w} - \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{w} - \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{w}^{(0)}) \\
 & \nabla^{(s)} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{(L)}[\mathbf{v}_{\parallel}] = 0, \quad \lambda v_{\vartheta} = -\frac{1}{1 + \beta\xi} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_{\vartheta}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \xi} \right) + \mathcal{F}_{\vartheta}^{(L)}[\mathbf{v}] \\
 & \lambda v_{\varphi} = -\frac{1}{1 + \beta\xi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \xi} \right) + \mathcal{F}_{\varphi}^{(L)}[\mathbf{v}] \\
 & \mathcal{F}^{(L)}[\mathbf{v}] = \mathcal{F}_r^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_r + \mathcal{F}_{\vartheta}^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\vartheta} + \mathcal{F}_{\varphi}^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\varphi} = \mathbf{F}^{(L)}[\mathbf{v}] - \lambda(1 + \beta\xi) \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{e}_r - \\
 & - \nabla^{(s)}(\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}^{(0)}) - 2\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{v}^{(0)} + \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}^{(0)}) + \\
 & + 2\beta(1 + \beta\xi)^{-1} \nabla^{(s)} \int_0^{\xi} \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_r d\xi \\
 & \mathbf{F}^{(L)}[\mathbf{v}] = F_r^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_r + F_{\vartheta}^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\vartheta} + F_{\varphi}^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\varphi} = \nabla^{(s)}(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) - v_r^{(0)} \partial \mathbf{v} / \partial \xi - \\
 & - v_r \partial \mathbf{v}^{(0)} / \partial \xi - \beta v_r^{(0)} \mathbf{v} - \beta v_r \mathbf{v}^{(0)} - 2\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) + \\
 & + (1 - \beta\xi) [(\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}^{(0)}) \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) + (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}^{(0)}) - \\
 & - \nabla^{(s)}(v_{\vartheta}^{(0)} v_{\vartheta} + v_{\varphi}^{(0)} v_{\varphi})] + \frac{\beta^2}{\sigma} [\nabla^{(s)}(\nabla^{(s)} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{e}_r \times \nabla^{(s)}(\nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}))] - \\
 & - \beta(1 + \beta\xi)^{-1} \nabla^{(s)} \int_0^{\xi} W^{(L)} d\xi, \quad W^{(L)} = 2(v_{\vartheta}^{(0)} v_{\vartheta} + v_{\varphi}^{(0)} v_{\varphi} - \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) \\
 & v_{\vartheta}|_{\xi=0} = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_{\varphi}|_{\xi=0} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{\vartheta} \\
 & v_{\vartheta}|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} = \beta(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{w} + \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{w}_0 - \lambda \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_{\vartheta} - h(\partial v_{\vartheta}^{(0)} / \partial \xi) \Big|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} \\
 & v_{\varphi}|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} = \beta(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{w} + \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{w}_0 - \lambda \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_{\varphi} - h(\partial v_{\varphi}^{(0)} / \partial \xi) \Big|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} \\
 & \mathbf{Q} = \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\beta \sigma^{-1} (\mathbf{e}_{\vartheta}(\partial v_{\vartheta} / \partial \xi)|_{\xi=0} + \mathbf{e}_{\varphi}(\partial v_{\varphi} / \partial \xi)|_{\xi=0}) - p|_{\xi=0} \mathbf{e}_r \right] \\
 & \mathbf{M} = \frac{8}{3} \pi \beta \boldsymbol{\Omega} + \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\mathbf{e}_{\varphi}(\partial v_{\vartheta} / \partial \xi)|_{\xi=0} - \mathbf{e}_{\vartheta}(\partial v_{\varphi} / \partial \xi)|_{\xi=0} \right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично [6], представим изображение реакций поддерживающего слоя в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= Q^{(\Omega, 1)}(\lambda) \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} + Q^{(w)}(\lambda) \mathbf{w} + Q^{(\Omega)}(\lambda) \boldsymbol{\Omega} \\
 \mathbf{M} &= M^{(\Omega, 1)}(\lambda) \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} + M^{(w)}(\lambda) \mathbf{w} + M^{(\Omega)}(\lambda) \boldsymbol{\Omega}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Подстановка (12) в (10) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно изображений Лапласа возмущений выходных функций $\mathbf{w}(\lambda), \boldsymbol{\alpha}_2(\lambda), \omega_2(\lambda)$, позволяющей линейно выразить их через изображения Лапласа возмущений входных функций $\mathbf{a}_1(\lambda), \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}(\lambda), \omega_1^{(1)}(\lambda)$, т.е. найти передаточные функции. Ее определитель $D(\lambda)$, т.е. характеристический квазимногочлен КДС [2, 6, 7], имеет вид

$$\begin{aligned}
D(\lambda) &= \begin{vmatrix} B_{ww}(\lambda) & B_{w\alpha}(\lambda) \\ B_{\alpha w}(\lambda) & B_{\alpha\alpha}(\lambda) \end{vmatrix} \\
B_{ww}(\lambda) &= \beta(\rho_2/\rho - 1)\lambda^2 \text{diag}(1, 1, 1) + (k_{1a}\lambda + k_{2a})B^{(1)} - 3Q^{(w)}(\lambda)/(4\pi) \\
B_{w\alpha}(\lambda) &= 3Q^{(\Omega)}(\lambda)A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})B^{(3)}(\lambda)/(4\pi) \\
B_{\alpha w}(\lambda) &= -3\beta A^T(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})A^T(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})M^{(w)}(\lambda)/(4\pi\sigma) \\
B_{\alpha\alpha}(\lambda) &= \frac{\rho_2}{\rho}[J_1\lambda \text{diag}(1, 0, 0) + (J\lambda^2 + J_1\omega_2^{(0)}B^{(2)}\lambda)B(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}) \text{diag}(0, 1, 1)] + \\
&+ 3\beta A^T(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})A^T(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})M^{(\Omega)}(\lambda)A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})B^{(3)}(\lambda)/(4\pi\sigma) \\
B^{(1)} &= \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})[\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})]^T; B^{(2)} = [b_{kj}^{(2)}], b_{kj}^{(2)} = \delta_k^2\delta_j^3 - \delta_k^3\delta_j^2, k, j = 1, 2, 3 \\
B^{(3)}(\lambda) &= A(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}) \text{diag}(1, 0, 0) + (\lambda B_1(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}) + \omega_2^{(0)}\partial\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})/\partial\alpha) \text{diag}(0, 1, 1)
\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть $\mathbf{e}_1^{(3)} = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2^{(3)} = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_3^{(3)} = (0, 0, 1)^T$. Столбцы входящих в выражение (13) для характеристического квазимногочлена КДС матриц $Q^{(w)}(\lambda)$, $Q^{(\Omega)}(\lambda)$, $M^{(w)}(\lambda)$, $M^{(\Omega)}(\lambda)$ находятся решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}
h &= [\beta((1 + \beta)^2 + \beta^2((\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{e}_r)^2 - \mathbf{w}_0^2))^{-1/2}[(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \mathbf{w}_0] - \mathbf{e}_r] \cdot \mathbf{e}_j^{(3)} \\
\mathbf{v} &= \beta v_r \mathbf{e}_r + \mathbf{v}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel} = v_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + v_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}, v_r = -(1 + \beta\xi)^{-2} \nabla^{(s)} \cdot \int_0^{\xi} (1 + \beta\xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi \\
\Phi^{(\mathcal{L})}[\mathbf{v}_{\parallel}] &= \int_0^{h_0} (1 + \beta\xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi + \{\frac{1}{2}(1 + \beta h_0)^2 (\lambda \mathbf{e}_j^{(3)} - \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{e}_j^{(3)}), 0\} \\
\nabla^{(s)} \cdot \Phi^{(\mathcal{L})}[\mathbf{v}_{\parallel}] &= 0, \lambda v_{\vartheta} = -\frac{1}{1 + \beta\xi} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_{\vartheta}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \xi} \right) + F_{\vartheta}^{(L)}[\mathbf{v}] \\
\lambda v_{\varphi} &= -\frac{1}{1 + \beta\xi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \xi} \right) + F_{\varphi}^{(L)}[\mathbf{v}] \\
v_{\vartheta}|_{\xi=0} &= \{0, -\mathbf{e}_j^{(3)} \cdot \mathbf{e}_{\varphi}\}, v_{\varphi}|_{\xi=0} = \{0, \mathbf{e}_j^{(3)} \cdot \mathbf{e}_{\vartheta}\} \\
v_{\vartheta}|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} &= \{\beta(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{e}_j^{(3)} - \lambda \mathbf{e}_j^{(3)}) \cdot \mathbf{e}_{\vartheta} - h(\partial v_{\vartheta}^{(0)}/\partial \xi)|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)}, 0\} \\
v_{\varphi}|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} &= \{\beta(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{e}_j^{(3)} - \lambda \mathbf{e}_j^{(3)}) \cdot \mathbf{e}_{\varphi} - h(\partial v_{\varphi}^{(0)}/\partial \xi)|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)}, 0\} \\
\{Q^{(w)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)}, Q^{(\Omega)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)}\} &= \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi [\beta\sigma^{-1}(\mathbf{e}_{\vartheta}(\partial v_{\vartheta}/\partial \xi)|_{\xi=0} + \\
&+ \mathbf{e}_{\varphi}(\partial v_{\varphi}/\partial \xi)|_{\xi=0}) - p|_{\xi=0} \mathbf{e}_r], \{M^{(w)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)}, M^{(\Omega)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)}\} = \{0, \frac{8}{3}\pi\beta \mathbf{e}_j^{(3)}\} + \\
&+ \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi [\mathbf{e}_{\varphi}(\partial v_{\vartheta}/\partial \xi)|_{\xi=0} - \mathbf{e}_{\vartheta}(\partial v_{\varphi}/\partial \xi)|_{\xi=0}], j = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{14}$$

Как следует из результатов [11], при $|\lambda| \gg 1$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$ элементы матриц $Q^{(w)}(\lambda)$, $Q^{(\Omega)}(\lambda)$, $M^{(w)}(\lambda)$, $M^{(\Omega)}(\lambda)$ являются аналитическими функциями. При $\lambda \rightarrow \infty$, $\text{Re } \lambda > -\infty$ выполнялось асимптотическое интегрирование линейной краевой задачи (14) на основе метода сращиваемых разложений. В результате найдено

$$\begin{aligned}
Q^{(w)}\mathbf{e}_j^{(3)} &= -\lambda \mathbf{Q}^{(j)} + \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{Q}^{(j)}, \mathbf{Q}^{(j)}(\lambda) = \mathbf{A}_0^{(j)}\lambda + \mathbf{A}_1^{(j)}\lambda^{1/2} + \mathbf{A}_2^{(j)} + \underline{Q}(\lambda^{-1/2}), \\
j = 1, 2, 3, M^{(w)}(\lambda) &= \underline{Q}(\lambda^{1/2}), Q^{(\Omega)}(\lambda) = \underline{Q}(\lambda^{-1/2}), M^{(\Omega)}(\lambda) = \frac{8}{3}\pi[(\sigma\lambda)^{1/2} + \\
&+ 2\beta] \text{diag}(1, 1, 1) + \underline{Q}(\lambda^{-1/2}), \mathbf{A}_0^{(j)} = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta p_0^{(e)} \mathbf{e}_r, \mathbf{A}_1^{(j)} = \\
&= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta (p_1^{(e)} + 2\beta\sigma^{-1/2}p_0^{(e)}) \mathbf{e}_r, \mathbf{A}_2^{(j)} = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta (p_2^{(e)} + \\
&+ 2\beta\sigma^{-1/2}p_1^{(e)}) \mathbf{e}_r, \nabla^{(s)} \cdot [h_0 \nabla^{(s)} p_0^{(e)} + \frac{1}{2}(1 + \beta h_0)^2 \mathbf{e}_j^{(3)}] = 0 \\
\nabla^{(s)} \cdot [h_0 \nabla^{(s)} p_1^{(e)} - \beta\sigma^{-1/2}(1 + \beta h_0) \mathbf{e}_j^{(3)} - 2\sigma^{-1/2} \nabla^{(s)} p_0^{(e)}] &= 0 \\
\nabla^{(s)} \cdot [h_0 \nabla^{(s)} p_2^{(e)} + \mathbf{f} - 2\sigma^{-1/2} \nabla^{(s)} p_1^{(e)} - \beta\sigma^{-1} \nabla^{(s)} p_0^{(e)}] &= 0, p_{0,1,2}^{(e)} = p_{0,1,2}^{(e)}(\vartheta, \varphi) \\
\mathbf{f} &= -(h_0 + \beta h_0^2) \nabla^{(s)}(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{e}_r \cdot \nabla^{(s)} p_0^{(e)}) + \beta h_0 \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times (h_0 \mathbf{e}_r + \mathbf{w}_0) \Lambda p_0^{(e)} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2h_0\Omega_1^{(0)} \times \nabla^{(s)} p_0^{(e)} - \frac{1}{2}[(1 + \beta h_0)\Omega_1^{(0)} \times \mathbf{e}_r \cdot \nabla^{(s)} h_0 - \Omega_1^{(0)} \times \mathbf{w}_0((1 + \beta h_0)\mathbf{e}_r - \\
 & - \beta \nabla^{(s)} h_0)](\beta \mathbf{e}_j^{(3)} + \nabla^{(s)} p_0^{(e)}) - \beta \int_0^{h_0} d\xi \nabla^{(s)} \int_0^\xi d\xi \nabla^{(s)} p_0^{(e)} \cdot \mathbf{v}^{(0)} - \\
 & - \Lambda p_0^{(e)} \int_0^{h_0} d\xi (1 - 3\beta\xi) \mathbf{v}^{(0)} - \int_0^{h_0} d\xi (1 - \beta\xi) \nabla^{(s)} (\nabla^{(s)} p_0^{(e)} \cdot \mathbf{v}^{(0)}) + \\
 & + (\mathbf{e}_r \times \nabla^{(s)} p_0^{(e)}) \int_0^{h_0} d\xi (1 - \beta\xi) \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}^{(0)}), \quad \Lambda() = \nabla^{(s)} \cdot \nabla^{(s)}()
 \end{aligned} \tag{15}$$

Из (13), (17) следует

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-11} D(\lambda) = \beta^3 (\rho_2/\rho - 1)^3 (\rho_2/\rho)^3 J_1 J_2^2 \cos \alpha_{22}^{(0)}, \quad \text{Re } \lambda > -\infty$$

Аналогично [7, 12], аналитичность $Q^{(w)}(\lambda)$, $Q^{(\Omega)}(\lambda)$, $M^{(w)}(\lambda)$, $M^{(\Omega)}(\lambda)$ при умеренных λ проверяется численно на основе принципа аргумента. При выполнении данного условия подвес асимптотически устойчив, если [6, 7, 12]

$$\Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega) = \frac{11}{2} \pi \tag{16}$$

Проекционный метод

Численное интегрирование модельных краевых задач выполнялось на основе проекционного метода Галеркина [13]. После отображения области, занимаемой поддерживающим слоем, на параллелепипед $[0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ посредством перехода к новой независимой координате $x = \xi/h \in [0, 1]$ уравнения (6)-(8) принимают вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \beta v_r \mathbf{e}_r + \mathbf{v}_{\parallel}, \quad \mathbf{v}_{\parallel} = v_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + v_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_r = x(1 + \beta hx)^{-1} \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \nabla^{(s)} h - \\
 & - (1 + \beta hx)^{-2} \int_0^x \nabla^{(s)} \cdot (h(1 + \beta hx) \mathbf{v}_{\parallel}) dx, \quad \nabla^{(s)} \cdot \Phi[\mathbf{v}_{\parallel}] = 0 \\
 \Phi[\mathbf{v}_{\parallel}] &= h \int_0^1 (1 + \beta hx) \mathbf{v}_{\parallel} dx + \frac{1}{2} (1 + \beta h)^2 (\dot{\mathbf{w}} - \Omega_1 \times \mathbf{w}) \\
 \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial t} &= \Psi_{\vartheta}[\mathbf{v}, p] = \frac{\dot{h}}{h} x \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial x} - \frac{1}{1 + \beta hx} \frac{\partial p|_{x=0}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_{\vartheta}}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{h} \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial x} \right) + \mathcal{F}_{\vartheta}[\mathbf{v}] \\
 \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial t} &= \Psi_{\varphi}[\mathbf{v}, p] = \frac{\dot{h}}{h} x \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{1 + \beta hx} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p|_{x=0}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{h} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial x} \right) + \\
 & + \mathcal{F}_{\varphi}[\mathbf{v}], \quad \mathcal{F}[\mathbf{v}] = -\mu_1 (1 + \beta hx) \dot{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{e}_r + \nabla^{(s\xi)} (\Omega_1 \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) - h^{-1} v_r \partial \mathbf{v} / \partial x - \\
 & - \beta v_r \mathbf{v} - 2\Omega_1 \times \mathbf{v} + \Omega_1 \nabla^{(s\xi)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) + (1 - \beta hx) [(\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) \nabla^{(s\xi)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) - \\
 & - \frac{1}{2} \nabla^{(s\xi)} (v_{\vartheta}^2 + v_{\varphi}^2)] + \beta^2 [\nabla^{(s\xi)} (\nabla^{(s\xi)} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{e}_r \times \nabla^{(s\xi)} (\nabla^{(s\xi)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}))] / \sigma - \\
 & - \beta h (1 + \beta hx)^{-1} [\nabla^{(s)} (h \int_0^x W dx) - x W \nabla^{(s)} h], \quad W = v_{\vartheta}^2 + v_{\varphi}^2 - 2\Omega_1 \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r \\
 v_{\vartheta}|_{x=0} &= -\Omega \cdot \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_{\vartheta}|_{x=1} = -\beta (\dot{\mathbf{w}} - \Omega_1 \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_{\vartheta}, \quad v_{\varphi}|_{x=0} = \Omega \cdot \mathbf{e}_{\vartheta} \\
 v_{\varphi}|_{x=1} &= -\beta (\dot{\mathbf{w}} - \Omega_1 \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_{\varphi}; \quad \nabla^{(s\xi)} = \nabla^{(s)} - (h^{-1} \nabla^{(s)} h) x \partial / \partial x
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi [\beta \sigma^{-1} h^{-1} (\mathbf{e}_{\vartheta} (\partial v_{\vartheta} / \partial x)|_{x=0} + \mathbf{e}_{\varphi} (\partial v_{\varphi} / \partial x)|_{x=0}) - p|_{x=0} \mathbf{e}_r] \\
 \mathbf{M} &= \frac{8}{3} \pi \beta \Omega + \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi h^{-1} [\mathbf{e}_{\varphi} (\partial v_{\vartheta} / \partial x)|_{x=0} - \mathbf{e}_{\vartheta} (\partial v_{\varphi} / \partial x)|_{x=0}] / h
 \end{aligned} \tag{18}$$

Дискретизация начально-краевой задачи (14) по независимым пространственным переменным выполнялась на основе проекционного метода Галеркина с использованием представлений

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{\parallel} &= \nabla^{(s)} U - \mathbf{e}_r \times \nabla^{(s)} V, \quad p|_{x=0} = \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=-k}^k p_{km}(t) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) \\
 U(x, \vartheta, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{N_1+2} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=-k}^k U_{nkm}(t) T_n(2x-1) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) \\
 V(x, \vartheta, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{N_1+2} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=-k}^k V_{nkm}(t) T_n(2x-1) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad N_1 \geq \frac{7}{2} \sigma^{1/4} \\
 T_n(z) &= \cos(n \arccos z), \quad s_{km} = 2\pi (1 + \delta_m^0) (k+m)! [(2k+1)(k-m)!]^{-1} \\
 Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) &= s_{km}^{-1/2} P_k^{(m)}(\cos \vartheta) \cos m\varphi, \quad m = \overline{0, k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\
 Y_k^{(-m)}(\vartheta, \varphi) &= s_{km}^{-1/2} P_k^{(m)}(\cos \vartheta) \sin m\varphi, \quad m = \overline{1, k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$P_k^{(m)}(z) = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_k(z)}{dz^m}, \quad P_k(z) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dz^k} (1 - z^2)^k, \quad N_2 \geq [3\sigma/(4\beta^2)]^{1/3}$$

Дискретизованные аналоги уравнений баланса расхода жидкости, Навье-Стокса и граничных условий (17) принимают вид

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \Phi[\mathbf{v}_\parallel] \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} = 0, \quad k = \overline{1, N_2}, \quad m = \overline{-k, k} \\ & \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx T_n(2x - 1) (\partial \mathbf{v}_\parallel / \partial t - \Psi[\mathbf{v}, p]) \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} \equiv \\ & \equiv \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{N_1+2} A_{nl}^{(0)} \dot{U}_{lkm} - \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx T_n(2x - 1) \Psi[\mathbf{v}, p] \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} = 0 \\ & \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx T_n(2x - 1) \mathbf{e}_r \times (\partial \mathbf{v}_\parallel / \partial t - \Psi[\mathbf{v}, p]) \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} \equiv \\ & \equiv \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{N_1+2} A_{nl}^{(0)} \dot{V}_{lkm} - \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx T_n(2x - 1) \mathbf{e}_r \times \Psi[\mathbf{v}, p] \cdot \\ & \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} = 0, \quad \Psi[\mathbf{v}, p] = \Psi_\vartheta[\mathbf{v}, p] \mathbf{e}_\vartheta + \Psi_\varphi[\mathbf{v}, p] \mathbf{e}_\varphi, \quad n = \overline{0, N_1}, \quad k = \overline{1, N_2}, \\ & m = \overline{-k, k}; \quad \sum_{n=0}^{N_1+2} (-1)^n U_{nkm} = 0, \quad \sum_{n=0}^{N_1+2} U_{nkm} = \beta S_{km}^{(r)}, \quad k = \overline{1, N_2}, \quad m = \overline{-k, k} \\ & \sum_{n=0}^{N_1+2} (-1)^n V_{nkm} = S_{km}^{(v)}, \quad \sum_{n=0}^{N_1+2} V_{nkm} = 0, \quad k = \overline{1, N_2}, \quad m = \overline{-k, k} \\ & (S_{1,1}^{(r)}, S_{1,-1}^{(r)}, S_{1,0}^{(r)})^T = (\frac{4}{3}\pi)^{1/2} (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{w} - \dot{\mathbf{w}}), \quad S_{km}^{(r)} = 0, \quad k = m = 0, \quad k = \overline{2, N_2}, \\ & m = \overline{-k, k}, \quad S_{km}^{(v)} = -\delta_k^1 (\frac{4}{3}\pi)^{1/2} (\delta_m^1 \Omega_x + \delta_m^{-1} \Omega_y + \delta_m^0 \Omega_z), \quad A_{nk}^{(0)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_k(x) dx \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом (19), уравнения (4), (5), (18), (20) представляют собой записанную в неявной форме систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}} &= \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}|_{t=0} = \mathbf{Y}_0, \quad \mathbf{Y} = (w_x, w_y, w_z, \dot{w}_x, \dot{w}_y, \dot{w}_z, \omega_2, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dot{\alpha}_{22}, \dot{\alpha}_{23}, \\ U_{nkm}, n = \overline{1, N_1}, k = \overline{1, N_2}, m = \overline{-k, k}, V_{nkm}, n = \overline{0, N_1}, k = \overline{1, N_2}, m = \overline{-k, k})^T \end{aligned}$$

которая интегрируется численно жестко устойчивым ФДН-методом [14]. При этом используется быстрый алгоритм [15] вычисления матрицы Якоби $\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}) / \partial \mathbf{Y}$. Начальные условия \mathbf{Y}_0 соответствуют равновесному состоянию, в котором $\mathbf{F}(-0, \mathbf{Y}_0) = 0$.

После перехода к новой независимой пространственной переменной $x = \xi/h_0 \in [0, 1]$ численное интегрирование линейной краевой задачи (14) выполняется аналогично (19), (20), и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно Фурье-коэффициентов.

Уравнения Лежандра (15) относительно соответствующих компонент давления на поверхности внутренней сферы можно представить в виде

$$\nabla^{(s)} \cdot (h_0 \nabla^{(s)} p + \mathbf{f}(\vartheta, \varphi)) = 0 \quad (21)$$

где $\mathbf{f}(\vartheta, \varphi)$ – известная вектор-функция. Проекционный метод, позволяющий свести численное интегрирование (21) к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно Фурье-коэффициентов p_{km} , имеет вид

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^N \sum_{m=-k}^k p_{km} Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) \\ \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi (h_0 \nabla^{(s)} p + \mathbf{f}(\vartheta, \varphi)) \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} &= 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad m = \overline{-k, k} \end{aligned}$$

Результаты моделирования устойчивости

Полагаем, что ось вращения внешней сферы горизонтальна, $\alpha_1^{(0)} = (0, -\frac{1}{2}\pi, 0)^T$, $\mathbf{g} = (0, -1, 0)^T$, $\omega_1^{(0)} = 1$, т.е. $\Omega_1^{(0)} = (0, 0, 1)^T$, и подвес подвержен воздействию интенсивных поперечных перегрузок. Исследуем устойчивость подвеса в окрестности центрального положения, т.е. при малых относительных эксцентриситетах. Подвесу с легким внутренним телом и безразмерными параметрами

$$\beta = 0.12, \quad \chi = -1.62, \quad \rho_2/\rho = 0.471, \quad J_1 = 0.833, \quad J_2 = 0.584, \quad k_{1a} = k_{2a} = 1 \quad (22)$$

при $\sigma = 18.26$ соответствуют размерные радиус внутренней сферы $R_2 = 2.5 \cdot 10^{-2}$ м, зазор между внешней и внутренней сферами $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$ м, угловая скорость вращения внешней сферы $\Omega_h = 207$ рад/с, масса и моменты инерции ротора $m = 5.86 \cdot 10^{-2}$ кг, $J_1 = 3.05 \cdot 10^{-5}$ кгм², $J_2 = 2.14 \cdot 10^{-5}$ кгм², плотность и кинематическая вязкость жидкости в поддерживающем слое $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 1,02 \cdot 10^{-4}$ м²/с [3]. При $\mathbf{a}_0 = 0$ (без перегрузок) равновесное состояние характеризуется практически нулевым относительным эксцентриситетом $|\mathbf{w}_0| = 0.005736 \ll 1$. Частотный годограф представлен на рис. 3а. Здесь и далее частотные годографы показаны в специальном масштабе $u + iv = |D(i\omega)|^{-1} D(i\omega) \ln(1 + |D(i\omega)|)$.

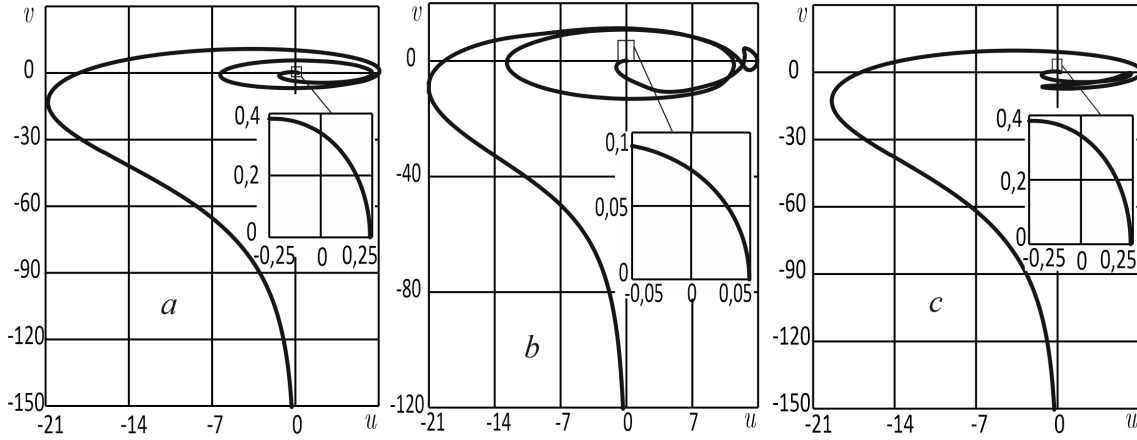


Рис. 3.

Приращение аргумента частотного годографа составляет $\frac{11}{2}\pi$, и в соответствии с (16) сферический гидродинамический подвес асимптотически устойчив.

Подвесу с легким внутренним телом и безразмерными параметрами

$$\begin{aligned}
 \beta = 0.02, \quad \chi = -6.94, \quad \rho_2/\rho = 0.448, \quad J_1 = 0.833 \\
 J_2 = 0.583, \quad \sigma = 160, \quad k_{1a} = k_{2a} = 1
 \end{aligned} \tag{23}$$

соответствуют размерные радиус внутренней сферы $R_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м, зазор между внешней и внутренней сферами $\delta = 4 \cdot 10^{-4}$ м, угловая скорость вращения внешней сферы $\Omega_h = 1000$ рад/с, масса и моменты инерции ротора $m = 3 \cdot 10^{-2}$ кг, $J_1 = 10^{-5}$ кгм², $J_2 = 7 \cdot 10^{-6}$ кгм², плотность и кинематическая вязкость жидкости в поддерживающем слое $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 10^{-6}$ м²/с [1]. Равновесное состояние данного подвеса с повышенной угловой скоростью вращения при пятидесятикратной перегрузке $\mathbf{a}_0 = (0, 50, 0)^T$ характеризуется относительно небольшим эксцентриситетом $|\mathbf{w}_0| = 0.0257$. Частотный годограф приведен на рис. 3б. Приращение аргумента частотного годографа составляет $\frac{11}{2}\pi$, и сферический гидродинамический подвес асимптотически устойчив.

Равновесному состоянию подвеса с параметрами $\beta = 0.12, \sigma = 18.26, \gamma = 9.16 \cdot 10^{-3}, \rho_2/\rho = 1.5, J_1 = 0.833, J_2 = 0.584, k_{1a} = k_{2a} = 1$ (тяжелое внутреннее тело) также соответствует достаточно малое значение относительного эксцентриситета $|\mathbf{w}_0| = 0.005733 \ll 1$. Частотный годограф показан на рис. 3с. Приращение аргумента частотного годографа составляет $\frac{7}{2}\pi$, и в соответствии с (16) сферический гидродинамический подвес неустойчив.

Далее на рис. 4 приведены частотные годографы подвеса с параметрами (22) (легкое внутреннее тело) при десятикратной перегрузке $\mathbf{a}_0 = (0, 10, 0)^T$ и последующем уменьшении колебательного числа Рейнольдса σ , чему соответствует увеличение относительного эксцентриситета $|\mathbf{w}_0|$ в равновесном состоянии. При $\sigma = 10$ $|\mathbf{w}_0| = 0.173$ (рис. 4a), $\sigma = 7$ $|\mathbf{w}_0| = 0.299$ (рис. 4b), $\sigma = 4$ $|\mathbf{w}_0| = 0.625$ (рис. 4c) приращение аргумента частотного годографа составляет $\frac{11}{2}\pi$, и сферический гидродинамический подвес устойчив. При $\sigma = 3.06$ (найдено бинарным делением) $|\mathbf{w}_0| = 0.790$ (рис. 4d) частотный годограф проходит через начало координат, что соответствует границе устойчивости. При $\sigma = 3$ $|\mathbf{w}_0| = 0.801$ (рис. 4e)) приращение аргумента частотного годографа составляет $\frac{7}{2}\pi$, и подвес неустойчив. Потеря устойчивости происходит при больших эксцентриситетах, и подвес обладает значительным запасом устойчивости.

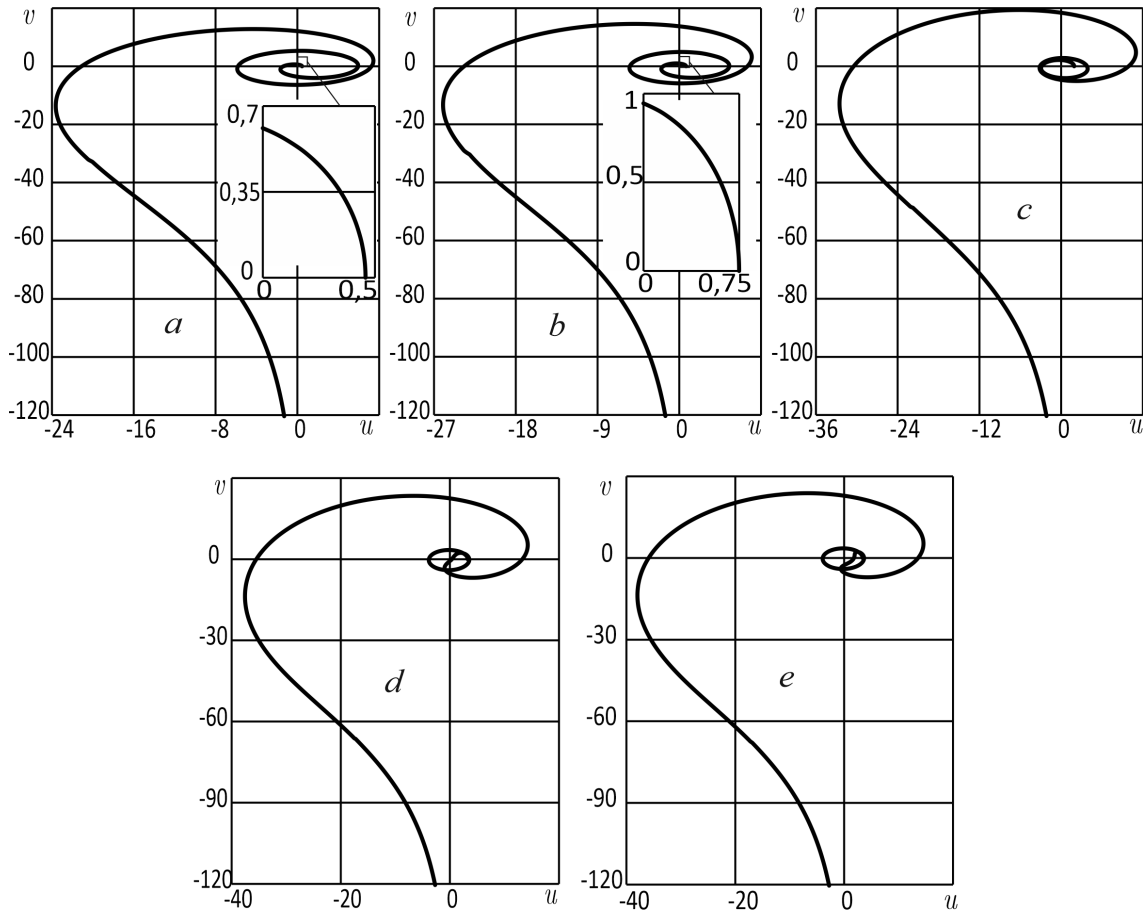


Рис. 4.

На рис. 5a для подвеса с легким внутренним телом и параметрами (22) при $\sigma = 18.26$, $\mathbf{a}_0 = 0$, $\mu = 1$ и скачкообразном возрастании десятикратной перегрузки $\mathbf{a}_1 = (0, 10 \cdot 1(t), 0)^T$, где $1(t)$ – функция единичного скачка Хевисайда, приведены зависимости от времени смещений центра масс ротора $w_x(t)$, $w_y(t)$. Как показывают представленные данные, подвес в течение нескольких периодов вращения внешней сферы переходит из одного равновесного состояния в другое.

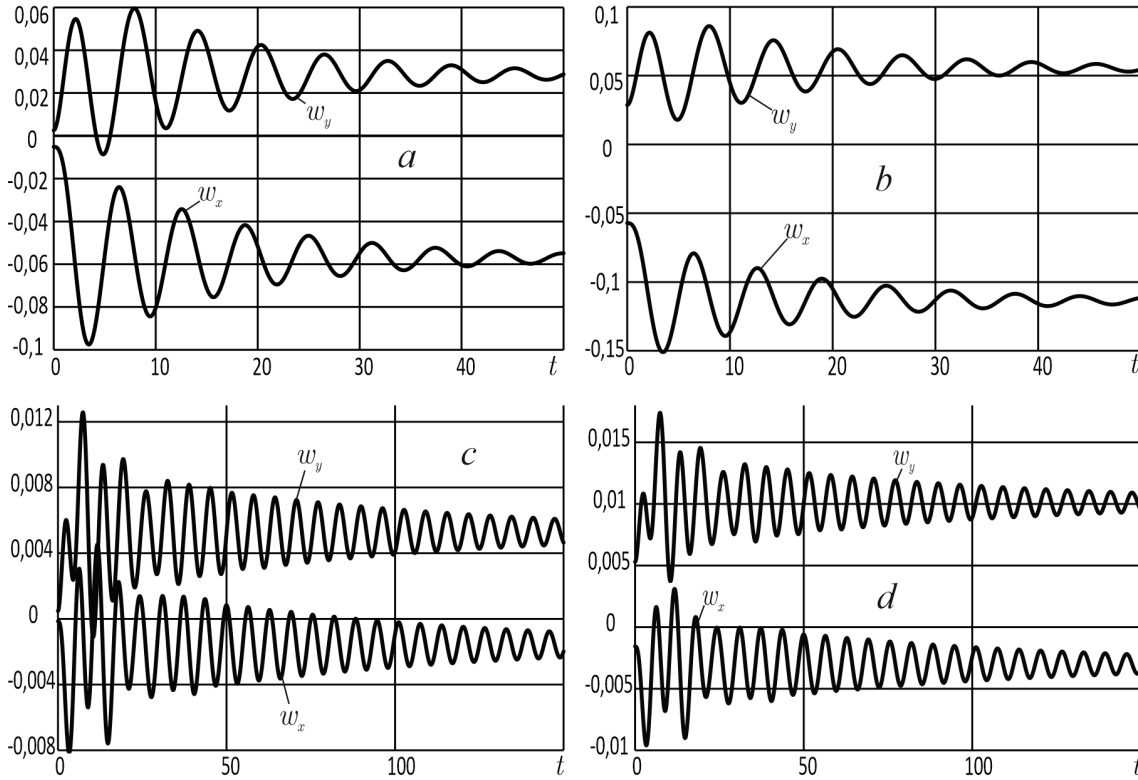


Рис. 5.

На рис. 5b для подвеса с легким внутренним телом и параметрами (22) при $\sigma = 18.26$, постоянной начальной десятикратной перегрузке $\mathbf{a}_0 = (0, 10, 0)^T$, $\mu = 1$ для дальнейшего скачкообразного возрастания перегрузки на десять единиц $\mathbf{a}_1 = (0, 10 \cdot 1(t), 0)^T$ приведены зависимости от времени смещений центра масс ротора $w_x(t)$, $w_y(t)$. Здесь также переход из одного равновесного состояния в другое занимает несколько периодов вращения внешней сферы.

На рис. 5c для подвеса с легким внутренним телом и параметрами (23) при $\mathbf{a}_0 = 0$, $\mu = 1$ и скачкообразном возрастании перегрузки на десять единиц $\mathbf{a}_1 = (0, 10 \cdot 1(t), 0)^T$ приведены зависимости от времени смещений центра масс ротора $w_x(t)$, $w_y(t)$. По сравнению с рис. 5a, увеличение колебательного числа Рейнольдса σ приводит к уменьшению на порядок характерной величины смещений центра масс ротора. Однако скорость затухания переходного процесса также уменьшается на порядок.

На рис. 5d для подвеса с легким внутренним телом и параметрами (23), постоянной начальной десятикратной перегрузке $\mathbf{a}_0 = (0, 10, 0)^T$ для дальнейшего скачкообразного возрастания перегрузки на десять единиц $\mathbf{a}_1 = (0, 10 \cdot 1(t), 0)^T$ и $\mu_1 = 1$ приведены зависимости от времени смещений центра масс ротора $w_x(t)$, $w_y(t)$. По сравнению с рис. 5b, здесь также на порядок уменьшается характерная величина смещений центра масс ротора и скорость затухания переходного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андрейченко К.П. Динамика поплавковых гироскопов и акселерометров. Москва: Машиностроение, 1987. 128 с.
- [2] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. К теории устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 1. С. 13–26.
- [3] Андрейченко Д.К., Смарунь А.Б. Моделирование аксиального гидромеханического эффекта в гироскопах со сферическим гидродинамическим подвесом // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 3. С. 27–33.
- [4] Андрейченко К.П. К теории слабонагруженного сферического гидродинамического подвеса // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1977. № 1. С. 17–24.
- [5] Rietord M., Valdetaro L. Axisymmetric inertial modes in a spherical shell at low Ekman numbers // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 844. P. 597–634.
- [6] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.
- [7] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П., Мельничук Д.В. Расширенный алгоритм моделирования устойчивости комбинированных динамических систем // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 199. С. 7–17.
- [8] Мельничук Д.В., Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. Уточненная математическая модель сферического гидродинамического подвеса // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы междунар. науч. конф. Саратов: Наука, 2018. С. 264–268.
- [9] Andreichenko D., Andreichenko K., Melnichuk D. Modeling the Effect Of Centering of a Spherical Hydrodynamic Suspension // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2020. no. 52. P. 13–21.
- [10] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П., Мельничук Д.В. Численное моделирование сферического гидродинамического подвеса // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы междунар. науч. конф. Саратов: Наука, 2021. С. 10–14.
- [11] Седов Л.И. Механика сплошной среды В 2 т. Т. 1. Москва: Наука, 1976. 536 с.
- [12] Портенко М.С., Мельничук Д.В., Андрейченко Д.К. Условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. С. 208–217.
- [13] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. 352 с.
- [14] Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Москва: Мир, 1999. 685 с.
- [15] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П., Мельничук Д.В. Быстрый алгоритм моделирования переходных процессов в нелинейных комбинированных динамических системах // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 19-й междунар. Саратов. Зимней школы. Саратов: Научная книга, 2018. С. 31–34.

D. K. Andreichenko¹, K. P. Andreichenko², D. V. Melnichuk¹

ON THE STABILITY OF SPHERICAL HYDRODYNAMIC SUSPENSION

¹*Saratov State University, Saratov, Russia*

²*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia*

Abstract. The stability of a spherical hydrodynamic suspension is investigated with full consideration of the dependence of the fluid velocity distribution profile on the radial coordinate in the supporting layer. A suspension with a light internal body is stable over a large range of changes in relative eccentricity, and when the overloads change by an amount of about a dozen accelerations of free fall, it moves from one equilibrium state to another. Suspension with a heavy internal body is unstable.

Keywords: spherical hydrodynamic suspension, viscous incompressible fluid, hybrid dynamic systems, frequency stability criterion, boundary value problems.

REFERENCES

- [1] Andreichenko K. Dynamics of float gyroscopes and accelerometers. Moscow: Mashinostroenie, 1987. 128 p. (in Russian).
- [2] Andreichenko D., Andreichenko K. On the theory of stability of a cylindrical hydrodynamic suspension // Fluid Dynamics. 2009. Vol. 44, no. 1. p. 10–21.
- [3] Andreichenko K., Smarun' A. Simulation of the axial hydromechanical effect in gyroscopes with a spherical hydrodynamic suspension // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2011. Vol. 40, no. 3. P. 216–221.
- [4] Andreichenko K. On the theory of a weakly loaded spherical suspension // Mechanics of Solids (Izvestiya AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela). 1977. Vol. 12, no. 1. P. 15–21.
- [5] Rietord M., Valdetaro L. Axisymmetric inertial modes in a spherical shell at low Ekman numbers // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 844. P. 597–634.
- [6] Andreichenko D., Andreichenko K. On the theory of hybrid dynamical systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2000. Vol. 39, no. 3. P. 383–398.
- [7] Andreichenko D., Andreichenko K., Melnichuk D. Advanced algorithm for modeling the stability of hybrid dynamic systems // Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews. 2021. Vol. 199. P. 7–17. (in Russian).
- [8] Melnichuk D., Andreichenko D., Andreichenko K. Refined mathematical model of spherical hydrodynamic suspension // Computer Science and information Technology: Materials of the International Scientific Conference. Saratov: Nauka, 2018. (in Russian).
- [9] Andreichenko D., Andreichenko K., Melnichuk D. Modeling the Effect Of Centering of a Spherical Hydrodynamic Suspension // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2020. no. 52. P. 13–21.
- [10] Andreichenko D., Andreichenko K., Melnichuk D. Numerical simulation of spherical hydrodynamic suspension // Computer Science and information Technology: Materials of the International Scientific Conference. Saratov: Nauka, 2021. P. 264–268. (in Russian).
- [11] Sedov L. Continuum mechanics. In 2 vols . Vol . 1. Moscow: Nauka, 1976. 536 p. (in Russian).
- [12] Portenko M., Melnichuk D., Andreichenko D. Analyticity Conditions of Characteristic and Disturbing Quasipolynomials of Hybrid Dynamical Systems // Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2016. Vol. 16. P. 208–217. (in Russian).
- [13] Fletcher K. Numerical methods based on the Galerkin method. Mir: Moscow, 1988. 352 p. (in Russian).
- [14] Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Moscow: Mir, 1999. 685 p. (in Russian).
- [15] Andreichenko D., Andreichenko K., Melnichuk D. Fast algorithm for modeling transients in nonlinear hybrid dynamical systems // Modern problems of the theory of functions and their applications: Materials of the 19th International Saratov Winter School. Saratov: Nauchnaya kniga, 2018. P. 31–34. (in Russian).

Andreichenko Dmitry Konstantinovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Saratov State University, Saratov, Russia

Andreichenko Konstantin Petrovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia

Melnichuk Dmitry Vadimovich, Assistant Professor, Saratov State University, Saratov, Russia