Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3 (53). С. 101–111

Е. В. Мурашкин[1], *А. М. Буруруев*[1], *В. А. Ковалев*[2]

ОБ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЯХ АРУТЮНЯНА В МЕХАНИКЕ РАСТУЩИХ ТЕЛ

[1] *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

[2] *Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия*

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы моделирования процессов поверхностного наращивания тканых материалов. Выполнено обобщение модели, предложенной Н.Х. Арутюняном, на случай материалов чувствительных к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Показано, что последовательные положения поверхности наращивания можно интерпретировать как поверхность уровня псевдоскалярного поля. Вводится понятия фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и псевдоскалярного времени веса заданного целого веса. Обсуждаются вопросы вычисления единичного псевдовектора нормали к поверхности наращивания задающейся псевдоскалярным полем. Граничные условия для напряжений на поверхности роста, предложенные Г.И. Быковцевым, обобщены на случай псевдоскалярной геометрии. Приведены постановки простейших краевых задач, развиваемой теории и предложены методы их решения.

Ключевые слова: определяющая тензорная функция, псевдотензор, поверхность наращивания, тканый 3D-материал, микрополярная среда, псевдоскалярное время

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.009

УДК: 539.374

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Буруруев Алексей Михайлович
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, ведущий инженер, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Ковалев Владимир Александрович
`e-mail:` vlad_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 20-01-00666.

Поступила 20.09.2022

1. Введение. Традиционные способы изготовления изделий сложной формы подразумевают различные технологические процессы обработки, как связанные со съемом материала, так и основанные на синтезе изделий путем последовательного нанесения материала на граничную поверхность [1–3]. Все это стимулирует развитие механики выращивания твердых тел. Технологии аддитивного производства широко используются в современном промышленном производстве деталей сложной формы и конструкции. К таким методам относятся: лазерная стереолитография, селективное лазерное спекание, электронно-лучевое плавление, напыление, многоструйное моделирование, ламинирование, 3D-печать, компьютерная аксиальная литография, послойное бетонирование, производство тканых композитов.

Упомянутые выше методы основаны на известных естественных процессах роста поверхности: аккреции космических объектов, образовании лавин и ледников, процессах роста кристаллов. В то же время процессы роста биологических тканей и организмов связаны с процессами объемного роста; тем не менее среди них можно выделить и процессы поверхностного роста. Например, рост атеросклеротических бляшек [4–6], рост корневой системы, рост костей человека. Рост атеросклеротической бляшки можно описать как процесс первичной инфильтрации компонентов плазмы крови в тонкий подповерхностный слой внутренней стенки артерии. Рост зародыша кристалла происходит путем осаждения на его поверхность отдельных атомов или их групп.

Главной особенностью растущих твердых тел является образование твердых тел одновременно с процессом деформации. Это обстоятельство, безусловно, существенно усложняет математическое моделирование таких деформационных процессов по сравнению с твердыми телами постоянного состава. Достаточно упомянуть ситуацию, имеющую место в динамике абсолютно твердого тела переменной массы. Изменчивость массы, с одной стороны, приводит к усложнению математических задач, а с другой стороны, порождает качественно новые эффекты в поведении тел. Естественно ожидать, что обобщенная модель твердого тела и начально-краевые задачи усложнятся, а влияние параметров роста на отклик твердого тела станет более разнообразным.

Решение краевой задачи о растущих телах — очень трудоемкая задача. Важной особенностью краевых задач механики растущего тела является вывод граничных условий на движущейся растущей поверхности между основным телом и напыляемой частью. Дискуссии по проблемам граничных условий можно найти в работах [7,8]. Настоящая работа посвящена рассмотрению модели Арутюняна поверхностно-растущих тел [7] и нескольких вариантов определяющих соотношений на растущей поверхности, близких к простейшим соотношениям (см. известную книгу Г. И. Быковцев: [8, С. 288–292]). На протяжении всей статьи будут использоваться терминология и обозначения, принятые в публикациях [8–13].

2. Основные уравнения модели Арутюняна поверхностно-растущих твердых тел. Подробное исследование моделирования поверхностных растущих тел, предложенное Н. Х. Арутюняном, можно найти в книге [7]. Вернемся к основному уравнению этой модели. Уравнения равновесия для тензора напряжений Коши σ^{rs} могут быть представлены в терминах скоростей следующим образом:

$$\nabla_s(\partial.\sigma^{sr}) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

где ∇_s — оператор Гамильтона (набла), $\partial.$ — производная по времени.

Граничные условия на нерастущей части поверхности (поверхность основных тел) читаются

$$n_s \partial . \sigma^{sr} = \partial . p_0^r \tag{2}$$

и (или)

$$v^s = \partial . u_0^s . \tag{3}$$

где p_0^r — заданный вектор тяги, v^s — вектор скорости, u_0^s — заданные векторы перемещений, n_s — ковариантный вектор единичной нормали.

Условие на растущей поверхности Σ можно получить из решения контактной задачи между трехмерным телом и двумерной поверхностью в виде [14]

$$n_s \partial . \sigma^{sr} = -c \underset{2d}{\sigma}^{kh} L_{hk} n_k , \tag{4}$$

где c — линейная скорость распространения растущей поверхности в нормальном направлении n_s, $\underset{2d}{\sigma}^{kh}$ — двумерный тензор заданного упругого поверхностного натяжения, L_{hk} — двумерный тензор кривизны поверхности.

Определяющие уравнения для скоростей деформации ε_{sr} и скоростей представлены

$$\varepsilon_{sr} = \frac{1}{2} (\nabla_s v_r + \nabla_r v_s), \tag{5}$$

а общий вид определяющих уравнений для тензора скоростей напряжений Коши можно принять в виде

$$\partial . \sigma^{sr} = 2 \mathcal{F}^{sr} (\varepsilon_{sr}, v_s). \tag{6}$$

где $\mathcal{F}^{sr}$ — тензорная функция, определяемая экспериментально.

Уравнение движущейся растущей поверхности $\Sigma(t)$ в неявном виде имеет вид

$$t = \underset{*}{\tau}(x^k), \tag{7}$$

Основные уравнения (1)–(7) должны быть дополнены правилами восстановления тензора напряжений и перемещений в соответствии с

$$\begin{aligned} \sigma^{sr}(x^k, t) &= \underset{*}{\sigma}^{sr}(x^k) + \int_{\underset{*}{\tau}(x^k)}^{t} \partial . \sigma^{sr}(x^k, t')\, dt', \\ u^s(x^k, t) &= \underset{*}{u}^s(x^k) + \int_{\underset{*}{\tau}(x^k)}^{t} v^s(x^k, t')\, dt'. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\underset{*}{\sigma}^{sr} = \sigma^{sr}\big|_{t=\underset{*}{\tau}(x^k)}$; $\underset{*}{u}^s(x^k) = u^s\big|_{t=\underset{*}{\tau}(x^k)}$. Уравнения (8) представляют собой простое правило интегрирования примитивов.

Следует отметить, что краевая задача для растущего твердого тела может управляться нагрузками, напряжениями на распространяющейся растущей поверхности и скоростью выкладки материала.

3. Дифференциальные ограничения на распространение растущей поверхности. Граничные условия на распространяющейся поверхности роста требуют дополнительного внимания и обсуждения. Попытка получить граничные условия из уравнений равновесия была предпринята Г. И. Быковцевым (см. книгу [8, Pp. 288–292]) и позже обобщенные в работах [9–13] для случая микрополярных сред и предварительно деформированных сред.

Как показано ранее (см., например, [9–13]), преобразование уравнений равновесия (1) с использованием формулы для действительных компонент силового тензора напряжений σ^{ij}

$$\sigma^{ij} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}+0}^{t} [\partial.\sigma^{ij}(x^s, t')]dt' + \mathcal{S}^{ji} + \underset{*}{\sigma}^{ij}(x^s), \tag{9}$$

$$\mathcal{S}^{ij} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}-0}^{\underset{*}{\tau}+0} [\partial.\sigma^{ij}(x^s, t')]dt', \tag{10}$$

позволяет вывести уравнение на распространяющейся растущей поверхности в виде следующих дифференциальных ограничений

$$c[\nabla_j \underset{*}{\sigma}^{ji}(x^s) + \nabla_j \mathcal{S}^{ji} + \underset{*}{X}^i(x^s)] - n_j \partial.\sigma^{ji}(x^s, t) = 0 \quad (t = \underset{*}{\tau} + 0), \tag{11}$$

где единичный вектор нормали n_i на распространяющейся растущей поверхности Σ, направленный в сторону ее распространения, связан с пространственным градиентом (7) уравнением

$$n_i = c\,\partial_i \underset{*}{\tau}, \quad c = |\boldsymbol{\nabla} \underset{*}{\tau}|^{-1} \quad (t = \underset{*}{\tau}). \tag{12}$$

В уравнениях (9)–(11) используются обозначения, принятые в [9–11]: $\mathcal{S}^{ji}$ - интеграл, связанный со скачком напряжения, $\underset{*}{\sigma}^{ij}(x^s) = \sigma^{ij}(x^s, t)|_{t=\underset{*}{\tau}(x^s)-0}$ – компоненты тензора напряжений соответственно в момент $t = \underset{*}{\tau}(x^s) - 0$ непосредственно перед включением элемента в основное твердое тело $\underset{*}{X}^i(x^s) = X^i(x^s, t)\big|_{t=\underset{*}{\tau}(x^s)+0}$. Момент $t = \underset{*}{\tau}(x^s) + 0$ соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к растущей поверхности.

В общем случае напряжения сил $\underset{*}{\sigma}^{ij}$ должны быть выражены через фактические напряжения и пары на распространяющейся растущей поверхности тензорными определяющими уравнениями следующим образом

$$\underset{*}{\sigma}^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\sigma^{ij}, n_i, \ldots). \tag{13}$$

Определяющая тензорная функция $\mathfrak{F}_{ij}$ может быть определена экспериментально. Функция $\mathfrak{F}_{ij}$ означает возможные изменения параметров напряженно-деформированного состояния растущего материала на интервале времени от момента создания растущего элемента до момента его осаждения на основное твердое тело , то есть в интервале времени $\underset{*}{\tau} - 0 \leq t \leq \underset{*}{\tau} + 0$. В частности, определяющие тензорные функции $\mathfrak{F}_{ij}$ при производстве тканых материалов будут зависеть от выбранных направлений, связанных с распространяющейся поверхностью роста и локализацией композиционных волокон. Важным ограничением на определяющие тензорные функции $\mathfrak{F}_{ij}$ является нечувствительность их аргументов при поворотах подвижной системы координат вокруг единичного вектора нормали n_j к растущей поверхности. В этом случае необходимо выбрать систему совместных инвариантов тензоров σ^{ij}, $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$ и векторов $n_j, \imath_j$, удовлетворяющих условию вращательной инвариантности относительно вектора n_j.

4. Псевдоскалярная геометрия распространяющейся поверхности наращивания. В некоторых случаях может оказаться, что распространяющаяся растущая поверхность является поверхностью уровня псевдоскалярного поля. Например, в случае материалов (тканых композитов, хиральных материалов, метаматериалов, биологических тканей), проявляющих свойства чувствительности к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Базовый объект, чувствительный к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, представляет собой фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр веса $+1$, который может быть определен как тройное произведение ковариантных базовых векторов $(\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}})$

$$e = \lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = (\underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}) \cdot \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}. \qquad (14)$$

Ряд подходов к развитию псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [16–21].

Пусть распространяющаяся поверхность Σ в трехмерном пространстве определяется как поверхность уровня псевдоскалярного поля $\overset{[W]}{f}(x^i)$ веса W:

$$\overset{[W]}{t} = \overset{[W]}{f}(x^i), \qquad (15)$$

где $\overset{[W]}{t}$ псевдоскалярное время, и

$$\overset{[W]}{t} = e^W t. \qquad (16)$$

Учитывая псевдоскалярный дифференциал времени $\overset{[W]}{t}$ в силу (16) можно получить

$$d\overset{[W]}{t} = d(e^W t) = e^W dt + tWe^{W-1}de, \qquad (17)$$

или

$$d\overset{[W]}{t} = e^W \Big(dt + te^{-1}\partial_s e dx^s\Big). \qquad (18)$$

Отметим важный в прикладных задачах случай [15]. Выберем систему координат с учетом условия:

$$\sqrt{g} = 1, \qquad (19)$$

и используя следующее уравнение

$$e^2 = g \qquad (20)$$

прийти к ограничению

$$e = \operatorname{sgn} e. \qquad (21)$$

Таких систем в трехмерном пространстве бесконечно много, например декартовы левая и правая системы координат.

Ограничение $\sqrt{g} = 1$ часто используется не только в теории относительности [15], но и в механике твердого тела [22]. На страницах 135-142 монографии [15] условие $\sqrt{g} = 1$ используется для вывода уравнения гравитации в 4-пространстве-времени, что значительно упрощает уравнения теории относительности.

Если в дополнение к уравнению (21) предположить, что система координат левая (т. е. $e < 0$), то псевдоскалярный дифференциал времени принимает вид

$$d\overset{[W]}{t} = \begin{cases} dt, & \text{if } W \text{ is even weight;} \\ -dt, & \text{if } W \text{ is odd weight.} \end{cases} \qquad (22)$$

Ковариантный вектор единичной нормали n_s к поверхности Σ можно определить с точностью до множителя по формуле

$$Nn_i = \partial_i(e^{-W}\overset{[W]}{f}). \tag{23}$$

Обратите внимание, что абсолютный скаляр a удовлетворяет уравнению

$$\nabla_i a = \partial_i a. \tag{24}$$

Тогда уравнение (23), (24), преобразуется к виду

$$Nn_i = \partial_i(e^{-W}\overset{[W]}{f}) = \nabla_i(e^{-W}\overset{[W]}{f}) = e^{-W}\nabla_i\overset{[W]}{f}. \tag{25}$$

Вводя в рассмотрение нормальный псевдовектор по формуле

$$\overset{[W]}{n_i} = e^W n_i, \tag{26}$$

мы можем получить

$$N\overset{[W]}{n_i} = \nabla_i\overset{[W]}{f}. \tag{27}$$

Согласно уравнению

$$g^{ij}\overset{[W]}{n_i}\overset{[W]}{n_j} = e^{2W} \tag{28}$$

легко сделать вывод, что

$$N^2e^{2W} = g^{ik}\nabla_i\overset{[W]}{f}\nabla_k\overset{[W]}{f}, \tag{29}$$

откуда для неизвестного множителя N можно вычислить по уравнению

$$\pm N = e^{-W}\sqrt{g^{ik}\nabla_i\overset{[W]}{f}\nabla_k\overset{[W]}{f}}, \tag{30}$$

Наконец, нормальный псевдовектор к поверхности уровня Σ псевдоскалярного поля $\overset{[W]}{f}$ вычисляется по формуле

$$\overset{[W]}{n_i} = e^W\frac{\nabla_i\overset{[W]}{f}}{\sqrt{g^{ik}\nabla_i\overset{[W]}{f}\nabla_k\overset{[W]}{f}}} \tag{31}$$

Линейная скорость распространяющейся растущей поверхности в направлении нормального псевдовектора $\overset{[W]}{\mathbf{n}}$ рассчитывается по формуле

$$\overset{[-W]}{c} = \left(\sqrt{g^{ik}\nabla_i\overset{[W]}{f}\nabla_k\overset{[W]}{f}}\right)^{-1}. \tag{32}$$

Абсолютный вектор нормали к поверхности уровня Σ псевдоскалярного поля $\overset{[W]}{f}$ можно вычислить по формуле

$$n_i = \overset{[-W]}{c}\nabla_i\overset{[W]}{f}. \tag{33}$$

5. Дифференциальные ограничения на распространение растущей псевдоскалярной поверхности. Следуя обсуждениям в предыдущих разделах, мы можем получить дифференциальные ограничения на распространение растущей псевдоскалярной поверхности. В процессе роста максимальная интенсивность касательных напряжений может быть достигнута на контактной (растущей) поверхности между основным твердым телом и растущей частью. Определим растущую поверхность как поверхность уровня псевдоскалярной функции, как это было указано в § 3.

$$\overset{[W]}{t} = \overset{[W]}{\underset{*}{\tau}}(x^i). \tag{34}$$

Соотношения (11) в случае распространяющейся растущей псевдоскалярной поверхности преобразуются следующим образом

$$\overset{[-W]}{c}[\nabla_j \underset{*}{t}^{ji}(x^k) + \underset{*}{X}^i(x^k)] - n_j \overset{[-W]}{\partial.}\, t^{ji}(x^k)|_{\overset{[W]}{t} = \overset{[W]}{\underset{*}{\tau}}(x^k)} = \overset{[-W]}{0}. \tag{35}$$

Уравнение восстановления для компонент тензора напряжений принимает вид

$$t^{ij} = \int\limits_{\overset{[W]}{\underset{*}{\tau}}}^{\overset{[W]}{t}} [\overset{[-W]}{\partial.}\, t^{ij}(x^k, \overset{[W]}{t}{}')] d\overset{[W]}{t}{}' + \underset{*}{t}^{ij}(x^k). \tag{36}$$

Уравнения (35) и (36) представляют собой обобщенные граничные условия на растущих поверхностях, которые можно использовать для широкого класса материалов, включая тканые композиты.

6. Постановки краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов. Термин «тонкостенные детали» означает такие твердые тела, которые в процессе роста и деформации подвергаются большим перемещениям и малым деформациям. В этом случае мы можем использовать линейные определяющие уравнения (закон Гука), в то время как граничные условия все еще нелинейны, а поверхность наращивания неизвестна. В этом случае мы получаем краевую задачу в операторной форме

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\nabla} \cdot (\partial_t \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad \partial_t \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} + \lambda \mathrm{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nabla}), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{def}} + \mathbf{v}_{\mathrm{gr}}, \\
\mathbf{x} \in \Sigma_1: \quad \mathbf{n} \cdot \partial_t \boldsymbol{\sigma} = \partial_t \mathbf{p}_0, \qquad \mathbf{x} \in \Sigma_2: \quad \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}_0, \\
\mathbf{x} \in \overset{*}{\Sigma}(t): \quad \mathbf{n} \cdot \partial_t \boldsymbol{\sigma} = -s_n(\mathcal{T}_s : \mathbf{L})\, \mathbf{n}, \quad s_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \quad t = \overset{*}{\tau}(\mathbf{x}).
\end{gathered} \tag{37}$$

где λ, μ — параметры Ламе. Отметим, что скорость распространения поверхности наращивания состоит из скорости, возникающей за счет выкладки нового материала, и скорости, возникающей за счет деформации твердых тел.

Рассмотрим теорию механического поведения растущих тел при бесконечно малых деформациях. Совершенно ясно, что речь идет о толстостенных конструкциях, деформация которых для классических конструкционных материалов в процессах выращивания и нагружения бесконечно мала. В этом случае можно исключить скорость роста поверхности, возникающую за счет деформации твердых тел $\mathbf{v}_{\mathrm{def}}$, так как этот член бесконечно мал по сравнению со скоростью распространения растущей поверхности. В этом случае мы можем упростить краевую задачу следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}\cdot(\partial_t\boldsymbol{\sigma})=\mathbf{0},\quad \partial_t\boldsymbol{\sigma}=2\mu\mathbf{D}+\lambda\mathrm{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I},\quad \mathbf{D}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v}+\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{\nabla}),\quad \mathbf{v}=\mathbf{v}_{\mathrm{gr}},\\
&\mathbf{x}\in\Sigma_1:\quad \mathbf{n}\cdot\partial_t\boldsymbol{\sigma}=\partial_t\mathbf{p}_0,\qquad \mathbf{x}\in\Sigma_2:\quad \mathbf{v}=\partial_t\mathbf{u}_0,\\
&\mathbf{x}\in\overset{*}{\Sigma}(t):\quad \mathbf{n}\cdot\partial_t\boldsymbol{\sigma}=-s_n(\mathcal{T}_s:\mathbf{L})\,\mathbf{n},\quad s_n=\mathbf{n}\cdot\mathbf{v},\quad t=\overset{*}{\tau}(\mathbf{x}).
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Уравнения (38) образуют общую краевую задачу для толстостенных тел. Эта краевая задача математически идентична краевой задаче теории упругости при малых деформациях и наиболее адекватные результаты получаются в рамках этого варианта теории.

Обе упрощенные теории для тонких (37) и толстых (38) растущих твердых тел, дают адекватные математические модели процессов роста для различных производводственных процессов. Тем не менее, развитие общей нелинейной теории очень важно, особенно с точки зрения нового определяющего уравнения для материального описания сплошной среды с микроструктурой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gardan, J. Additive manufacturing technologies: state of the art and trends. Additive Manufacturing Handbook, (2017). 149-168. Pub. Location Boca Raton Imprint CRC Press

[2] Gibson, I., Rosen, D. W., Stucker, B., Khorasani, M., Rosen, D., Stucker, B., Khorasani, M. (2021). Additive manufacturing technologies (Vol. 17). Cham, Switzerland: Springer.

[3] Alammar, A., Kois, J. C., Revilla-León, M., Att, W. (2022). Additive Manufacturing Technologies: Current Status and Future Perspectives. Journal of Prosthodontics, 31(S1), 4-12.

[4] Murashkin E., Dats E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growthing cylinder // Proceedings of The World Congress on Engineering and Computer Science 2019, 22-24 October, 2019, San Francisco, USA. — Lecture Notes in Engineering and Computer Science. — IAENG London, U.K, 2019. — P. 362–365. ISBN: 978-988-14048-7-9; ISSN: 2078-0958 (Print); ISSN: 2078-0966 (Online).

[5] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // AIP Conference Proceedings. — 2019. — Vol. 2116. — P. 380013.

[6] Murashkin, E. V., Dats, E. P., Stadnik, N. E. (2022). Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 45(5), 3197-3212.

[7] Arutyunyan, N. Kh., Drozdov, A. D., and Naumov, V. E., 1987, Mechanics of Growing Viscoelastoplastic Bodies, Nauka, Moscow 472 p (in Russian).

[8] Bykovtsev G. I. Izbrannye problemnye voprosy mekhaniki deformiruemykh sred [Selected Problems from Solid Mechanics. Collection of papers]. Vladivostok, Dal'nauka, 2002, 566 pp. (In Russian)

[9] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids, Mechanics of Solids, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1157–1164. doi: 10.3103/S0025654419080053.

[10] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids, J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., 2019, vol. 23, no. 4, pp. 646–656. doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1696.

[11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface, Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost., 2019, no. 3(41), pp. 11–29. doi: 10.26293/chgpu.2019.40.2.012.

[12] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарско-го государственного технического университета. Серия “Физико-математические науки.” 2020.Т. 24, No 3. С. 424–444.

[13] Murashkin E. V. On a system of independent arguments for constitutive tensor functions on the growing surface in micropolar continuum // Journal of Physics: Conference Series. — 2022. — Vol. 2231, no. 1. — P. 012019. [DOI]

[14] Manzhirov A. V., Murashkin E. V., Parshin D. A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // AIP Conference Proceedings. — 2019. — Vol. 2116. — P. 380011.

[15] Копф А. Основы теории относительности Эйнштейна. М.: ГТТИ, 1933. 175 с.

[16] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

[17] Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.

[18] Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.

[19] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. Vol. 5. Courier Corporation, 1978. 334 pp.

[20] G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.

[21] Veblen O. and Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 26, No. 3 (Jul., 1924), pp.373-377 https://www.jstor.org/stable/1989146

[22] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.

E. V. Murashkin[1], *A. M. Bururuev*[1], *V. A. Kovalev*[2]

ON GENERALIZED HARUTYUNYAN'S MODELS IN THE MECHANICS OF GROWING SOLIDS

[1]*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*
[2]*Moscow City University of Management, Moscow, Russia*

Abstract. The article deals with the issues of modeling the processes of surface growth of woven materials. The generalization of the model proposed by N.Kh. Arutyunyan is carried out for the case of materials sensitive to specular reflections and inversions of three-dimensional space. It is shown that successive positions of the growth surface can be interpreted as a level surface of a pseudoscalar field. The concepts of fundamental orienting pseudoscalar and pseudoscalar time of the weight of a given integer weight are introduced. The issues of calculating the unit pseudovector of the normal to the growth surface given by the pseudoscalar field are discussed. The boundary conditions for stresses on the growth surface proposed by GI Bykovtsev are generalized to the case of pseudoscalar geometry. Statements of the simplest boundary value problems and the developed theory are given, and methods for their solution are proposed.

Keywords: pseudotensor, growing surface, 3D woven material, micropolar medium, woven material, pseudoscalar time

Литература

[1] Gardan, J. Additive manufacturing technologies: state of the art and trends. Additive Manufacturing Handbook, (2017). 149-168. Pub. Location Boca Raton Imprint CRC Press
[2] Gibson, I., Rosen, D. W., Stucker, B., Khorasani, M., Rosen, D., Stucker, B., Khorasani, M. (2021). Additive manufacturing technologies (Vol. 17). Cham, Switzerland: Springer.
[3] Alammar, A., Kois, J. C., Revilla-León, M., Att, W. (2022). Additive Manufacturing Technologies: Current Status and Future Perspectives. Journal of Prosthodontics, 31(S1), 4-12.
[4] Murashkin E., Dats E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growthing cylinder // Proceedings of The World Congress on Engineering and Computer Science 2019, 22-24 October, 2019, San Francisco, USA. — Lecture Notes in Engineering and Computer Science. — IAENG London, U.K, 2019. — P. 362–365. ISBN: 978-988-14048-7-9; ISSN: 2078-0958 (Print); ISSN: 2078-0966 (Online).
[5] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // AIP Conference Proceedings. — 2019. — Vol. 2116. — P. 380013.
[6] Murashkin, E. V., Dats, E. P., Stadnik, N. E. (2022). Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 45(5), 3197-3212.
[7] Arutyunyan, N. Kh., Drozdov, A. D., and Naumov, V. E., 1987, Mechanics of Growing Viscoelastoplastic Bodies, Nauka, Moscow 472 p (in Russian).

Murashkin Evgenii Valeryevich, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.
Bururuev Aleksei Mikhailovich Leading Engineer of the Laboratory for Modeling in Mechanics of Solids IPMech RAS, Moscow, Russia.
Kovalev Vladimir Alexandrovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow City University of Management, Moscow, Russia.

[8] Bykovtsev G. I. Izbrannye problemnye voprosy mekhaniki deformiruemykh sred [Selected Problems from Solid Mechanics. Collection of papers]. Vladivostok, Dal'nauka, 2002, 566 pp. (In Russian)
[9] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids, Mechanics of Solids, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1157–1164. doi: 10.3103/S0025654419080053.
[10] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids, J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., 2019, vol. 23, no. 4, pp. 646–656. doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1696.
[11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface, Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost., 2019, no. 3(41), pp. 11–29. doi: 10.26293/chgpu.2019.40.2.012.
[12] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарско-го государственного технического университета. Серия "Физико-математические науки." 2020.Т. 24, No 3. С. 424–444.
[13] Murashkin E. V. On a system of independent arguments for constitutive tensor functions on the growing surface in micropolar continuum // Journal of Physics: Conference Series. — 2022. — Vol. 2231, no. 1. — P. 012019. [DOI]
[14] Manzhirov A. V., Murashkin E. V., Parshin D. A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // AIP Conference Proceedings. — 2019. — Vol. 2116. — P. 380011.
[15] Копф А. Основы теории относительности Эйнштейна. М.: ГТТИ, 1933. 175 с.
[16] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.
[17] Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.
[18] Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.
[19] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. Vol. 5. Courier Corporation, 1978. 334 pp.
[20] G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.
[21] Veblen O. and Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 26, No. 3 (Jul., 1924), pp.373-377 https://www.jstor.org/stable/1989146

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 20-01-00666.