

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич, Е. В. Артюх

ОБРАЩЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В МОДЕЛИ МУРНАГАНА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. На основе термодинамических соотношений получена связь между тензорами упругости и тензорами упругих податливостей четвёртого и шестого рангов для изотропного материала. Это позволило провести обращение нелинейной связи между напряжениями и деформациями в частном случае гиперупругого изотропного материала при использовании потенциала Мурнагана. На примере полимера Ertalon проведена оценка диапазона деформаций, в котором полученное обращение является корректным.

Ключевые слова: конечные деформации, гиперупругий материал, упругие потенциалы, одноосное сжатие.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.006

УДК: 539.3

Введение. В современной механике широкое распространение получили модели нелинейных гиперупругих материалов. Одной из ключевых позиций таких моделей является введение упругого потенциала, через частные производные от которого находят напряжения или деформации. В настоящее время известны многочисленные варианты упругих потенциалов, обзоры которых приведены в работах [1–4]. Простейшие потенциалы второго порядка приводят к линейным соотношениям между напряжениями и деформациями, которые легко обращаются. Если связь между тензорами напряжений и деформаций является нелинейной, то обращение этих соотношений представляет собой проблему. В монографии [1] рассмотрен вопрос об обращении

© Соколова М. Ю., Христич Д. В., Артюх Е. В., 2022

Соколова Марина Юрьевна

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Христич Дмитрий Викторович

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Артюх Екатерина Викторовна

e-mail: kate_eva@mail.ru,

кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 01.11.2022

нелинейных соотношений между напряжениями и деформациями в изотропной среде, в том числе и при существовании упругого потенциала. Отмечается, что в общем случае нелинейной связи между напряжениями и деформациями задача об обращении этой связи не имеет решения, а в случае гиперупругих материалов задача решается через производящую функцию обратного преобразования — преобразования Лежандра.

В работах [5–8] упругий потенциал напряжений представляется разложением в ряд по степеням тензора деформаций. В статье [5] предлагается термодинамический подход к определению коэффициентов этого разложения. В работе [8] показано, что при некоторых условиях такое разложение в случае изотропного материала совпадает с известным потенциалом Мурнагана [9]. Работы [6, 7] посвящены определению связи между коэффициентами разложения потенциалов напряжений и деформаций для анизотропных материалов с кубической симметрией свойств.

В данной статье на основе термомеханических соотношений будет получена связь между тензорами упругости четвертого и шестого ранга, выражающимися через упругие постоянные второго и третьего порядков, и тензорами упругой податливости также четвертого и шестого рангов. Будет рассмотрен пример определения коэффициентов податливости второго и третьего порядков для полимерного материала, и установлен диапазон деформаций, в котором обращение нелинейных соотношений даёт удовлетворительный результат.

1. Некоторые соотношения термомеханики. Рассмотрим однородное упругое тело из изотропного материала. Пусть в результате механических и тепловых воздействий в теле возникает однородное напряженно-деформированное состояние. Конечные деформации описываются тензором деформаций Коши–Грина $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi}^T - \mathbf{E})$, где $\boldsymbol{\Phi}$ — тензор-аффинор деформаций [2], \mathbf{E} — единичный тензор. Напряженное состояние характеризуется тензором истинных напряжений Коши \mathbf{S} . Известно [1–3], что удельная (отнесенная к единице массы) мощность напряжений определяется выражением

$$N^{(i)} = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon},$$

ρ_0 — плотность материала в начальном состоянии, $\mathbf{T} = \boldsymbol{\Phi}^{-T} \cdot J \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{-1}$ — второй тензор Пиолы–Кирхгоффа (энергетический тензор напряжений), $J = \frac{dV}{dV_0}$ — относительное изменение элементарного объёма. Двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензоров в ортонормированном векторном базисе \mathbf{e}_i : $\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = T^{ij} \varepsilon^{ij}$, так как $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

В термомеханике [1–3] вводятся термодинамические потенциалы: удельная внутренняя энергия

$$U = U(\boldsymbol{\varepsilon}, s); \quad (1.1)$$

удельная свободная энергия

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T); \quad (1.2)$$

потенциал Гиббса

$$G = G(\mathbf{T}, T), \quad (1.3)$$

удельная энтальпия

$$H = H(\mathbf{T}, s). \quad (1.4)$$

Потенциалы (1.1)–(1.4) отнесены к единице массы среды и рассматриваются как функции деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, напряжений \mathbf{T} , удельной энтропии s и абсолютной температуры среды T . Термодинамические потенциалы (1.1)–(1.4) связаны между собой известными соотношениями [2]:

$$\Psi = U - sT, \quad G = \Psi - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad H = U - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.5)$$

Рассмотрим равновесный обратимый процесс однородного деформирования среды, для которого справедливы законы изменения внутренней энергии и энтропии в виде [2]:

$$dU = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} + d'Q^{(e)}, \quad d'Q^{(e)} = Tds. \quad (1.6)$$

Исключая из законов (1.6) внешнее тепловое воздействие $d'Q^{(e)}$, получим тождество Гиббса

$$dU = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} + Tds, \quad (1.7)$$

из которого следуют выражения для напряжений и температуры

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial s}. \quad (1.8)$$

Из соотношений (1.5) и тождества Гиббса (1.7) получается основное термомеханическое соотношение

$$d\Psi = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} - sdT, \quad (1.9)$$

из которого следуют выражения для напряжений и энтропии

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}. \quad (1.10)$$

Основное термомеханическое соотношение в форме Гиббса имеет вид

$$dG = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{T} - sdT, \quad (1.11)$$

из которого следуют выражения для деформаций и энтропии

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\rho_0 \frac{\partial G}{\partial \mathbf{T}}, \quad s = -\frac{\partial G}{\partial T}. \quad (1.12)$$

Наконец, на основании соотношений (1.5) и (1.7) получаем закон изменения энтальпии

$$dH = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{T} + Tds \quad (1.13)$$

и выражения для деформаций и температуры

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\rho_0 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{T}}, \quad T = \frac{\partial H}{\partial s}. \quad (1.14)$$

Одним из возможных подходов к конкретизации упругой среды является задание одной из функций (1.1)–(1.4) и дальнейшее определение параметров состояния по формулам (1.8), (1.10), (1.12) или (1.14).

Пусть рассматриваемый процесс является изотермическим, то есть происходит при постоянной температуре $T = T_0$. В этом случае из соотношений (1.9) и (1.11) следует, что

$$d\Psi|_{T=T_0} = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad dG|_{T=T_0} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{T}. \quad (1.15)$$

Для изотермического процесса введём в рассмотрение упругие потенциалы

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \rho_0 \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T_0), \quad V(\mathbf{T}) = \rho_0 G(\mathbf{T}, T_0), \quad (1.16)$$

которые отнесены к единице начального объёма деформируемого тела. Из соотношений (1.5) следует, что между потенциалами (1.16) существует связь:

$$V(\mathbf{T}) = W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

На основании (1.15), (1.16) напряжения и деформации в изотермическом процессе определяются выражениями:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{T}}, \quad (1.17)$$

а вопрос о конкретизации среды заключается в задании вида потенциала $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ или $V(\mathbf{T})$.

Если рассматриваемый процесс является адиабатическим, то есть происходящим без теплообмена с окружающей средой, то в нём не происходит изменение энтропии $s = s_0$. В этом случае из соотношений (1.7) и (1.13) следует, что

$$dU|_{s=s_0} = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad dH|_{s=s_0} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{T}. \quad (1.18)$$

В адиабатическом процессе могут быть введены упругие потенциалы

$$W_a(\boldsymbol{\varepsilon}) = \rho_0 U(\boldsymbol{\varepsilon}, s_0), \quad V_a(\mathbf{T}) = \rho_0 H(\mathbf{T}, s_0), \quad (1.19)$$

а напряжения и деформации определяются соотношениями

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W_a}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial V_a}{\partial \mathbf{T}}.$$

Следует отметить, что даже если потенциалы (1.16) и (1.19) совпадают по форме, входящие в них материальные константы или функции должны определяться из экспериментов, условия реализации которых обеспечивают неизменность температуры для потенциалов $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V(\mathbf{T})$ или неизменность энтропии для потенциалов $W_a(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V_a(\mathbf{T})$. В первом случае обычно проводят квазистатические нагружения тела, а во втором случае — динамические.

2. Упругий потенциал Мурнагана. Одним из наиболее известных и часто применяемых для сжимаемых упругих материалов потенциалов является потенциал Мурнагана, предложенный в работе [9]. В терминах тензора деформаций Коши–Грина потенциал Мурнагана записан в работах [10, 11] в виде

$$W = \frac{1}{2} \lambda J_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + G J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{6} (\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3) J_1^3(\boldsymbol{\varepsilon}) - 2(\nu_2 + 2\nu_3) J_1(\boldsymbol{\varepsilon}) J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + 4\nu_3 J_3(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (2.1)$$

где λ , G — константы упругости Ламе, ν_1 , ν_2 , ν_3 — константы упругости третьего порядка, $J_1(\boldsymbol{\varepsilon})$, $J_2(\boldsymbol{\varepsilon})$, $J_3(\boldsymbol{\varepsilon})$ — алгебраические инварианты тензора деформаций Коши–Грина.

Если обозначить $\frac{1}{2}\nu_1 + \nu_2 = l$, $\nu_2 + 2\nu_3 = m$, $4\nu_3 = n$, то выражение (2.1) принимает вид

$$W = \frac{1}{2}\lambda J_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + G J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{3}(l + 2m)J_1^3(\boldsymbol{\varepsilon}) - 2mJ_1(\boldsymbol{\varepsilon})J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + nJ_3(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (2.2)$$

где l , m , n — константы Мурнагана.

В работах многих авторов [5–8] предлагалось разложение потенциала $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ в ряд по степеням $\boldsymbol{\varepsilon}$. Если в начальном состоянии напряжения и деформации в теле отсутствуют $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0$, $\mathbf{T} = 0$, то первые два ненулевых члена такого разложения имеют вид

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\mathbf{N}^{IV} \dots \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{6}\mathbf{N}^{VI} \dots \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Аналогичное представление может быть записано и для потенциала $V(\mathbf{T})$:

$$V(\mathbf{T}) = -\frac{1}{2}\mathbf{A}^{IV} \dots \mathbf{T}\mathbf{T} - \frac{1}{6}\mathbf{A}^{VI} \dots \mathbf{T}\mathbf{T}\mathbf{T}. \quad (2.4)$$

Тензоры упругости \mathbf{N}^{IV} , \mathbf{N}^{VI} и тензоры упругой податливости \mathbf{A}^{IV} , \mathbf{A}^{VI} из соотношений (2.3), (2.4) являются постоянными тензорами упругих констант четвёртого и шестого рангов, для компонент которых в ортонормированном базисе выполняются условия симметрии

$$\begin{aligned} N^{ijkl} &= N^{jikl} = N^{ijlk} = N^{klij}, \\ N^{ijklmn} &= N^{jiklmn} = N^{ijlkmn} = N^{ijklnm} = N^{ijmknl} = N^{klijmn}. \end{aligned}$$

В работе [8] показано, что в изотропном материале потенциал (2.3) совпадает с потенциалом (2.1). При условии постоянства тензоров \mathbf{N}^{IV} , \mathbf{N}^{VI} и \mathbf{A}^{IV} , \mathbf{A}^{VI} из представлений (2.3) и (2.4) следуют их выражения через частные производные от упругих потенциалов:

$$\mathbf{N}^{IV} = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}; \quad \mathbf{N}^{VI} = \left. \frac{\partial^3 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}; \quad \mathbf{A}^{IV} = -\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2} \right|_{\mathbf{T}=0}; \quad \mathbf{A}^{VI} = -\left. \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbf{T}^3} \right|_{\mathbf{T}=0}. \quad (2.5)$$

Запишем соотношения, определяющие связь между напряжениями и деформациями для гиперупругого материала. На основании представлений (2.3) и (2.4) из выражений (1.17) получим

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}^{IV} \dots \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\mathbf{N}^{VI} \dots \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^{IV} \dots \mathbf{T} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^{VI} \dots \mathbf{T}\mathbf{T}. \quad (2.7)$$

Тогда тензоры упругости и тензоры упругой податливости можно выразить через производные от напряжений и деформаций в виде

$$\mathbf{N}^{IV} = \left. \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}; \quad \mathbf{N}^{VI} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}; \quad \mathbf{A}^{IV} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} \right|_{\mathbf{T}=0}; \quad \mathbf{A}^{VI} = \left. \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}^2} \right|_{\mathbf{T}=0}. \quad (2.8)$$

Будем считать, что соотношения (2.6) и (2.7) описывают связь между напряжениями и деформациями для одного и того же материала. С точки зрения общего подхода к обращению связи между тензорами, изложенному в монографии [1], соотношения (2.7) являются «обратными» по отношению к соотношениям (2.6). Тогда между тензорами \mathbf{N}^{IV} , \mathbf{N}^{VI} и \mathbf{A}^{IV} , \mathbf{A}^{VI} имеется связь. В работах [5–7] предложено устанавливать эту связь на основании приведенных выше термодинамических соотношений.

Для тензоров \mathbf{T} и $\boldsymbol{\varepsilon}$, характеризующих однородное напряженно-деформированное состояние в материале, справедливо соотношение:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{I}^{IV}, \quad (2.9)$$

где \mathbf{I}^{IV} — единичный тензор четвёртого ранга [2].

В окрестности начального состояния, когда $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, $\mathbf{T} = 0$, из соотношений (2.9) и (2.8) получим известную связь между тензорами \mathbf{N}^{IV} и \mathbf{A}^{IV} :

$$\mathbf{N}^{IV} \cdot \cdot \mathbf{A}^{IV} = \mathbf{I}^{IV} = \mathbf{A}^{IV} \cdot \cdot \mathbf{N}^{IV}. \quad (2.10)$$

Продифференцируем соотношение (2.9) по тензору напряжений \mathbf{T} :

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} (\cdot \cdot) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} \right) \cdot \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}^2} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

В этом выражении символом $(\cdot \cdot)$ обозначена свёртка левой диады тензора четвёртого ранга со второй (средней) диадой тензора шестого ранга, которая выполняется по правилу:

$$\mathbf{N}^{VI}(\cdot \cdot) \mathbf{A}^{IV} = N^{ijklmn} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n (\cdot \cdot) A^{pqrs} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q \mathbf{e}_r \mathbf{e}_s = N^{ijqpmn} A^{pqrs} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_r \mathbf{e}_s \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n.$$

На основании соотношений (1.17) выражение (2.11) записывается через упругие потенциалы (1.16)

$$- \left(\frac{\partial^3 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3} (\cdot \cdot) \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2} \right) \right) \cdot \cdot \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \cdot \cdot \left(-\frac{\partial^3 V}{\partial \mathbf{T}^3} \right) = \mathbf{0}.$$

С учетом определений (2.8), в окрестности начального состояния получим

$$(\mathbf{N}^{VI}(\cdot \cdot) \mathbf{A}^{IV}) \cdot \cdot \mathbf{A}^{IV} + \mathbf{N}^{IV} \cdot \cdot \mathbf{A}^{VI} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Умножим (2.12) слева на тензор \mathbf{A}^{IV} и, учитывая (2.10), после преобразований получим выражение для тензора упругой податливости материала шестого ранга в виде

$$\mathbf{A}^{VI} = -\mathbf{A}^{IV} \cdot \cdot (\mathbf{N}^{VI}(\cdot \cdot) \mathbf{A}^{IV}) \cdot \cdot \mathbf{A}^{IV}. \quad (2.13)$$

Таким образом, если в потенциалах (2.3) и (2.4) тензоры \mathbf{N}^{IV} , \mathbf{N}^{VI} и \mathbf{A}^{IV} , \mathbf{A}^{VI} связаны соотношениями (2.10) и (2.13), то с их помощью можно описывать напряженно-деформированное состояние в одном и том же материале. Следует ожидать, что подобное «обращение» нелинейной связи между напряжениями и деформациями оказывается справедливым только в некотором диапазоне деформаций, поскольку определения тензоров упругости и тензоров упругой податливости (2.5) и (2.8) приведены в окрестности состояния, когда напряжения и деформации в материале отсутствуют. Рассмотрим пример «обращения» соотношений между напряжениями и деформациями в изотропном материале и для полимера Ertalon найдем, в каком диапазоне такое обращение даёт удовлетворительные результаты.

3. Упругие константы второго и третьего порядков для изотропного материала. В работе [2] предложено тензоры, входящие в потенциал (2.3), представлять разложениями по инвариантным относительно группы симметрии материала базисным тензорам. Для этого удобно определить тензорные базисы второго, четвёртого и шестого рангов:

$$\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2),$$

$$\mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3); \quad (3.1)$$

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha); \quad (3.2)$$

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha). \quad (3.3)$$

В работах [2, 12] установлено, что для изотропного материала инвариантными относительно полной группы ортогональных преобразований являются тензоры

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0; \quad \boldsymbol{\Omega}^{(1)} = \mathbf{I}^{00}, \quad \boldsymbol{\Omega}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}; \\ \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022} + \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}, \\ \mathbf{B}^{(3)} = \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{I}^{111} - \frac{6}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{122} + \mathbf{I}^{133}) + \frac{3}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155}) + \frac{3}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244} + 2\mathbf{I}^{345}). \end{aligned}$$

Тогда тензоры четвертого ранга \mathbf{N}^{IV} и \mathbf{A}^{IV} , входящие в соотношения (2.6) и (2.7), представляются в виде

$$\mathbf{N}^{IV} = N_1\boldsymbol{\Omega}^{(1)} + N_2\boldsymbol{\Omega}^{(2)}, \quad \mathbf{A}^{IV} = A_1\boldsymbol{\Omega}^{(1)} + A_2\boldsymbol{\Omega}^{(2)}. \quad (3.4)$$

Разложения (3.4) совпадают с разложениями этих тензоров по собственным упругим состояниям изотропного материала [2]. Это обстоятельство в дальнейшем существенно облегчает проводимые преобразования. Коэффициенты N_1 и N_2 разложения (3.4) связаны с константами упругости изотропного материала: $N_1 = 3K$, $N_2 = 2G$, где $K = \lambda + \frac{2}{3}G$ — модуль объёмной упругости, G — модуль сдвига.

Аналогично записываются разложения для тензоров шестого ранга:

$$\mathbf{N}^{VI} = n_1\mathbf{B}^{(1)} + n_2\mathbf{B}^{(2)} + n_3\mathbf{B}^{(3)}, \quad \mathbf{A}^{VI} = a_1\mathbf{B}^{(1)} + a_2\mathbf{B}^{(2)} + a_3\mathbf{B}^{(3)}. \quad (3.5)$$

Входящие в (3.5) коэффициенты n_1 , n_2 , n_3 связаны с константами упругости третьего порядка ν_1 , ν_2 , ν_3 и константами Мурнагана l , m , n , входящими в потенциалы (2.1) и (2.2), соотношениями

$$\begin{aligned} n_1 = 3\sqrt{3}\nu_1 + 6\sqrt{3}\nu_2 + \frac{8}{\sqrt{3}}\nu_3 = 6\sqrt{3}l + \frac{2n}{\sqrt{3}}, \\ n_2 = 6\sqrt{3}\nu_2 + 8\sqrt{3}\nu_3 = 6\sqrt{3}m - \sqrt{3}n, \quad n_3 = 4\nu_3 = n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя тензоры (3.4) в соотношения (2.10) и учитывая, что $\boldsymbol{\Omega}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{\Omega}^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\Omega}^{(\alpha)}$, получим выражения для коэффициентов упругой податливости

$$A_1 = \frac{1}{N_1}, \quad A_2 = \frac{1}{N_2}. \quad (3.7)$$

Подставляя разложения тензоров (3.4), (3.5) в соотношения (2.13), путём непосредственных вычислений получим выражения для коэффициентов упругой податливости третьего порядка:

$$a_1 = -A_1^3 n_1, \quad a_2 = -A_1 A_2^2 n_2, \quad a_3 = -A_2^3 n_3. \quad (3.8)$$

Для материала Ertalon известны упругие константы $N_1 = 17,04\text{ГПа}$, $N_2 = 2,74\text{ГПа}$, $n_1 = -110,48\text{ГПа}$, $n_2 = -755,35\text{ГПа}$, $n_3 = -5,77\text{ГПа}$ [13], тогда по формулам (3.7) и (3.8) вычислим коэффициенты упругой податливости этого материала: $A_1 = 0,059\text{ГПа}^{-1}$, $A_2 = 0,0365\text{ГПа}^{-1}$, $a_1 = 0,022\text{ГПа}^{-2}$, $a_2 = 0,59\text{ГПа}^{-2}$, $a_3 = 0,28\text{ГПа}^{-2}$.

Рассмотрим одноосное нагружение призматического образца из материала Ertalon с тензором напряжений $\mathbf{T} = \sigma\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$. Решение задачи об одноосном растяжении (сжатии)

приведено в работе [13] и в случае связи между напряжениями и деформациями в виде соотношения (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{1}{3}(N_1 + 2N_2)\varepsilon_{11} + \frac{2}{3}(N_1 - N_2)\varepsilon_{22} + \frac{1}{6\sqrt{3}}n_1(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22})^2 + \\ & + \frac{1}{9\sqrt{3}}n_2(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22})(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + \frac{1}{9}\left(\frac{n_2}{\sqrt{3}} + 2n_3\right)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где поперечные деформации ε_{22} находятся из условия равенства нулю напряжений $T^{22} = T^{33} = 0$ из уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(N_1 - N_2)\varepsilon_{11}(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}) + \frac{1}{3}(2N_1 + N_2)\varepsilon_{22} + \frac{1}{6\sqrt{3}}n_1(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22})^2 - \\ & - \frac{1}{18\sqrt{3}}n_2(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22})(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + \frac{1}{9}\left(\frac{n_2}{\sqrt{3}} - n_3\right)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если напряжения и деформации связаны соотношением (2.7), то решение задачи об одноосном нагружении имеет более простой вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{3}(A_1 + 2A_2)\sigma + \frac{1}{54}\left(3\sqrt{3}a_1 + 4\sqrt{3}a_2 + 12a_3\right)\sigma^2, \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{3}(A_1 - A_2)\sigma + \frac{1}{54}\left(3\sqrt{3}a_1 + \sqrt{3}a_2 - 6a_3\right)\sigma^2, \quad (3.12)$$

Связь между напряжениями и деформациями при одноосном растяжении (сжатии) имеет вид (3.9) или (3.11) при использовании определяющих соотношений (2.6) или «обратных» к ним соотношений (2.7). Корректность соотношений (3.7) и (3.8) можно проверить, построив графики зависимостей напряжений от деформаций (3.9) и (3.11). На рисунке 1 построены зависимости $\sigma(\lambda)$, где $\lambda = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}}$ — удлинение образца в осевом направлении, построенные по «прямым» соотношениям (3.9) (красная кривая) и по «обратным» соотношениям (3.11) (синяя кривая). На рисунке 2 приведены результаты расчета поперечных деформаций $\varepsilon_{22}(\lambda)$ по соотношениям (3.10) (красная кривая) и (3.12) (синяя кривая).

Из рисунков видно, что построенные кривые практически полностью совпадают в диапазоне изменения удлинений от $\lambda = 0,95$ при сжатии до $\lambda = 1,05$ при растяжении. При больших деформациях между кривыми возникают различия, которые при удлинении $\lambda = 0,91$ достигают 12%, а при $\lambda = 1,08$ — 8%. При описании поперечных деформаций переход от соотношений (3.7) к соотношениям (3.8) является корректным в диапазоне удлинений от $\lambda = 0,95$ при сжатии до $\lambda = 1,09$ при растяжении. Таким образом, для рассмотренного материала диапазон деформаций, в котором «обращение» соотношений нелинейной упругости даёт удовлетворительный результат, составляет примерно 5% деформаций при сжатии и при растяжении.

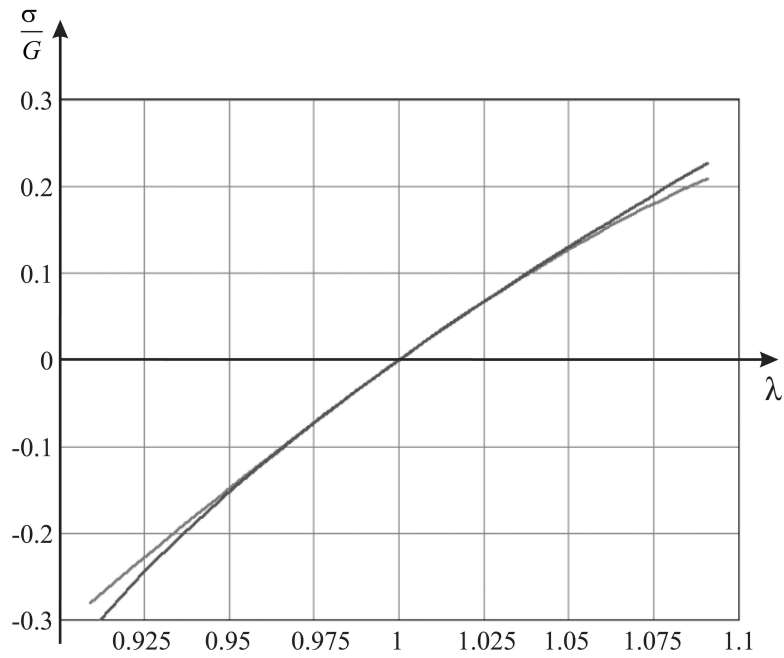


Рис. 1. Зависимость осевых напряжений от удлинения

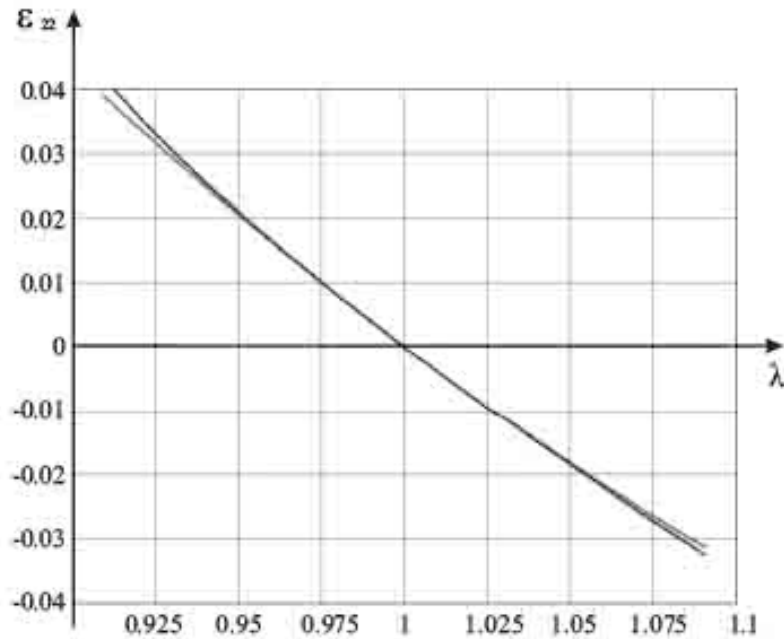


Рис. 2. Зависимость поперечных деформаций от удлинения

Выводы. В работе приведено решение задачи об «обращении» соотношений нелинейной упругости, основанное на применении термодинамического подхода к построению упругих потенциалов. Установлена общая форма связи между тензорами упругости и тензорами упругой податливости четвёртого и шестого рангов. Для изотропного материала найдены выражения коэффициентов упругой податливости второго и

третьего порядков через константы упругости второго и третьего порядков. На примере решения задачи об одноосном растяжении (сжатии) призматического образца из полимера Ertalon показано, что полученное «обращение» соотношений нелинейной упругости даёт удовлетворительное совпадение кривых $\sigma(\lambda)$ и $\varepsilon_{22}(\lambda)$, построенных по обращенным моделям, в диапазоне изменения деформаций приблизительно $\pm 0,05$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.
- [2] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: Физматлит, 2013. 320 с.
- [3] Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Ленинград: Машиностроение, 1986. 336 с.
- [4] Mihai L., Goriely A. How to characterize a nonlinear elastic material? A review on nonlinear constitutive parameters in isotropic finite elasticity // Proc. R. Soc. A. 2017. Vol. 473. P. 1–33.
- [5] Brugger K. Thermodynamic definition of higher order elastic coefficients // Phys. Rev. 1964. Vol. 133. P. A1611–A1612.
- [6] Barsch G. Relation between third-order elastic constants of single crystals and polycrystals // Journal of Applied Physics. 1968. Vol. 39, no. 8. P. 3780–3793.
- [7] Lubarda V. New estimates of the third-order elastic constants for isotropic aggregates of cubic crystals // J. Mech. Phys. Solids. 1997. Vol. 45, no. 4. P. 471–490.
- [8] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Вариант соотношений нелинейной упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 68–75.
- [9] Murnaghan F. Finite deformations of an elastic solid // American Journal of Mathematics. 1937. Vol. 59, no. 2. P. 235–260.
- [10] Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. 270 с.
- [11] Козлов В.В., Маркин А.А. Анализ определяющих соотношений нелинейно-упругих сжимаемых материалов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Т. 1, № 1. С. 133–143.
- [12] The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals / Y. Astapov, D. Khristich, A. Markin et al. // International Journal of Applied Mechanics. 2017. Vol. 9, no. 6. P. 1750080–1–1750080–15.
- [13] Соколова М.Ю., Астапов Ю.В. Упругие волны в материале Генки–Мурнагана // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. Т. 3. С. 108–120.

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, E. V. Artyukh

REVERSAL OF THE RELATIONSHIP BETWEEN STRESSES AND STRAINS IN THE MURNAGHAN MODEL

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. On the basis of thermodynamic relations, the relationship between elasticity tensors and elastic compliance tensors of the fourth and sixth ranks for an isotropic material is obtained. This made it possible to invert the nonlinear relationship between stresses and deformations in the particular case of a hyperelastic isotropic material using the Murnaghan potential. Using the Ertalon polymer as an example, an assessment of the deformation range in which the obtained inversion is correct was carried out.

Keywords: finite deformations, hyperelastic material, elastic potentials, uniaxial compression.

REFERENCES

- [1] Lurie A.I. Nonlinear elasticity theory. Moscow: Nauka, 1980. 512 c.
- [2] Markin A.A., Sokolova M.Yu. Thermomechanics of elastoplastic deformation. Moscow: FizMatLit, 2013. 320 c.
- [3] Chernykh K.F. Nonlinear theory of elasticity in engineering. Leningrad: Mashinostroenie, 1986. 336 c.
- [4] Mihai L., Goriely A. How to characterize a nonlinear elastic material? A review on nonlinear constitutive parameters in isotropic finite elasticity // Proc. R. Soc. A. 2017. Vol. 473. P. 1–33.
- [5] Brugger K. Thermodynamic definition of higher order elastic coefficients // Phys. Rev. 1964. Vol. 133. P. A1611–A1612.
- [6] Barsch G. Relation between third-order elastic constants of single crystals and polycrystals // Journal of Applied Physics. 1968. Vol. 39, no. 8. P. 3780–3793.
- [7] Lubarda V. New estimates of the third-order elastic constants for isotropic aggregates of cubic crystals // J. Mech. Phys. Solids. 1997. Vol. 45, no. 4. P. 471–490.
- [8] Markin A., Sokolova M. Variant of nonlinear elasticity relations // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. P. 1182–1188.
- [9] Murnaghan F. Finite deformations of an elastic solid // American Journal of Mathematics. 1937. Vol. 59, no. 2. P. 235–260.
- [10] Guz' A.N. Stability of elastic bodies in finite deformations. Kiev: Naukova dumka, 1973. 270 c.
- [11] Kozlov V.V., Markin A.A. The analyze of defining relationship for isotropic nonlinear-elastic compressible materials // Izvestiya TulGU. Natural sciences. 2014. T. 1, № 1. C. 133–143.
- [12] The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals / Y. Astapov, D. Khristich, A. Markin et al. // International Journal of Applied Mechanics. 2017. Vol. 9, no. 6. P. 1750080–1–1750080–15.
- [13] Sokolova M.Yu., Astapov Yu.V. Elastic waves in the Hencky-Murnaghan material // Vestnik ChGPU Yakovleva. Mechanika predelnogo sostoyaniya. 2020. T. 3. C. 108–120.

Sokolova Marina Yurievna Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.
Khristich Dmitrii Viktorovich Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Artyukh Ekaterina Viktorovna Cand. Sci. Phys. & Math., Assistant Professor, Tula State University, Tula, Russia.