Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3 (53). С. 86–100

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

О ДВУХ ОСНОВНЫХ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФОРМАХ ПОТЕНЦИАЛА АСИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРОВ СИЛОВЫХ И МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МЕХАНИКЕ ГЕМИТРОПНЫХ ТЕЛ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе обсуждаются некоторые вопросы моделирования гемитропных упругих сред. Вводятся две основные квадратичные энергетические формы потенциала напряжений в терминах псевдотензоров. Указанные энергетические формы полагаются абсолютными инвариантами по отношению к произвольным преобразованиям трехмерного Евклидова пространства (в том числе, при зеркальных отражениях). В результате применения специальных координатных представлений полуизотропных (гемитропных) псевдотензоров четвертого ранга можно определить все 9 ковариантно постоянных определяющих псевдоскаляров, характеризующих гемитропную упругую среду. Выделены симметричные и антисимметричные части асимметричных тензоров и псевдотензоров деформаций и напряжений. Выполнено сравнение и получены соотношения, связывающие определяющие скаляры и псевдоскаляры первой и второй основных естественных энергетических форм, в том числе, с конвенционально используемыми гемитропными псевдоскалярами: модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характерной микродлиной (являющейся псевдоскаляром отрицательного веса, чувствительным к отражениям трехмерного пространства), и шестью безразмерными псевдоскалярами.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, квадратичная энергетическая форма, потенциал напряжений, определяющий псевдотензор, характерная микродлина, хиральная среда, микрополярный гемитропный континуум

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010

УДК: 539.374

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 20-01-00666.

Поступила 20.09.2022

1. Введение. Модели механики упругого поведения гемитропных сред основываются на энергетических квадратичных формах микрополярных упругих потенциалов [1–3]. Представление упругих потенциалов, описывающих деформирование сплошных микрополярных сред, в общем случае, также требует привлечения формализма псевдотензорной алгебры [4–12]. Особенно актуальной она становится при моделировании процессов деформирования материалов, проявляющих полуизотропные (гемитропные, демитропные) свойства, определяющие тензоры и псевдотензоры которых обязаны быть чувствительными к зеркальным отражениям трехмерного пространства. Предполагается, что упругий потенциал является абсолютным инвариантом по отношению к произвольным преобразованиям пространства, в том числе к зеркальным отражениям. В общем анизотропном случае упругий потенциал характеризуется тремя определяющими псевдотензорами четвертого ранга и задается сбалансированной по псевдотензорным весам суммой абсолютных скаляров.

Аккуратное применение специальных координатных представлений без труда позволяют редуцировать линейное анизотропное микрополярное тело к гемитропному, характеризующемуся девятью определяющими псевдоскалярами. В конвенциональном случае, такими псевдоскалярами будут: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная микродлина, и 6 псевдоскаляров, не имеющих физической размерности. Характерная микродлина оказывается псевдоскаляром отрицательного веса -1, и проявляет чувствительность к отражениям и инверсиям пространства.

Существуют различные варианты представлений энергетических форм потенциалов асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных сред. В настоящей работе проводится сравнение первой и второй основных естественных энергетических форм и получены соотношения, связывающие определяющие скаляры и псевдоскаляры, в том числе, с конвенционально используемыми гемитропными псевдоскалярами.

2. Необходимые понятия и уравнения из алгебры и анализа псевдотензоров в евклидовых пространствах заданной размерности. Рассмотрим N-мерное евклидово пространство, параметризованное координатами x^k, с локальной базисной системой $\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, N)$. Фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e [10–12] и его целые степени играют первостепенную роль в геометрии многомерных пространств. В N-мерном пространстве он определяется как косое произведение [13, p. 63–65] ковариантных базисных абсолютных векторов

$$e = \lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \ldots, \underset{N}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor. \tag{1}$$

Далее символом в квадратных скобках сверху корневого символа псевдотензора будем отмечать его вес, а символом в круглых скобках снизу — его ранг. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, не отражается нами в обозначениях. Вес будет опущен для фундаментальных символов, таких как фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, символы перестановки, и он также применим к абсолютным тензорам с нулевым весом. Ранг тензора (псевдотензора) будет опускаться, где это очевидно.

Псевдотензор $\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}$ веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней фундаментального ориентирующего псевдоскаляра можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$\underset{(n)}{T}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} = e^{-g}\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}. \tag{2}$$

Легко показать, что в евклидовом пространстве справедливо следующее соотношение

$$e^2 = g > \overset{[2]}{0}, \tag{3}$$

где g — детерминант метрического тензора g_{ij}: $g = \det(g_{ij})$. Условие $g = 1$ ($|e| = 1$) является фундаментальным для развития общей теории относительности [14] и, например, математической теории пластичности [15]. Важно отметить, что в этом случае абсолютные тензоры совпадают с псевдотензорами с точностью до знака, учитывая уравнение (2) получим

$$\underset{(n)}{T}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} = (\operatorname{sgn} e)^{-g}\,\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}. \tag{4}$$

Откуда следует, что псевдотензоры меняют свой знак на противоположный при изменении ориентации координатного репера если их вес нечетный.

Ковариантная производная псевдотензорного поля $\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}$ была введена О. Вебленом [8, 9] и вычисляется согласно [6, 10]:

$$\begin{aligned}\nabla_p\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} = \partial_p\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} + \Gamma^{h_1}_{qp}\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{qh_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} + \cdots + \Gamma^{h_s}_{qp}\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots q\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} - \\ - \Gamma^{q}_{k_1p}\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot qk_2\ldots k_r} - \cdots - \Gamma^{q}_{k_rp}\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots q} - g\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}\frac{\partial_p e}{e}.\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}.$$

Интересующийся читатель может ознакомиться с альтернативными реализациями ковариантного дифференцирования псевдотензоров (см., например, [16]).

Заданное псевдотензорное поле $\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}$ ранга n и веса g является ковариантно постоянным, если оно удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$\nabla_p\overset{[g]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} = \overset{[g]}{0}. \tag{6}$$

Заметим, что уравнению (6) удовлетворяют тензоры и псевдотензоры с постоянными компонентами.

3. Тензоры и псевдотензоры с постоянными компонентами. Тензором (псевдотензором) с постоянными компонентами [4, стр. 164] называется тензор (псевдотензором), сохраняющий (retain) неизменными (unaltered) все свои компоненты при любых линейных преобразованиях координатного репера: самые важные из них — повороты, преобразования масштабирования (scaling), центральная инверсия, зеркальные отражения.

В монографии [4, стр. 164–176] предлагается общий алгоритм построения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами для целых положительных (отрицательных) весов. Например, общий вид псевдотензора $\overset{[g]}{C}{}^{h_1h_2\ldots h_s}_{k_1k_2\ldots k_r}$ с постоянными компонентами целого отрицательного веса представляется формулой

$$\overset{[g]}{C}{}^{h_1h_2\ldots h_s}_{k_1k_2\ldots k_r} = \sum_{P=1}^{r!} \lambda_P \delta^{h_1}_{\{k_1} \delta^{h_2}_{k_2} \cdots \delta^{h_s}_{k_s} \underbrace{\overset{[-1]}{\epsilon}_{k_{s+1}\ldots k_{s+N}} \cdots \overset{[-1]}{\epsilon}_{k_{r-N+1}\ldots k_r\}_P}}_{|g|}, \tag{7}$$

где r — число ковариантных индексов, s — число контравариантных индексов, N — размерность пространства, g — вес, целое отрицательное число, λ_P $(P = 1, 2, \ldots, r!)$ — произвольные постоянные (абсолютные инварианты), P — перестановка ряда индексов

$$k_1, \ldots, k_s, \ldots, k_{s+N}, \ldots, k_{r-N+1}, \ldots, k_r.$$

В формуле (7) по ковариантным индексам, заключенным в фигурные скобки производятся всевозможные перестановки. Число ковариантных, контравариантных индексов и вес псевдотензора должны удовлетворять ограничению

$$r = s + N|g|, \tag{8}$$

откуда

$$r \geq s. \tag{9}$$

Если условие (8) не выполняется, то псевдотензор $\overset{[g]}{C}{}^{h_1h_2\ldots h_s}_{k_1k_2\ldots k_r}$ с постоянными компонентами будет равен нулю.

Отметим, что псевдотензорное поле $\overset{[g]}{C}{}^{h_1h_2\ldots h_s}_{k_1k_2\ldots k_r}$ с постоянными компонентами является ковариантно постоянным и удовлетворяет псевдотензорному уравнению (6) при условии

$$\nabla_s \lambda_P = 0\,. \tag{10}$$

Обратим внимание, что псевдотензоры вида (7) не составляют полного набора ковариантно постоянных абсолютных тензоров. Примеры ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров подробно обсуждались в работах (см. [4, 6, 17–19]). Среди них фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e и его алгебраические степени, обобщенные δ–символы, ϵ–символы, e–тензоры, метрические тензоры g^{kh}, g_{hk} которые часто используются в микрополярных теориях механики сплошных сред [10–12,20,21].

Рассмотрим важный для приложений пример. Абсолютный тензор четвертого ранга C^{il}_{sm} с постоянными компонентами согласно (7) можно представить в виде

$$C^{il}_{sm} = a\delta^i_s\delta^l_m + c\delta^l_s\delta^i_m\,, \tag{11}$$

где a и c — абсолютные инварианты (абсолютные скаляры).

Уравнение (11), справедливое в любой системе координат в декартовых координатах можно представить следующим образом

$$C_{ilsm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + c\delta_{ls}\delta_{im} \,. \tag{12}$$

Пусть $N = 3$, тогда, воспользовавшись соотношением (8), для тензора четвертого ранга получим

$$\begin{cases} r - s = 3|g|, \\ r + s = 4. \end{cases} \tag{13}$$

Выражая r и s, получим

$$\begin{cases} 0 \leq 2r = 4 + 3|g|, \\ 0 \leq 2s = 4 - 3|g|. \end{cases} \tag{14}$$

Решениями системы (14) должны быть целые неотрицательные числа, откуда немедленно заключаем, что $|g|$ должен быть четным неотрицательным целым числом, удовлетворяющим неравенству

$$|g| \leq \frac{4}{3}, \tag{15}$$

откуда следует, что $|g| = 0$, и, следовательно, невозможно построить в трехмерном пространстве псевдотензор четвертого ранга с постоянными компонентами. В пространствах большей размерности ситуация может измениться.

Сравнивая представление для абсолютного тензора четвертого ранга с постоянными компонентами (12) и представление полуизотропного тензора [22–27] в декартовой системе координат

$$H_{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + b\delta_{il}\delta_{sm} + c\delta_{im}\delta_{sl} \,, \tag{16}$$

заметим, что

$$H_{islm} = C_{islm} + b\delta_{il}\delta_{sm} \,, \tag{17}$$

где C_{islm} обозначает абсолютный тензор четвертого ранга с постоянными компонентами.

Формула (17) в произвольной системе координат примет вид

$$H^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m} = C^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m} + bg^{il}g_{sm} \,, \tag{18}$$

где $C^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}$ — тензор с постоянными коэффициентами в смысле Б.Г. Гуревича [4], являющийся к тому же ковариантно постоянным.

Ковариантно постоянные псевдотензорные поля четвертого ранга произвольного веса можно получить из асболютных тензорных полей с помощью преобразования (2). Запишем представление полуизотропного (гумитропного, демитропного) псевдотензорного поля четвертого ранга веса g в виде:

$$\overset{[g]}{H}{}^{islm} = \overset{[g]}{a} g^{is}g^{lm} + \overset{[g]}{b} g^{il}g^{sm} + \overset{[g]}{c} g^{im}g^{sl} \,, \tag{19}$$

где $\overset{[g]}{a}$, $\overset{[g]}{b}$, $\overset{[g]}{c}$ — псевдоинварианты веса g.

Ковариантно постоянное псевдотензорное поле четвертого ранга должно удовлетворять уравнению:

$$\nabla_k \overset{[g]}{H}{}^{islm} = \overset{[g]}{0}. \tag{20}$$

При этом необходимо выполнение следующих дифференциальных условий

$$\nabla_k \overset{[g]}{a} = \overset{[g]}{0}, \qquad \nabla_k \overset{[g]}{b} = \overset{[g]}{0}, \qquad \nabla_k \overset{[g]}{c} = \overset{[g]}{0}. \tag{21}$$

Условия (21) можно записать, согласно (5), в виде дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \partial_k \overset{[g]}{a} - g\overset{[g]}{a}\dfrac{\partial_k e}{e} = \overset{[g]}{0}, \\ \partial_k \overset{[g]}{b} - g\overset{[g]}{b}\dfrac{\partial_k e}{e} = \overset{[g]}{0}, \\ \partial_k \overset{[g]}{c} - g\overset{[g]}{c}\dfrac{\partial_k e}{e} = \overset{[g]}{0}. \end{cases} \tag{22}$$

или

$$\begin{cases} \partial_k(\ln|\overset{[g]}{a}| - g\ln|e|) = \overset{[g]}{0}, \\ \partial_k(\ln|\overset{[g]}{b}| - g\ln|e|) = \overset{[g]}{0}, \\ \partial_k(\ln|\overset{[g]}{c}| - g\ln|e|) = \overset{[g]}{0}. \end{cases} \tag{23}$$

Интегрируя полученные уравнения (23), заключаем, что

$$\overset{[g]}{a} = e^g a, \qquad \overset{[g]}{b} = e^g b, \qquad \overset{[g]}{c} = e^g c, \tag{24}$$

где a, b, c — абсолютные инварианты, более того, абсолютные постоянные.

Подставляя (24) в представление (19) получим

$$\overset{[g]}{H}{}^{islm} = e^g a g^{is} g^{lm} + e^g b g^{il} g^{sm} + e^g c g^{im} g^{sl} = e^g H^{islm}. \tag{25}$$

Последнее обстоятельство подтверждает тот факт, что ковариантно постоянные псевдотензорные поля четвертого ранга могут быть получены из ковариантно постоянных абсолютных тензорных полей обычным преобразованием (2) с помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра.

4. Первая основная естественная форма потенциала силовых и моментных напряжений. Микрополярное тело называется гемитропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются при поворотах координатного репера, т.е. полуизотропны, но, вообще говоря, изменяются при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного Евклидова пространства. Введем микрополярный упругий потенциал $\mathscr{U}$ [20, 21], рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с псевдотензорными аргументами

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(\epsilon_{(ij)}, \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}, \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}, \kappa_i), \tag{26}$$

где

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \epsilon_{ijk}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{k}, \quad \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i} = \overset{[+1]}{\phi}{}^{i} - \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\nabla_k u_l, \quad \kappa_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijs}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{[js]}. \tag{27}$$

Обычно, аргументами упругого потенциала выступают абсолютные тензоры. Здесь существенным является использование формализма псевдотензоров, обеспечивающего чувствительность определяющих псевдоскаляров к преобразованиям инверсии пространства и зеркальным отражениям.

Упругий потенциал $\mathscr{U}$ по физическому смыслу является объективной величиной и не может меняться при повороте осей системы координат. Поэтому он (также как и его первая вариация $\delta\mathscr{U}$) является абсолютным скаляром. Первая вариация упругого потенциала представляется сбалансированной по весам суммой абсолютных скаляров

$$\delta\mathscr{U} = t^{(ij)}\delta\epsilon_{(ij)} + \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)}\delta\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)} + 2\overset{[-1]}{\tau}_i\delta\overset{[+1]}{\varphi}{}^i + 2\mu^i\delta\kappa_i, \tag{28}$$

где $\overset{[-1]}{\tau}_j$ — ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$2\overset{[-1]}{\tau}_j = -\epsilon_{jik}t^{[ik]}, \quad t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj}\overset{[-1]}{\tau}_j. \tag{29}$$

Ассоциированный (сопутствующий) абсолютный вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (29)

$$2\mu^i = \epsilon^{iks}\overset{[-1]}{\mu}_{[ks]}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{[is]} = e_{isj}\mu^j. \tag{30}$$

В итоге, определяющие уравнения примут вид:

$$t^{(ij)} = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\epsilon_{(ij)}}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)} = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}}, \quad 2\overset{[-1]}{\tau}_i = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\overset{[+1]}{\varphi}{}^i}, \quad 2\mu^i = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\kappa_i}. \tag{31}$$

В качестве потенциала $\mathscr{U}$, который как указывалось выше инвариантен относительно поворотов и трансляций пространства, а также — относительно преобразований инверсии пространства и зеркальных отражений. В дальнейшем, первой основной энергетической формой гемитропного тела будем называть форму:

$$\begin{aligned}\mathscr{U} = \underset{1}{A}g^{is}g^{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + \underset{2}{\overset{[-2]}{A}}g_{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \underset{3}{A}g^{is}g^{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)}+\\ + \underset{4}{\overset{[-2]}{A}}g_{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(il)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(sm)} + \underset{5}{\overset{[-2]}{A}}g_{is}\overset{[+1]}{\varphi}{}^i\overset{[+1]}{\varphi}{}^s + \underset{6}{A}g^{is}\kappa_i\kappa_s+\\ + \underset{7}{\overset{[-1]}{A}}g^{is}g_{lm}\epsilon_{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \underset{8}{\overset{[-1]}{A}}\epsilon_{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} + \underset{9}{\overset{[-1]}{A}}\kappa_i\overset{[+1]}{\varphi}{}^i,\end{aligned} \tag{32}$$

где определяющие псевдоинварианты $\underset{\mathfrak{a}}{\overset{[g]}{A}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \ldots, 9;\ g = 0, \pm1, \pm2$) с соответствующими весами собственно и задают модель гемитропной упругой среды. Только три из них, а именно $\underset{7}{\overset{[-1]}{A}}$, $\underset{8}{\overset{[-1]}{A}}$, $\underset{9}{\overset{[-1]}{A}}$, оказываются чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства.

Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений в терминах псевдотензоров в произвольной криволинейной системе координат получаются в виде

$$\begin{cases} t^{(is)} = 2\underset{1}{A}g^{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + 2\underset{3}{A}g^{il}g^{sm}\epsilon_{(lm)} + \underset{7}{\overset{[-1]}{A}}g^{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \underset{8}{\overset{[-1]}{A}}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}, \\ \overset{[-1]}{\mu}_{(is)} = 2\underset{2}{\overset{[-2]}{A}}g_{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + 2\underset{4}{\overset{[-2]}{A}}g_{il}g_{sm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \underset{7}{\overset{[-1]}{A}}g_{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + \underset{8}{\overset{[-1]}{A}}\epsilon_{(is)}, \\ 2\overset{[-1]}{\tau}_i = 2\underset{5}{\overset{[-2]}{A}}g_{is}\overset{[+1]}{\varphi}{}^s + \underset{9}{\overset{[-1]}{A}}\kappa_i, \\ 2\mu^i = 2\underset{6}{A}g^{is}\kappa_s + \underset{9}{\overset{[-1]}{A}}\overset{[+1]}{\varphi}{}^i. \end{cases} \tag{33}$$

Вместо девяти определяющих псевдоскаляров $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{A}}$, появляющихся в выражении для упругого потенциала (32), удобнее ввести другие определяющие псевдоскаляры:

$$\begin{array}{lll} \underset{1}{A} = G\nu(1-2\nu)^{-1}, & \overset{[-2]}{\underset{2}{A}} = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}c_3, & \underset{3}{A} = G, \\ \overset{[-2]}{\underset{4}{A}} = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}, & \overset{[-2]}{\underset{5}{A}} = 2G\overset{[-2]}{c}_1, & \underset{6}{A} = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\overset{[+2]}{c}_2, \\ \overset{[-1]}{\underset{7}{A}} = G\overset{[-1]}{L}c_4, & \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} = G\overset{[-1]}{L}c_5, & \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} = G\overset{[-1]}{L}c_6, \end{array} \tag{34}$$

с тем чтобы в итоге пришлось бы иметь дело с двумя размерными и семью безразмерными параметрами:

G — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений);
ν — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности);
$\overset{[-1]}{L}$ — характеристическая микродлина;
$\overset{[-2]}{c}_1$, $\overset{[+2]}{c}_2$, c_3, c_4, c_5, c_6 — не имеющие физической размерности скаляры и псевдоскаляры.

В результате вместо (33) приходим к определяющим уравнениям гемитропной микрополярной среды:

$$\begin{cases} t^{(is)} = 2G\left(\nu(1-2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm}\right)\epsilon_{(lm)} + G\overset{[-1]}{L}(c_4g^{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + c_5\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}), \\ \overset{[-1]}{\mu}_{(is)} = 2G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}(c_3g_{is}g_{lm} + g_{il}g_{sm})\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + G\overset{[-1]}{L}(c_4g_{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + c_5\epsilon_{(is)}), \\ \overset{[-1]}{\tau}_i = 2G\overset{[-2]}{c}_1g_{is}\overset{[+1]}{\varphi}{}^s + \dfrac{1}{2}G\overset{[-1]}{L}c_6\kappa_i, \\ \mu^i = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\overset{[+2]}{c}_2g^{is}\kappa_s + \dfrac{1}{2}G\overset{[-1]}{L}c_6\overset{[+1]}{\varphi}{}^i. \end{cases} \tag{35}$$

5. Вторая основная естественная форма потенциала силовых и моментных напряжений. Введем далее в рассмотрение микрополярный упругий потенциал $\mathscr{U}$, рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема $d\tau$,[1] с естественными псевдотензорными асимметричными аргументами (пока нет разделения на симметричную и антисимметричную части)

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(\epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s}), \tag{36}$$

где ϵ_{ij} — асимметричный тензор деформации; $\overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s}$ — псевдотензор деформации изгиба–кручения. Упругий потенциал полагается абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим в том числе от зеркальных отражений и центральной инверсии трехмерного пространства.

[1]По поводу инвариантных и псевдоинвариантных элементов объема см., например, публикации [?, ?].

Определяющие уравнения в этом случае примут вид

$$t^{ij} = \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \epsilon_{ij}}, \qquad \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot k}_{i\cdot}}. \tag{37}$$

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела вторая основная энергетическая форма в произвольной системе координат записывается в виде:

$$2\mathscr{U} = \underset{1}{H}{}^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \underset{2}{\overset{[-2]}{H}}{}^{islm}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{is}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm} + \underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{islm}\epsilon_{is}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm}. \tag{38}$$

Отметим, что единственным определяющим псевдотензором четвертого ранга чувствительным к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства оказывается определяющий псевдотензор $\underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{islm}$ отрицательного веса -1.

Воспользовавшись определяющими соотношениями (37), получим

$$\begin{aligned} t^{is} &= \underset{1}{H}{}^{islm}\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot m}_{l\cdot}, \\ \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot s} &= \underset{2}{\overset{[-2]}{H}}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot m}_{l\cdot} + \frac{1}{2}\underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{lmi\cdot}_{\cdots s}\epsilon_{lm}. \end{aligned} \tag{39}$$

Для определяющих полуизотропных тензоров и псевдотензоров координатные представления (19) получаются в форме [27]

$$\begin{aligned} \underset{1}{H}{}^{islm} &= \underset{1}{a}g^{is}g^{lm} + \underset{1}{b}g^{il}g^{sm} + \underset{1}{c}g^{im}g^{sl}, \\ \underset{2}{\overset{[-2]}{H}}{}^{islm} &= \underset{2}{\overset{[-2]}{a}}g^{is}g^{lm} + \underset{2}{\overset{[-2]}{b}}g^{il}g^{sm} + \underset{2}{\overset{[-2]}{c}}g^{im}g^{sl}, \\ \underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{islm} &= \underset{3}{\overset{[-1]}{a}}g^{is}g^{lm} + \underset{3}{\overset{[-1]}{b}}g^{il}g^{sm} + \underset{3}{\overset{[-1]}{c}}g^{im}g^{sl}. \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь $\underset{\mathfrak{a}}{\overset{[g]}{a}}$, $\underset{\mathfrak{a}}{\overset{[g]}{b}}$, $\underset{\mathfrak{a}}{\overset{[g]}{c}}$, $(\mathfrak{a} = 1,2,3; g = 0,-1,-2)$ — девять определяющих псевдоскаляров гемитропного микрополярного упругого тела. “Метаиндекс” $\mathfrak{a}$ — нумерует определяющие псевдоскаляры. С точки зрения тензорной алгебры $\underset{\mathfrak{a}}{\overset{[g]}{a}}$, $\underset{\mathfrak{a}}{\overset{[g]}{b}}$, $\underset{\mathfrak{a}}{\overset{[g]}{c}}$, как минимум, являются полуизотропными (гемитропными) инвариантами.

Подставив координатные представления (40) в определяющие соотношения (37), получим

$$\begin{cases} t^{is} = (\underset{1}{a}g^{is}g^{lm} + \underset{1}{b}g^{il}g^{sm} + \underset{1}{c}g^{im}g^{sl})\epsilon_{lm} + \\ \qquad + \frac{1}{2}(\underset{3}{\overset{[-1]}{a}}g^{is}g^{lm} + \underset{3}{\overset{[-1]}{b}}g^{il}g^{sm} + \underset{3}{\overset{[-1]}{c}}g^{im}g^{sl})\overset{[+1]}{\kappa}_{lm}, \\ \overset{[-1]}{\mu}{}^{is} = (\underset{2}{\overset{[-2]}{a}}g^{is}g^{lm} + \underset{2}{\overset{[-2]}{b}}g^{il}g^{sm} + \underset{2}{\overset{[-2]}{c}}g^{im}g^{sl})\overset{[+1]}{\kappa}_{lm} + \\ \qquad + \frac{1}{2}(\underset{3}{\overset{[-1]}{a}}g^{is}g^{lm} + \underset{3}{\overset{[-1]}{b}}g^{il}g^{sm} + \underset{3}{\overset{[-1]}{c}}g^{im}g^{sl})\epsilon_{lm}. \end{cases} \tag{41}$$

Представим далее псевдотензоры напряжений и деформаций в виде суммы симметричной и антисимметричной частей

$$
\begin{aligned}
&t^{is} = t^{(is)} + t^{[is]}, \qquad && \overset{[-1]}{\mu}{}_{is} = \overset{[-1]}{\mu}{}_{(is)} + \overset{[-1]}{\mu}{}_{[is]},\\
&\epsilon_{is} = \epsilon_{(is)} + \epsilon_{[is]}, \qquad && \overset{[+1]}{\kappa}{}_{is} = \overset{[+1]}{\kappa}{}_{(is)} + \overset{[+1]}{\kappa}{}_{[is]}\,.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Выделяя симметричные и антисимметричные части в (41), получим

$$
\begin{aligned}
t^{is} = {} & \Big(\underset{1}{a}g^{is}g^{lm} + \frac{1}{2}\underset{1}{b}(g^{il}g^{sm} + g^{sl}g^{im}) + \frac{1}{2}\underset{1}{c}(g^{im}g^{sl} + g^{sm}g^{il})\Big)\epsilon_{lm} + \\
& + \frac{1}{2}\Big(\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}g^{is}g^{lm} + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{b}}(g^{il}g^{sm} + g^{sl}g^{im}) + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{c}}(g^{im}g^{sl} + g^{sm}g^{il})\Big)\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm} + \\
& + \frac{1}{2}\Big(\underset{1}{b}(g^{il}g^{sm} - g^{sl}g^{im}) + \underset{1}{c}(g^{im}g^{sl} - g^{sm}g^{il})\Big)\epsilon_{lm} + \\
& + \frac{1}{4}\Big(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}}(g^{il}g^{sm} - g^{sl}g^{im}) + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}}(g^{im}g^{sl} - g^{sm}g^{il})\Big)\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm}\,,\\
\overset{[-1]}{\mu}{}^{is} = {} & \Big(\overset{[-2]}{\underset{2}{a}}g^{is}g^{lm} + \frac{1}{2}\overset{[-2]}{\underset{2}{b}}(g^{il}g^{sm} + g^{sl}g^{im}) + \frac{1}{2}\overset{[-2]}{\underset{2}{c}}(g^{im}g^{sl} + g^{sm}g^{il})\Big)\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm} + \\
& + \frac{1}{2}\Big(\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}g^{is}g^{lm} + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{b}}(g^{il}g^{sm} + g^{sl}g^{im}) + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{c}}(g^{im}g^{sl} + g^{sm}g^{il})\Big)\epsilon_{lm} + \\
& + \frac{1}{2}\Big(\overset{[-2]}{\underset{2}{b}}(g^{il}g^{sm} - g^{sl}g^{im}) + \overset{[-2]}{\underset{2}{c}}(g^{im}g^{sl} - g^{sm}g^{il})\Big)\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm} + \\
& + \frac{1}{4}\Big(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}}(g^{il}g^{sm} - g^{sl}g^{im}) + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}}(g^{im}g^{sl} - g^{sm}g^{il})\Big)\epsilon_{lm}\,.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Учитывая соотношения (42), можно также получить

$$
\begin{cases}
t^{(is)} = \underset{1}{a}g^{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + (\underset{1}{b} + \underset{1}{c})\epsilon^{(is)} + \dfrac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}g^{is}g^{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{(lm)} + \dfrac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}\,,\\
\overset{[-1]}{\mu}{}_{(is)} = \overset{[-2]}{\underset{2}{a}}g_{is}g^{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{(lm)} + (\overset{[-2]}{\underset{2}{b}} + \overset{[-2]}{\underset{2}{c}})\overset{[+1]}{\kappa}{}_{(is)} + \dfrac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}g_{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + \dfrac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\epsilon_{(is)}\,,\\
t^{[is]} = (\underset{1}{b} - \underset{1}{c})\epsilon^{[is]} + \dfrac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} - \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\overset{[+1]}{\kappa}{}^{[is]}\,,\\
\overset{[-1]}{\mu}{}_{[is]} = (\overset{[-2]}{\underset{2}{b}} - \overset{[-2]}{\underset{2}{c}})\overset{[+1]}{\kappa}{}_{[is]} + \dfrac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} - \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\epsilon_{[is]}\,.
\end{cases}
\tag{44}
$$

Воспользовавшись соотношениями (27), (29) и (30) приходим к

$$
\begin{aligned}
&2\overset{[-1]}{\tau}{}_s = 2e^{-2}(\underset{1}{b} - \underset{1}{c})\overset{[+1]}{\varphi}{}_s - (\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} - \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\kappa_s\,,\\
&2\mu^s = 2e^{2}(\overset{[-2]}{\underset{2}{b}} - \overset{[-2]}{\underset{2}{c}})\kappa^s - (\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} - \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\overset{[+1]}{\varphi}{}^s\,.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Вместо определяющих псевдоскаляров $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{a}}$, $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{b}}$, $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{c}}$ можно перейти к конвенциональным определяющим псевдоскалярам, таким как: G — модуль сдвига; ν — коэффициент

Пуассона; $\overset{[-1]}{L}$ — характерная микродлина; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 — не имеющие физической размерности скаляры (см. [20, 21]). В этом случае характерная микродлина L будет псевдоскаляром отрицательного веса -1.

Сравнивая (44) и (45) с аналогичными формулами (33) и (34), получим

$$
\begin{aligned}
&\underset{1}{a} = 2\underset{1}{A}, \qquad \underset{1}{b} + \underset{1}{c} = 2\underset{3}{A}, \qquad \underset{1}{b} - \underset{1}{c} = \underset{5}{A},\\
&\overset{[-2]}{\underset{2}{a}} = 2\overset{[-2]}{\underset{2}{A}}, \quad \overset{[-2]}{\underset{2}{b}} + \overset{[-2]}{\underset{2}{c}} = 2\overset{[-2]}{\underset{4}{A}}, \quad \overset{[-2]}{\underset{2}{b}} - \overset{[-2]}{\underset{2}{c}} = \overset{[-2]}{\underset{6}{A}},\\
&\overset{[-1]}{\underset{3}{a}} = 2\overset{[-1]}{\underset{7}{A}}, \quad \overset{[-1]}{\underset{3}{b}} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}} = 2\overset{[-1]}{\underset{8}{A}}, \quad \overset{[-1]}{\underset{3}{b}} - \overset{[-1]}{\underset{3}{c}} = -\overset{[-1]}{\underset{9}{A}}.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Принимая обозначения для определяющих постоянных

$$
c_4' = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c_5' = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c_6' = -c_6. \tag{47}
$$

динамические уравнения можно представить в форме

$$
\begin{aligned}
&G[(1+c_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1 - c_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\overset{[-2]}{c_1}\epsilon^{ikl}\nabla_k \overset{[+1]}{\phi_l} +\\
&\qquad + \overset{[-1]}{L} c_4'\nabla^i\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L} c_5'\nabla^k\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^i] = -\rho(f^i - \partial..u^i),\\
&G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}[(1+c_2)\nabla^s\nabla_s \overset{[+1]}{\phi_i} + (1 - c_2 + 2c_3)\nabla_i\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^k +\\
&+ \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c_4'\nabla_i\nabla^k u_k + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c_5'\nabla^k\nabla_k u_i + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c_6'\epsilon_{isl}\nabla^s \overset{[+1]}{\phi}{}^l] -\\
&- 2G\overset{[-2]}{c_1}(2\overset{[+1]}{\phi_i} - e^2\epsilon_{pqn}g^{ks}\nabla_s u^l) = -\rho(\overset{[-1]}{l}{}_i - \overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\,\partial..\overset{[+1]}{\phi_i}),
\end{aligned}
$$

где f_i — вектор массовых сил, l_i — вектор массовых моментов.

6. Заключение. В работе рассматривается проблема представления и связь между двумя основными естественными формами упругих потенциалов гемитропных сред.

(1) Обоснован выбор базисных параметров состояния и квадратичных термодинамических потенциалов.
(2) В качестве термодинамического потенциала, выбрана внутренняя энергия. Предполагается абсолютная инвариантость, рассматриваемых потенциалов, по отношению к любым преобразованиям трехмерного Евклидова пространства (в том числе, при зеркальных отражениях).
(3) Приведены две различные формы определяющих уравнений для гемитропного упругого тела.
(4) В результате применения специальных координатных представлений полуизотропных (гемитропных) псевдотензоров четвертого ранга определены 9 ковариантно постоянных определяющих псевдоскаляров, характеризующих гемитропную упругую среду.

Таблица 1. Веса микрополярных гемитропных определяющих скаляров

Псевдоскаляры первой основной энергетической формы	Псевдоскаляры второй основной энергетической формы	Материальные псевдоскаляры
$\underset{1}{A}$	$\frac{1}{2}\underset{1}{a}$	$G\nu(1-2\nu)^{-1}$
$\overset{[-2]}{\underset{2}{A}}$	$\frac{1}{2}\overset{[-2]}{\underset{2}{a}}$	$G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}c_3$
$\underset{3}{A}$	$\frac{1}{2}(\underset{1}{b}+\underset{1}{c})$	G
$\overset{[-2]}{\underset{4}{A}}$	$\frac{1}{2}(\overset{[-2]}{\underset{2}{b}}+\overset{[-2]}{\underset{2}{c}})$	$G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}$
$\underset{5}{A}$	$\underset{1}{b}-\underset{1}{c}$	$2Gc_1$
$\overset{[-2]}{\underset{6}{A}}$	$\overset{[-2]}{\underset{2}{b}}-\overset{[-2]}{\underset{2}{c}}$	$G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}c_2$
$\overset{[-1]}{\underset{7}{A}}$	$\frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}$	$G\overset{[-1]}{L}c_4$
$\overset{[-1]}{\underset{8}{A}}$	$\frac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}}+\overset{[-1]}{\underset{3}{c}})$	$G\overset{[-1]}{L}c_5$
$\overset{[-1]}{\underset{9}{A}}$	$\overset{[-1]}{\underset{3}{c}}-\overset{[-1]}{\underset{3}{b}}$	$G\overset{[-1]}{L}c_6$

(5) Выполнено сравнение первой и второй естественных энергетических форм потенциалов силовых и моментных напряжений. Получены соотношения, связывающие определяющие скаляры и псевдоскаляры , в том числе, с конвенционально используемыми гемитропными псевдоскалярами: модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характерной микродлиной (являющейся псевдоскаляром отрицательного веса, чувствительным к отражениям трехмерного пространства), и шестью псевдоскалярами, не имеющие физической размерности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 286 p.

[2] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.

[3] Dyszlewicz J. Hemitropic medium // Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. P. 281–332. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7_5.

[4] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].

[5] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].

[6] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].

[7] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.

[8] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.

[9] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p. [Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 139 с.].
[10] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.
[11] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
[12] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
[13] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
[14] Kopff A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.
[15] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.
[16] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 1(51). с. 17–26.
[17] McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.
[18] Radaev Y. N., Murashkin E. GENERALIZED PSEUDOTENSOR FORMULATIONS OF THE STOKES'INTEGRAL THEOREM // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.
[19] Radaev Y. N., Murashkin E., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
[20] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.
[21] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474.
[22] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
[23] Jeffreys H., Swirles B. Methods of mathematical physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. 712 p.
[24] Spencer A. J. M. Continuum mechanics and theory of materials. New York: Courier Corporation, 2004. 192 p.
[25] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
[26] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). с. 106–115.
[27] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

ON TWO BASE NATURAL FORMS OF ASYMMETRIC FORCE AND COUPLE STRESS TENSORS OF POTENTIAL IN MECHANICS OF HEMITROPIC SOLIDS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to some problems concerning modeling hemitropic elastic media. Two main quadratic energy forms of a stress potential are introduced in terms of pseudotensors. These energy forms are assumed to be absolute invariants with respect to arbitrary transformations of the three-dimensional Euclidean space (including mirror reflections). As a result of applying special coordinate representations of semi-isotropic (hemitropic) pseudotensors of the fourth rank, it is possible to determine 9 covariantly constant constitutive pseudoscalars characterizing a hemitropic elastic medium. Symmetric and antisymmetric parts of asymmetric tensors and pseudotensors of strains and stresses are discriminated. The first and second base natural energy forms are compared and equations are derived for constitutive scalars and pseudoscalars, including the conventional hemitropic pseudoscalars: shear modulus, Poisson's ratio, characteristic microlength (a pseudoscalar of negative weight, sensitive to reflections of three-dimensional space), and six dimensionless pseudoscalars.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, quadratic energy form, potential detection, detecting pseudotensor, characteristic microlength, chiral medium, micropolar hemitropic continuum

REFERENCES

[1] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 286 p.
[2] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
[3] Dyszlewicz J. Hemitropic medium // Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. P. 281–332. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7_5.
[4] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
[5] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
[6] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
[7] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
[8] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.
[9] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.

Murashkin Evgenii Valeryevich, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.
Radayev Yuri Nikolaevich, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

[10] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
[11] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
[12] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
[13] Kopff A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.
[14] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.
[15] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p. [Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 139 с.].
[16] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.
[17] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 1(51). с. 17–26.
[18] McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.
[19] Radaev Y. N., Murashkin E. GENERALIZED PSEUDOTENSOR FORMULATIONS OF THE STOKES'INTEGRAL THEOREM // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.
[20] Radaev Y. N., Murashkin E., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
[21] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474.
[22] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
[23] Jeffreys H., Swirles B. Methods of mathematical physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. 712 p.
[24] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). с. 106–115.
[25] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127.
[26] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
[27] Spencer A. J. M. Continuum mechanics and theory of materials. New York: Courier Corporation, 2004. 192 p.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 20-01-00666.