Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3 (53). С. 75–85

М. В. Гасанов

ИССЛЕДОВАНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе проводится исследование некоторого класса дифференциальных уравнений с подвижными особенностями. Приводится обобщение полученных ранее результатов исследования, а именно, теоремы существования и единственности решения рассматриваемого класса уравнений на комплексную область. Получена структура аналитического приближенного решения и априорные оценки погрешности. Данные оценки были оптимизированы с помощью апостериорных. Теоретические положения были протестированы с помощью численного эксперимента.

Ключевые слова: Задача Коши, теорема существования и единственности, подвижные особые точки, априорные оценки.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.008

УДК: 517.957

1. Введение. Важную роль в описании различных физических явлений служат дифференциальные уравнения. Ввиду того, что явления, объекты и процессы, возникающие вокруг нас, имеют сложную структуру, чаще всего, для создания их математической модели, применяются нелинейные дифференциальные уравнения. Данный класс уравнений применяется, например, при исследовании волновых процессов в стержнях и балках [1], [2], в строительных конструкциях [3], [4]. Нелинейные дифференциальные уравнения имеют подвижные особые точки, что является условием, в общем случае, неразрешимости таких уравнений в квадратурах. Методы решения таких уравнений можно разделить на следующие варианты: подход в работах [1], [2] основывается на линеаризации рассматриваемых уравнений. Такой подход не учитывает

Гасанов Магомедюсуф Владимирович
`e-mail:` gasanovMV@mgsu.ru, преподаватель кафедры Высшей математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Автор выражает глубокую благодарность профессору кафедры Высшей математики НИУ МГСУ В. Н. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Поступила 15.11.2022

наличие разрывных решений в данных уравнениях, что является недостатком метода. В работах [5]-[12] дается теоретическое обоснование учета особенностей применяемого класса нелинейных дифференциальных уравнений и реализация авторского подхода исследования различных классов уравнений с подвижными особенностями. Отметим, что для нелинейных дифференциальных уравнений имеется возможность, в единичных случаях, разрешимости в квадратурах [13]-[16], а также имеет место быть анализ некоторых классов уравнений с помощью преобразования Шварца [17], асимптотического подхода [18]-[20]. В работе [22] автор пытается использовать нестандартный для классической теории метод, принцип фиксированной точки. Данный принцип используется для доказательства теоремы существования и единственности решения для уравнений с дробными производными. Рассматриваемое в статье [22] матричное уравнение Риккати было хорошо описано в работе [23], где было доказано существование подвижных особых точек, что не учитывает автор работы [22]. В публикации [24] автор приводит примеры точного решения нелинейных дифференциальных уравнений, не учитывая их специфику, получает гладкие функции, хотя при иллюстрации на графиках явно видны особые точки и линии. Если же поиск решения осуществляется в области аналитичности, то необходимо указать область поиска решения, что автором не было продемонстрировано.

В данной работе проводится обобщение результатов работы [6] на комплексную плоскость.

2. Результаты исследования. Рассмотрим класс нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка

$$y''' = a_1(z)y^2 + a_2(z)y + a_3(z). \tag{1}$$

В работе [6] приводится замена, с помощью которой уравнение (1) сводится к виду

$$y''' = y^2 + r(z). \tag{2}$$

Рассматривается задача Коши

$$y''' = y^2 + r(z), \tag{3}$$

$$\begin{cases} y(z_0) = y_0, \\ y'(z_1) = y_1, \\ y''(z_2) = y_2. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1.

Пусть

(1) z^* – подвижная особая точка для задачи Коша (3)-(4);

(2) $r(z) \in C'$ в области

$$|z - z^*| < \rho_1, \tag{5}$$

где $0 < \rho_1 = const$;

(3) $\exists M_n : \frac{\left|r^{(n)}(z^*)\right|}{n!} \leq M_n$, где $n = 0, 1, 2, ..., M_i = const$,

тогда решение задачи Коши (3)-(4) единственно, и представимо в виде мероморфной функции

$$y(z) = (z - z^*)^{-3} \sum_{0}^{\infty} C_n (z - z^*)^n, \tag{6}$$

в области
$$|z - z^*| < \rho_2, \tag{7}$$
где $\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}}\right\}$, $M = \sup\limits_n \left\{\frac{\left|r^{(n)}(z^*)\right|}{n!}\right\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство. В общем случае, учитывая структуру (6) решения уравнения (3), в окрестности подвижной особой точки, для функции $y\,(z)$, получаем следующее представление в виде обобщенного степенного ряда:
$$y\,(z) = (z - z^*)^\rho \sum_0^\infty C_n (z - z^*)^n,\ C_0 \neq 0\,.$$

С учетом условия 2, теоремы 1, функция $r(z)$ представима в виде регулярного ряда
$$r(z) = \sum_0^\infty A_n (z - z^*)^n. \tag{8}$$

Подставив (6) и (8) в уравнение (3) получаем:
$$\sum_0^\infty C_n (z - z^*)^{n+\rho-3}(n+\rho)(n+\rho-1)(n+\rho-2) =$$
$$(z - z^*)^{2\rho} \sum_0^\infty C_n^* (z - z^*)^n + \sum_0^\infty A_n (z - z^*)^n,$$
где правая и левая часть тождественно равны, откуда получаем два условия:
$$n + \rho - 3 = n + 2\rho, \tag{9}$$
$$(n-3)(n-4)(n-5)C_n = C_n^* + A_{n-6}. \tag{10}$$

Условие (9) позволяет определить значение $\rho = -3$, и характер подвижной особой точки. Из условия (10) однозначно определяем коэффициенты C_n. Однозначность коэффициентов разложения говорит о единственности разложения функции $y(z)$ в ряд.
$$C_0 = -60, C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 0,$$
$$C_6 = \tfrac{A_0}{126}, C_7 = \tfrac{A_1}{144}, C_8 = \tfrac{A_2}{180}, C_9 = \tfrac{A_3}{240}, C_{10} = \tfrac{A_4}{330}, C_{11} = \tfrac{A_5}{456}, \dots.$$

Предполагаем оценку для коэффициентов C_n:
$$\begin{aligned}
|\mathrm{C}_{6n}| &\le \frac{1}{(6n-3)(6n-4)(6n-5)+120}(M+1)^n = V_{6n},\\
|\mathrm{C}_{6n+1}| &\le \frac{1}{(6n-2)(6n-3)(6n-4)+120}(M+1)^n = V_{6n+1},\\
|\mathrm{C}_{6n+2}| &\le \frac{1}{(6n-1)(6n-2)(6n-3)+120}(M+1)^n = V_{6n+2},\\
|\mathrm{C}_{6n+3}| &\le \frac{1}{6n(6n-1)(6n-2)+120}(M+1)^n = V_{6n+3},\\
|\mathrm{C}_{6n+4}| &\le \frac{1}{(6n+1)(6n-1)6n+120}(M+1)^n = V_{6n+4},\\
|\mathrm{C}_{6n+5}| &\le \frac{1}{(6n+2)(6n+1)6n+120}(M+1)^n = V_{6n+5},
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$M=\sup_{n}\left\{\frac{\left|r^{(n)}(z^*)\right|}{n!}\right\},\ \mathrm{n}=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Используя рекуррентное соотношение (10) докажем оценку для коэффициентов C_{6n+6}.

Путем сдвига индекса в рекуррентном соотношении (10) получаем:

$$(6n+3)(6n+2)(6n+1)C_{6n+6}=C^*_{6n+6}+A_{6n},$$

или

$$(6n+3)(6n+2)(6n+1)C_{6n+6}=\sum_{1}^{6n}C_iC_{6n-i}+A_{6n}. \tag{12}$$

Далее учитывая предполагаемые оценки для C_nи формулы (11) производим оценку:

$$|C_{6n+6}|\leq\frac{1}{((6n+3)(6n+2)(6n+1)+120)}\cdot$$

$$\cdot(\sum_{1}^{6n}\frac{(M+1)^{\frac{i}{6}}(M+1)^{n-\frac{i}{6}}}{((i-3)(i-4)(i-5)+120)(6n+3-i)(6n+2-i)+120}+A_{6n})\leq$$

$$\leq\frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120}(M+1)^n\cdot(\sum_{1}^{6n}\frac{1}{(i-3)(i-4)(i-5)+120)}\times$$

$$\times\frac{1}{(6n+3-i)(6n+2-i)(6n+1-i)+120}+M)\leq\frac{(M+1)^{n+1}}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120}.$$

Проделывая аналогичную операцию для остальных коэффициентов, убеждаемся в справедливости нашей гипотезы (9), аналогично случаю C_{6n+6}.

Далее, рассмотрим ряд:

$$\sum_{0}^{\infty}V_n\left|z-z^*\right|^n=\sum_{k=1}^{\infty}V_{6k}\left|z-z^*\right|^{6k}+\sum_{k=1}^{\infty}V_{6k+1}\left|z-z^*\right|^{6k+1}+\sum_{k=1}^{\infty}V_{6k+2}\left|z-z^*\right|^{6k+2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}V_{6k+3}\left|z-z^*\right|^{6k+3}+\sum_{k=1}^{\infty}V_{6k+4}\left|z-z^*\right|^{6k+4}+\sum_{k=1}^{\infty}V_{6k+5}\left|z-z^*\right|^{6k+5}.$$

Данный ряд является мажорирующим для правильной части ряда

$$Y(z)=|z-z^*|^{-3}\sum_{0}^{\infty}C_n\left|z-z^*\right|^n$$

при справедливости оценок (9). Применяя признак Даламбера, устанавливаем область сходимости рядов вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}V_{6k+i}\left|z-z^*\right|^{6k+i}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(M+1)^{k+1}(z-z^*)^{6k+6}((6n-3)(6n-4)(6n-5)+120)}{((6n+3)(6n+2)(6n+1)+120)(M+1)^k(z-z^*)^{6k}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(M+1)(z-z^*)^6\right|\leq1,$$

$$|z-z^*|\leq\frac{1}{\sqrt[6]{M+1}}. \tag{13}$$

Таким образом убеждаемся сходимости ряда (6) в области (7).

Выбирая значение для ρ_2: $\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}}\right\}$, убеждаемся в сходимости правильной части ряда (6) в области (7).

Следующая теорема позволяет получить априорную оценку для приближенного решения

$$y_N(z) = (z-z^*)^{-3}\sum_0^N C_n(z-z^*)^n \tag{14}$$

Теорема 2. При выполнении условий 1-3 теоремы 1, для приближенного решения (14), в области определяемой соотношением (7), имеет место оценка погрешности

$$\Delta y_N(z) \le \Delta, \tag{15}$$

где

$$\Delta \le \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}}\cdot|z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)\,|z-z^*|^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120}+\right.$$
$$+\frac{|z-z^*|}{(N-1)(N-2)(N-3)+120}+\frac{|z-z^*|^2}{N(N-1)(N-2)+120}+$$
$$\left.+\frac{|z-z^*|^3}{(N+1)N(N-1)+120}+\frac{|z-z^*|^4}{(N+1)(N+2)N+120}+\frac{|z-z^*|^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\right)$$

в случае $N+1=6n$,

$$\Delta \le \frac{(M+1)^{\frac{N}{6}}\cdot|z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)\,|z-z^*|^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120}+\right.$$
$$+\frac{|z-z^*|}{(N-1)(N-2)(N-3)+120}+\frac{|z-z^*|^2}{N(N-1)(N-2)+120}+\frac{|z-z^*|^3}{N(N+1)(N-1)+120}+$$
$$\left.+\frac{|z-z^*|^4}{N(N+2)(N+1)+120}+\frac{|z-z^*|^5}{(N+1)(N+2)(Nn+3)+120}\right)$$

при $N+1=6n+1$,

$$\Delta \le \frac{(M+1)^{\frac{N-1}{6}}\cdot|z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)\,|z-z^*|^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120}+\right.$$
$$+\frac{|z-z^*|}{(N-1)(N-2)(N-3)+120}+\frac{|z-z^*|^2}{(N-1)N(N-2)+120}+\frac{|z-z^*|^3}{(N-1)(N+1)N+120}+$$
$$\left.+\frac{|z-z^*|^4}{(N+2)(N+1)N+120}+\frac{|z-z^*|^5}{(N+3)(N+2)(N+1)+120}\right)$$

для варианта $N+1=6n+2$,

$$\Delta \le \frac{(M+1)^{\frac{N-2}{6}}\cdot|z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)\,|z-z^*|^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120}+\right.$$
$$+\frac{|z-z^*|}{(N-2)(N-1)(N-3)+120}+\frac{|z-z^*|^2}{(N-2)N(N-11)+120}+\frac{|z-z^*|^3}{(N+1)N(N-1)+120}+$$
$$\left.+\frac{|z-z^*|^4}{(N+2)(N+1)N+120}+\frac{|z-z^*|^5}{(N+3)(N+2)(N+1)+120}\right)$$

если $N+1=6n+3$,

$$\Delta \le \frac{(M+1)^{\frac{N-3}{6}} \cdot |z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)\,|z-z^*|^6} \left(\frac{1}{(N-3)(N-2)(N-4)+120} + \right.$$

$$+\frac{|z-z^*|}{(N-3)(N-1)(N-2)+120} + \frac{|z-z^*|^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{|z-z^*|^3}{(N+1)N(N-1)+120} +$$

$$\left. + \frac{|z-z^*|^4}{(N+2)(N+1)N+120} + \frac{|z-z^*|^5}{(N+3)(N+2)(N+1)+120} \right)$$

для $N+1=6n+4$ и

$$\Delta \le \frac{(M+1)^{\frac{N-4}{6}} \cdot |z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)\,|z-z^*|^6} \left(\frac{1}{(N-4)(N-2)(N-3)+120} + \right.$$

$$+\frac{|z-z^*|}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \frac{|z-z^*|^2}{N(N-1)(N-2)+120} +$$

$$\left. + \frac{|z-z^*|^3}{(N+1)N(N-1)+120} + \frac{|z-z^*|^4}{(N+2)(N+1)N+120} + \frac{|z-z^*|^5}{(N+3)(N+2)(N+1)+120} \right)$$

при $N+1=6n+5$.

При этом, $\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}}\right\}, M = \max\left\{\sup\limits_n \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!}\right\}, n = 0, 1, 2, \ \ldots$.

Доказательство. Докажем оценку для случая $N+1=6n$. Имеем

$$|y(z)-y_N(z)| = \left|\sum_0^\infty C_n(z-z^*)^n - \sum_0^N C_n(z-z^*)^n\right| = \left|\sum_{n=N+1}^\infty C_n(z-z^*)^n\right| \le$$

$$\le \sum_{n=N+1}^\infty |C_n(z-z^*)^n| = \sum_{n=N+1}^\infty |C_n|\,|z-z^*|^n \le \sum_{n=N+1}^\infty |C_n|\,|z-z^*|^n =$$

$$= \sum_{k=\left[\frac{N}{6}\right]}^\infty \left(\sum_{i=1}^5 |C_{6k+i}|\,|z-z^*|^{6k+i}\right) \le$$

$$\le \sum_{k=\left[\frac{N+1}{6}\right]}^\infty \left(\sum_{i=0}^5 \frac{(M+1)^k}{(6k-3+i)\,(6k-4+i)\,(6k-5+i)+120}\,|z-z^*|^{6k+i}\right) \le$$

$$\le \frac{(M+1)^k \cdot |z-z^*|^{6k}}{1-(M+1)\,|z-z^*|^6} \left(\sum_{i=0}^5 \frac{|z-z^*|^i}{(6k-3+i)\,(6k-4+i)\,(6k-5+i)+120}\right) \le$$

$$\le \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}} \cdot |z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)\,|z-z^*|^6} \left(\sum_{i=0}^5 \frac{|z-z^*|^i}{\left(6\frac{N+1}{6}-3+i\right)\left(6\frac{N+1}{6}-4+i\right)\left(6\frac{N+1}{6}-5+i\right)+120}\right) =$$

$$= \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}} \cdot |z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)\,|z-z^*|^6} \left(\left(\sum_{i=0}^5 \frac{|z-z^*|^i}{(N-2+i)\,(N-3+i)\,(N-4+i)+120}\right)\right..$$

Следовательно,

$$\Delta \leq \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}} \cdot |z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)\,|z-z^*|^6} \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \right.$$

$$+ \frac{|z-z^*|}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \frac{|z-z^*|^2}{N(N-1)(N-2)+120} +$$

$$\left. \frac{|z-z^*|^3}{(N+1)N(N-1)+120} + \frac{|z-z^*|^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \frac{|z-z^*|^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120} \right)$$

Аналогичным образом получаем выражения оценок для вариантов $N+1=6n+1$, $N+1=6n+2$, $N+1=6n+3$, $N+1=6n+4$, $N+1=6n+5$ соответственно, при этом $\rho_2 = \min\left\{\rho_1,\ \frac{1}{\sqrt[6]{(M+1)}}\right\}$,

$$M = \max\sup_n \left\{ \frac{\left|r^{(n)}(z^*)\right|}{n!} \right\}, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\ \ldots .$$

3. Численный эксперимент. Рассмотрим задачу Коши (3)—(4) , где

$$r(z) = 0\ y(0) = 1/4,\ y'(0) = i,\ y''(0) = 1,\ z^* = 2.652717$$

Результаты расчетов для задачи Коши (3)-(4) представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты численного эксперимента.

z_1	$y_9(z_1)$	Δ_1	Δ_2
2.6523	$78.3005 + 12.2448i$	0.001	0.0001

Таблица 1. Квадратичная аппроксимация

где $y_9(z_1)$ – аналитически приближенное решение (13); Δ_1 – оценка погрешности по теореме 2; Δ_2 – апостериорная оценка. Для $\Delta_2 = 0.001$ на основании теоремы 2 имеем $N = 15$. В структуре приближенного решения (13) Слагаемые с 10 по 15 в общей сумме не превышают требуемой точности – $\varepsilon = 0.0001$. Таким образом, при $N = 9$ получаем значение $y_9(z_1)$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

4. Вывод. В данной работе представлено обобщение полученных ранее результатов для рассматриваемого класса уравнений в окрестности подвижной особой точки для комплексной области. Построено аналитическое приближенное решение, найдена априорная оценка погрешности. Представлены результаты численного эксперимента, подтверждающие теоретические результаты. Проиллюстрирован вариант оптимизации априорных оценок с помощью апостериорных.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. No 56. P. 2507–2514

[2] Чугайнова А. П. Нестационарные решения обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. No 281. P. 204–212. DOI: https://doi.org/10.1134/S0371968513020179

[3] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Journal of Physics: Conf. Series. 2020. No 1425. P. 012127

[4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // Materials Science and Engineering. 2018. No 456. P. 012122

[5] Орлов В. Н., Коллэ К. В. Аналитическое приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4(26). С. 96–108

[6] Orlov V. N, Gasanov M. V. Exact Criteria for the Existence of a Moving Singular Point in a Complex Domain for a Nonlinear Differential Third-Degree Equation with a Polynomial Seventh-Degree Right-Hand Side // Axioms 2022. No 11. P. 222. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms11050222

[7] Orlov V. N., Gasanov M. V. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // Mathematics. 2022, No 10. P. 3984. DOI: https://doi.org/10.3390/math10213984

[8] Orlov V., Gasanov M. Existence and Uniqueness Theorem for a Solution to a Class of a Third-Order Nonlinear Differential Equation in the Domain of Analyticity // Axioms. 2022. No 11. P. 203. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms11050203

[9] Orlov V., Gasanov M. Analytic Approximate Solution in the Neighborhood of a Moving Singular Point of a Class of Nonlinear Equations // Axioms. 2022. No 11. P. 637. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms11110637

[10] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. No 24. P. 174–186 DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1727

[11] Орлов В. Н., Захарова П. В. Об одном расширении класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с подвижной особой точкой // Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22. № 3. С. 607–612

[12] Орлов В. Н., Кудряшова Н. В. Теорема существования решения одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с полиномиальной правой частью третьей степени в области аналитичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 1(27). С. 141–149.

[13] Соболевский С. Л. // Подвижные особые точки полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2004. № 40. С. 756–762. DOI: doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046859.46244.5e

[14] Соболевский С. Л. Подвижные особые точки алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. № 41. С. 1092-1099. DOI: doi.org/10.1007/s10625-005-0260-9

[15] Вересович П. П., Яблонский А. И. О подвижных особых точках систем дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1977. № 13. С. 1932–1939

[16] Писаренок В. П., Яблонский А. И. Дифференциальное уравнение, имеющее решения с алгебраическими подвижными особыми точками // Дифференц. уравнения. 1976. № 12. С. 928–930

[17] Chichurin A., Filipuk G.The properties of certain linear and nonlinear differential equations of the fourth order arising in beam models // IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. No 1425. P. 012107. DOI:10.1088/1742 6596/1425/1/0121074.

[18] Astashova I. V. On the asymptotic classification of solutions to non-linear equations of the third and fourth orders with powernon-linearity // Differential and Difference Equations with Applications. In Part of the Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Book Series; Springer: Cham, Switzerland, 2016. Vol. 164. pp 191-203.

[19] Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Springer Proc. Math. Stat. 2016. No 164. P. 191–203. DOI: 10.1007/978-3-319-32857-7_18

[20] Kruskal M. D., Joshi N., Halburd R. Analytic and asymptotic methods for nonlinear singularity analysis: a review and extensions of tests for the Painleve property // Integrability of Nonlinear Systems. pp 171–205. DOI: 10.1007/BFb011369616.

[21] Caruntu B. Approximate Analytical Solutions for Systems of Fractional Nonlinear Integro-Differential Equations Using the Polynomial Least Squares Method // Fractal Fract. 2021. No. 5. P. 198. DOI: 10.3390/fractalfract5040198

[22] Angelova V., Hached M., Jbilou K. Sensitivity of the Solution to Nonsymmetric Differential Matrix Riccati Equation // Mathematics. 2021. No 9. P. 855. DOI: 10.3390/math9080855

[23] Орлов В. Н. Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. Чебоксары: Перфектум, 2012. 112 с.

[24] Ahmed S. A., Qazza A., Saadeh R. Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations via the New Double Integral Transform Combined with Iterative Method // Axioms. 2022. 11. P. 247. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms11060247

M. V. Gasanov

INVESTIGATION IN THE NEIGHBORHOOD OF A MOVING SINGULAR POINT OF A CERTAIN CLASS OF A THIRD-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION FOR A COMPLEX DOMAIN

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we study a certain class of differential equations with moving singularities. A generalization of the previously obtained results of the study, namely, the existence and uniqueness theorem for the solution of the considered class of equations, to the complex domain is given. The structure of the analytical approximate solution and a priori error estimates are obtained. These estimates were optimized using post hoc estimates. Theoretical provisions were tested using a numerical experiment.

Keywords: Cauchy problem, existence and uniqueness theorem, moving singular points, a priori estimates

REFERENCES

[1] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. No 56. P. 2507–2514

[2] Chugainova A. P. Non-stationary solutions of the generalized Korteweg-de Vries-Burgers equation // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. No 281. P. 204-212. DOI: https://doi.org/10.1134/S0371968513020179

[3] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Journal of Physics: Conf. Series. 2020. No 1425. P.012127

[4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // Materials Science and Engineering. 2018. No 456. P. 012122

[5] Orlov V. N., Kolle K. V. Analytical approximation solution of one non-linear differential equation of the third order with a polynomial right hand side of the second degree in neighborhood of a moving singular point // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. No. 4(26). P. 96–108

[6] Orlov V. N, Gasanov M. V. Exact Criteria for the Existence of a Moving Singular Point in a Complex Domain for a Nonlinear Differential Third-Degree Equation with a Polynomial Seventh-Degree Right-Hand Side // Axioms 2022. No 11. P. 222. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms11050222

[7] Orlov V. N., Gasanov M. V. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // Mathematics. 2022, No 10. P. 3984. DOI: https://doi.org/10.3390/math10213984

[8] Orlov V., Gasanov M. Existence and Uniqueness Theorem for a Solution to a Class of a Third-Order Nonlinear Differential Equation in the Domain of Analyticity // Axioms. 2022. No 11. P. 203. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms11050203

[9] Orlov V., Gasanov M. Analytic Approximate Solution in the Neighborhood of a Moving Singular Point of a Class of Nonlinear Equations // Axioms. 2022. No 11. P. 637. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms11110637

[10] Orlov V. N., Leontieva T. Yu. O expanding the domain for the analytical approximate solution one class of nonlinear differential equations of the second order in the complex domain // Vestn. Myself. state tech. university Ser. Phys.-Math. science. 2020. No 24. P. 174–186 DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1727

Gasanov Magomedyusuf Vladimirovich, Teacher, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

[11] Orlov V. N., Zakharova P. V. On an extension of the class of nonlinear differential equations of the third order with a moving singular dot // Bulletin Bashkir University. 2017. Vol. 22. No. 3. pp. 607–612

[12] Orlov V. N., Kudryashova N. V. Existence theorem for a solution of one nonlinear differential equation of the third order with polynomial right-hand side of the third degree in the field analyticity // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State 2016. No. 1(27). pp. 141–149.

[13] Sobolevsky S. L. // Moving singular points polynomial ordinary differential equations // Differential equations. 2004. No. 40. S. 756–762. DOI: doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046859.46244.5e

[14] Sobolevsky S. L. Movable singular points of algebraic ordinary differential equations // Differ. equations. 2005. No. 41. S. 1092-1099. DOI: doi.org/10.1007/s10625-005-0260-9

[15] Veresovich P. P., Yablonsky A. I. O moving singular points of systems of differential equations of the third order // Differ. equations. 1977. No. 13. S. 1932–1939

[16] Pisarenok V. P., Yablonsky A. I. differential an equation that has solutions with algebraic movables singular points // Differ. equations. 1976. No. 12. S. 928–930

[17] Chichurin A., Filipuk G.The properties of certain linear and linear differential equations of the fourth order arising in beam models // IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. No. 1425. P. 012107. DOI:10.1088/1742 6596/1425/1/0121074.

[18] Astashova I. V. On the asymptotic classification of solutions to non-linear equations of the third and fourth orders with powernon-linearity // Differential and Difference Equations with Applications. In part of the Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Book series; Springer: Cham, Switzerland, 2016. Vol. 164.pp 191-203.

[19] Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to linear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Springer Proc. Math. stat. 2016. No. 164. P. 191–203. DOI: 10.1007/978-3-319-32857-7_18

[20] Kruskal M. D., Joshi N., Halburd R. Analytic and asymptotic methods for nonlinear singularity analysis: a review and extensions of tests for the Painleve property // Integrability of Nonlinear systems. pp 171-205. DOI: 10.1007/BFb011369616.

[21] Caruntu B. Approximate Analytical Solutions for Systems of Fractional Nonlinear Integro-Differential Equations Using the Polynomial Least Squares Method // Fractal Fract. 2021. No. 5. P. 198. DOI: 10.3390/fractalfract5040198

[22] Angelova V., Hached M., Jbilou K. Sensitivity of the Solution to Nonsymmetric Differential Matrix Riccati Equation // Mathematics. 2021. No 9. P. 855. DOI: 10.3390/math9080855

[23] Orlov V. N. Approximate solution method for scalar and matrix Riccati differential equations. Cheboksary: Perfectum, 2012. 112 p.

[24] Ahmed S. A., Qazza A., Saadeh R. Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations via the New Double Integral Transform Combined with Iterative Method // axioms. 2022. 11. P. 247. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms11060247