А. И. Сумин, А. А. Богер, В. А. Сумин, С. В. Рябов

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СРЕД ПРИ НАЛОЖЕННЫХ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия
им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", г. Воронеж, Россия*

Аннотация. В работе изучаются аспекты устойчивости нелинейно-упругих тел по отношению к наложенным конечным деформациям. Вопрос изучения основного процесса деформирования исходной среды сведен к решению нелинейной краевой задачи с переменными коэффициентами для конечных возмущений. Решения для возмущений перемещений выбираются в виде рядов содержащих собственные функции. С помощью принципа возможных перемещений вопрос об устойчивости основного состояния сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для данной системы построена функция, которая, при некоторых ограничениях на начальные возмущения будет функцией Ляпунова, которая используется для нахождения областей устойчивости.

Ключевые слова: устойчивость, нелинейная-упругая среда, конечные возмущения, упругие потенциалы, функция Ляпунова, области устойчивости, конечные деформации, устойчивость решения, нулевое решение, точки бифуркации.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.004

УДК: 539.3

© Сумин А. И., Богер А. А., Сумин В. А., Рябов С. В., 2022

Сумин Александр Иванович

e-mail: sumin_ai@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушной академии им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", г. Воронеж, Россия.

Богер Андрей Александрович

e-mail: a-boger@yandex.ru, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушной академии им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", г. Воронеж, Россия.

Сумин Виктор Александрович

e-mail: vsum@gambler.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общеобразовательных дисциплин, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушной академии им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", г. Воронеж, Россия.

Рябов Сергей Владимирович

e-mail: mg1.aka@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушной академии им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.12.2022

Введение

Исследование устойчивости по отношению к конечным возмущениям важны как для снижения веса конструкций и объектов, но для нахождения оценки допустимой границы относительно конечных возмущений при заданных параметрах рассматриваемой конструкции. Можно сказать, что развитие теории устойчивости при конечных возмущениях позволяет найти связь этой теории с теорией устойчивости движения по Ляпунову, а также с теорией бифуркаций. Построение конечных последовательностей точек бифуркации доказывают, что в отличие от применения теорий устойчивости по отношению к малым возмущениям, которые определяют единственную точку, всегда существует последовательность устойчивых равновесных состояний.

Материалы и методы

Согласно работе [1] приведем основные уравнения для исследования устойчивости нелинейно-упругих тел по отношению к конечным возмущениям, которые для основного состояния, запишутся следующим образом.

$$\nabla_i [(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m] + \nabla_i [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] + \rho_0 X^m - \rho_0 \ddot{u}^m = 0; \quad (1)$$

$$[(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m + S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] N_i^0 = P^m. \quad (2)$$

Предполагается, что плотность и нормаль к поверхности в деформированном состоянии не возмущаются.

Составим вариационное уравнение [2–8] метода Бубнова-Галеркина, соответствующее нелинейной краевой задаче, заданной уравнениями (1) – (2). Для этого, будем трактовать эти уравнения как уравнения принципа возможных перемещений, учитывая, что левые части уравнений (1) представляют собой взятые с обратным знаком компоненты некоторых объемных сил, а левые части уравнений (2) – компоненты некоторых поверхностных сил, составим условия, чтобы работа этих сил на возможных перемещениях δu_m ($m = 1, 2, 3$) была равна нулю

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \nabla_i [(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m] + \nabla_i [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] + \rho_0 X^m - \rho_0 \ddot{u}^m \right\} \delta u_m dV + \\ & + \int_S \left\{ [(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m + S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] N_i^0 - P^m \right\} \delta u_m = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) перепишем следующим образом

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \nabla_i [(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m] + \nabla_i [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] \right\} \delta u_m dV + \\ & + \rho_0 \int_V X^m \delta u_m dV - \rho_0 \int_V \ddot{u}^m \delta u_m dV + \\ & + \int_V \left\{ [(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m] + [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] \right\} N_i^0 \delta u_m dV - \int_S P^m \delta u_m dS = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя формулу Гаусса-Остроградского, преобразуем первый интеграл в выражении (5)

$$\begin{aligned}
& - \int_V \{ \nabla_i [(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m] + \nabla_i [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \} \delta u_m dV = \\
& = - \int_S \{ [(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m] + [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \} N_i^0 \delta u_m dS + \\
& + \int_V \{ [(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m] + [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \} \nabla_i (\delta u_m) dV. \quad (5)
\end{aligned}$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$\begin{aligned}
& \int_V \{ [(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m] + [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \} \nabla_i (\delta u_m) dV - \\
& - \rho_0 \int_V X^m \delta u_m dV + \rho_0 \int_V \ddot{u}^m \delta u_m dV - \int_S P^m \delta u_m dS = 0. \quad (6)
\end{aligned}$$

Будем искать решение нелинейной краевой задачи в виде ряда

$$u_j(\xi_i, t) = \sum_m f_m(t) \cdot \varphi_j^m(\xi_i), \quad (j = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots); \quad (7)$$

где $f_j(t)$ – неопределенные коэффициенты, зависящие от времени; $\varphi_m^j(\xi_i)$ – функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям для $u_m(\xi_i, t)$. Здесь, как и ранее, по повторяющимся индексам осуществляется суммирование от 1 до 3, если размерность индекса специально не оговорена.

В качестве вариаций примем выражения

$$\delta u_j = \sum_m \varphi_j^m(\xi_i) \cdot \delta f_m(t). \quad (8)$$

Рассмотрение сходимости ряда (7) представляет большие трудности. В настоящее время нет удовлетворительного доказательства сходимости ряда метода Бубнова-Галеркина, что, однако не мешает использованию этого способа в практических расчетах. В качестве системы функций $\varphi_m^j(\xi_i)$, будем брать известные формы, соответствующие линеаризованной задаче. Достаточным условием сходимости ряда (7), является [4] условие полноты системы функций $\varphi_m^j(\xi_i)$.

Подставляя выражения (8) в (6), получим в силу произвольности коэффициентов для каждого момента времени уравнения

$$\begin{aligned}
& \int_V \{ [(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m] + [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \} \nabla_i (\varphi_{mj}) dV - \\
& - \rho_0 \int_V X^m \varphi_{mj} dV + \rho_0 \int_V \ddot{u}^m \varphi_{mj} dV - \int_S P^m \varphi_{mj} dS = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (9)
\end{aligned}$$

Возмущения объемных и поверхностных сил представимы в виде [4]

$$X^m = M_1^{m\alpha} u_\alpha + M_2^{m\alpha} \dot{u}_\alpha;$$

$$P^m = M_3^{m\alpha} u_\alpha + M_4^{m\alpha} \dot{u}_\alpha, \quad (10)$$

где $M_i^{m\alpha}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — линейные дифференциальные операторы по переменным ξ_i .

Так как в каждое из слагаемых соотношения [1] возмущения перемещений входят в степени, соответствующей цифре в скобках, то после подстановки в соответствующие соотношения [1] в общем случае можно записать

$$\begin{aligned} S^{in}(1) &= f_p \cdot S^{inp}; & S^{in}(2) &= f_p \cdot f_l \cdot S^{inpl}; \\ S^{in}(3) &= f_p \cdot f_l \cdot f_r \cdot S^{inplr}, \dots, & & \left(\sum_1^\infty p, l, r, \dots \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Вид S^{inp} , S^{inpl} , S^{inplr} , ... конкретизируются заданием формы упругого потенциала.

Подставляя полученные соотношения приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $f_k(t)$ в форме

$$A_p^k \ddot{f}_k + B_p^k \dot{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + \dots = 0, \quad (12)$$

где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} A_p^k &= \rho_0 \int_V \varphi_p^m \varphi_m^k dV; \\ B_p^k &= - \int_V \varphi_{mp} M_2^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dV - \int_S \varphi_{mp} M_4^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dS; \\ C_p^k &= \int_V \left[S^{0in} \nabla_n \varphi_p^m + g_{lp} S^{inl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m}) \right] \nabla_l \varphi_m^k dV - \\ &\quad - \rho_0 \int_V \varphi_{mp} M_2^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dV - \rho_0 \int_V \varphi_{mp} M_4^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dS; \\ D_p^{kd} &= \int_V \left[S^{ind} \nabla_n \varphi^{mk} + S^{indk} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m}) \right] \nabla_l \varphi_{mp} dV; \\ L_p^{kdr} &= \int_V \left[S^{indk} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indkr} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m}) \right] \nabla_l \varphi_{mp} dV; \\ p, k, d, r, \dots &= 1, 2, 3, \dots \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Если пренебречь возмущениями массовых и поверхностных сил, что соответствует случаю, когда на тело действуют "мертвые" нагрузки, то в выражениях (13) все слагаемые, содержащие операторы $M_i^{m\alpha}$, обратятся в ноль и система уравнений (12) запишется в форме

$$A_p^k \ddot{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + \dots = 0. \quad (14)$$

Таким образом, вопрос об устойчивости основного процесса деформирования нелинейно-упругой среды свелся к вопросу об устойчивости нулевого решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида (12) в случае "следающих" нагрузок и соответственно, (14) в случае "мертвых" нагрузок.

Как видно из (13), коэффициенты нелинейной системы уравнений (12) определяются через полную систему функций, а также через компоненты симметричного тензора напряжений. Ввиду этого, а также в силу произвольности функций времени $f_l(t)$ коэффициенты (13) системы уравнений (12) будут симметричны относительно перестановки индексов.

Умножим обе части системы уравнений (12) справа на $\dot{f}_p$

$$A_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + B_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + C_p^k f_k \dot{f}_p + D_p^{kd} f_k f_d \dot{f}_p + L_p^{kdr} f_k f_d f_r \dot{f}_p + \dots = 0. \quad (15)$$

Ввиду симметрии коэффициентов (13) систему уравнений (12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} A_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + \frac{1}{2} C_p^k f_k \dot{f}_p + \frac{1}{3} D_p^{kd} f_k f_p f_d + \frac{1}{4} L_p^{kdr} f_k f_p f_d f_r + \dots \right] = \\ = -B_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p, \quad (p, k, d, \dots = 1, 2, \dots \infty). \end{aligned}$$

В дальнейшем будем предполагать не отрицательность квадратичной формы $F = B_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p$, что соответствует присутствию диссипативных сил [6].

Введем функцию

$$\Pi = \frac{1}{2} A_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + \frac{1}{2} C_p^k f_k \dot{f}_p + \frac{1}{3} D_p^{kd} f_k f_p f_d + \frac{1}{4} L_p^{kdr} f_k f_p f_d f_r + \dots, \quad \left(\sum_1^\infty p, k, d, \dots \right). \quad (16)$$

Если функция Π будет положительно определенной для тех значений координат и скоростей, которые не превосходят величин, найденных из соотношений [2]

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{f}_l} \right)_{t=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial f_l} \right)_{t=0} = 0, \quad (17)$$

то согласно первой теореме Ляпунова об устойчивости невозмущенное состояние будет устойчиво в этой области, так как производная от функции Π по времени, в силу системы (15), неположительна [6].

Соотношения (17) дают систему уравнений для определения величин начальных возмущений, при которых тело может перейти в новое положение равновесия

$$A_p^k \dot{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + \dots = 0, \quad p, k, d, \dots = 1, 2, 3, \dots \infty. \quad (18)$$

Система уравнений (17) соответствует аналогичным соотношениям, полученным в [5,6] при исследовании задачи в динамической постановке. Заметим, что полученный выше критерий устойчивости основного состояния соответствует статической задаче при динамическом подходе.

Рассмотрим N -мерное пространство начальных возмущений. Тогда (18) есть система N уравнений относительно N неизвестных величин возмущений $f_1, f_2, \dots, f_N$.

Функция Π в N -мерном пространстве начальных возмущений будет представлять собой некоторую гиперповерхность. Если вписать в эту гиперповерхность гиперсферу радиуса

$$|f| = \min \{|f_1|, \dots, |f_N|\}, \quad (19)$$

то, при найденном $|f|$ нулевое решение системы уравнений (18) будет устойчиво, и, следовательно, будет устойчив и основной процесс деформирования.

Система уравнений (18) определяет новое положение равновесия тела, которое, очевидно, будет неустойчивым. Действительно, если перенести начало координат в точку $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$, найденную из (18), то в окрестности этой точки функция Π будет принимать отрицательные значения и, согласно первой теореме Ляпунова о неустойчивости, основной процесс деформирования будет неустойчивым, так как знак функции Π будет совпадать со знаком ее производной по времени в силу системы (15).

Таким образом, для определения области возмущений, в которой основной процесс деформирования будет устойчив, достаточно решить систему уравнений (15) относительно $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ и проверить будет ли для этих значений положительна функция Π , имеющая вид (16).

Таким образом, в зависимости от уравнений состояния могут быть записаны краевые задачи, соответственно, для сжимаемых и несжимаемых нелинейно-упругих тел, относительно возмущений перемещений. Каждая из задач будет представлять собой нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно возмущений перемещений. Это следует из того, что возмущения всех неизвестных величин E_{ij} , S^{ij} , ..., как показано выше, в итоге выражаются через возмущения перемещений. Решить эти задачи даже при выборе простейшей формы упругого потенциала прямыми методами не представляется возможным, поэтому приходится прибегать к приближенным методам. Аналогичные задачи могут быть решены и для нелинейно-вязкоупругих тел.

Выведем критерии устойчивости для различного типа потенциалов.

а) Рассмотрим нелинейно-упругое тело, описываемое потенциалом Мурнагана. В этом случае из соотношений для величин возмущений компонент тензора напряжений имеем

$$S^{ij} = g^{ij}(\lambda A_1 + 2aA_1 + aA_1^2 + bA_2) + 2g^{ik}\varepsilon_k^{0i}bA_1 + 2\mu g^{ik}\varepsilon_k^j + b g^{ij}(A_1^0 + A_1) + c\varepsilon_k^{0i}\varepsilon_l^k g^{lj} + c\varepsilon_k^i\varepsilon_l^{0k}g^{lj} + c\varepsilon_k^i\varepsilon_l^k g^{lj}. \quad (20)$$

Подставляя в соотношения (20) выражения для соответствующих компонент, получим

$$S^{ij} = S^{ij}(1) + S^{ij}(2) + S^{ij}(3) + S^{ij}(4), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} S^{ij}(1) &= [g^{ij}(\lambda + 2aA_1^0) + 2g^{il}\varepsilon_l^{0j}]\varepsilon_s^s(1) + g^{ij}b[\varepsilon_l^{0k}\varepsilon_k^l(1) + \varepsilon_k^{0l}\varepsilon_l^k(1)] + \\ &\quad + 2(\mu + bA_1^0)\varepsilon_l^i(1)g^{lj} + c\varepsilon_k^{0i}\varepsilon_l^k(1)g^{lj} + c\varepsilon_k^l(1)\varepsilon_l^{0k}g^{lj}; \\ S^{ij}(2) &= [g^{ij}(\lambda + 2aA_1^0) + 2\varepsilon_l^{0i}g^{lj}b]\varepsilon_s^s(2) + g^{ij}a\varepsilon_s^s(2) + \\ &\quad + g^{ij}b[\varepsilon_l^{0k}\varepsilon_k^l(2) + \varepsilon_k^{0l}\varepsilon_l^k(2) + \varepsilon_l^k(1)\varepsilon_k^l(1)] + 2(\mu + bA_1^0)\varepsilon_l^i(2)g^{lj} + \\ &\quad + c\varepsilon_k^{0i}\varepsilon_l^k(2)g^{lj} + c\varepsilon_k^i(2)\varepsilon_l^{0k}g^{lj} + c\varepsilon_k^i(1)\varepsilon_l^k(1)g^{lj} + 2b\varepsilon_l^i(1)\varepsilon_s^s(1)g^{lj}; \\ S^{ij}(3) &= g^{ij}a\varepsilon_s^s(1)\varepsilon_k^k(2) + g^{ij}b[\varepsilon_l^k(1)\varepsilon_k^l(2) + \varepsilon_l^k(2)\varepsilon_k^l(1)] + \\ &\quad + c[\varepsilon_k^i(1)\varepsilon_l^k(2)g^{ij} + \varepsilon_k^i(2)\varepsilon_l^k(1)g^{ij}] + 2b\varepsilon_l^i(1)\varepsilon_s^s(2)g^{lj} + 2b\varepsilon_l^i(2)\varepsilon_s^s(1)g^{lj}; \\ S^{ij}(4) &= g^{ij}[a\varepsilon_s^s(2) + b\varepsilon_k^k(2)] + c\varepsilon_k^i(2)\varepsilon_l^k(2)g^{lj} + 2b\varepsilon_l^i(2)\varepsilon_s^s(2)g^{lj}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из соотношений для смешанных компонент выводим

$$\varepsilon_j^i(1) = \frac{1}{2}g^{il}f_k \left(\nabla_j \varphi_l^k + \nabla_j \varphi_l^k + \nabla_l u^{0n} \nabla_j \varphi_n^k + \nabla_j u^{0n} \nabla_l \varphi_n^k \right) = f_k \varepsilon_j^{ki};$$

$$\varepsilon_j^i(2) = \frac{1}{2}g^{il}f_k f_p \nabla_j \varphi_m^n \nabla_l \varphi_n^k g^{mp} = f_k f_p \varepsilon_j^{kpi};$$

$$k, p, \dots = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22), получим выражения типа (11)

$$S^{ij}(1) = f_p S^{ijp}; \quad S^{ij}(2) = f_p f_l S^{ijpl};$$

$$S^{ij}(3) = f_p f_l f_r S^{ijprl}; \quad S^{ij}(4) = f_p f_l f_r f_k S^{ijprlk};$$

$$i, n = 1, 2, 3; \quad p, l, r, k, \dots = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (24)$$

Здесь

$$S^{kij} = [g^{ij}(\lambda + 2aA_1^0) + 2g^{il}\varepsilon_l^{0j}]\varepsilon_s^{ks} + g^{ij}b[\varepsilon_l^{0m}\varepsilon_m^{kl} + \varepsilon_m^{0l}\varepsilon_l^{mk}] +$$

$$+ g^{lj}[2(\mu + bA_1^0)\varepsilon_l^{ki} + c\varepsilon_m^{0i}\varepsilon_l^{mk} + c\varepsilon_m^{mi}\varepsilon_l^{0k}];$$

$$S^{kpij} = [g^{ij}(\lambda + 2aA_1^0) + 2g^{il}\varepsilon_l^{0j}b]\varepsilon_s^{ks} + g^{ij}a\varepsilon_s^{sk^2} +$$

$$+ g^{ij}b[\varepsilon_l^{0m}\varepsilon_m^{kpl} + \varepsilon_m^{0l}\varepsilon_l^{mpk} + \varepsilon_l^{mk}\varepsilon_m^{pl}] + g^{lj}[2(\mu + bA_1^0)\varepsilon_l^{kpi} +$$

$$+ c\varepsilon_m^{0i}\varepsilon_l^{mpk} + c\varepsilon_m^{ikl}\varepsilon_l^{0m} + c\varepsilon_m^{ki}\varepsilon_l^{pm}] + 2bg^{lj}\varepsilon_l^{ki}\varepsilon_m^{pm};$$

$$S^{kplij} = g^{ij}a\varepsilon_s^{ms}\varepsilon_m^{kpl} + g^{ij}b[\varepsilon_s^{ms}\varepsilon_m^{kpl} + \varepsilon_s^{mps}\varepsilon_m^{kl}] +$$

$$+ cg^{mj}[\varepsilon_s^{ki}\varepsilon_m^{pls} + \varepsilon_s^{kpi}\varepsilon_m^{ls}] + 2bg^{lj}[\varepsilon_s^{ki}\varepsilon_m^{pls} + \varepsilon_s^{kpi}\varepsilon_m^{ls}];$$

$$S^{kpldij} = g^{ij}[a\varepsilon_s^{kps}\varepsilon_m^{ldm} + b\varepsilon_s^{kps}\varepsilon_m^{ldm}] + g^{mj}c\varepsilon_s^{kpi}\varepsilon_m^{lds} + 2b\varepsilon_s^{kpi}\varepsilon_m^{ldm}g^{lj}. \quad (25)$$

Система уравнений типа (12) здесь принимает форму

$$A_p^k \ddot{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + E_p^{kdrl} f_k f_d f_r f_l + R_p^{kdrlt} f_k f_d f_r f_l f_t = 0. \quad (26)$$

При этом коэффициенты этой системы уравнений согласно (15) таковы

$$A_p^k = \rho_0 \int_V \varphi_p^m \varphi_m^k dV;$$

$$C_p^k = \int_V [S^{0in} \nabla_n \varphi_p^m + g_{lp} S^{inl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \nabla_i \varphi_m^k dV;$$

$$D_p^{kd} = \int_V [S^{ind} \nabla_n \varphi^{mk} + S^{indk} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] \nabla_i \varphi_{mp} dV;$$

$$L_p^{kdr} = \int_V [S^{indk} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indr k} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] \nabla_i \varphi_{mp} dV;$$

$$E_p^{kdrl} = \int_V [S^{indkr} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indrkl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] \nabla_i \varphi_{mp} dV;$$

$$R_p^{kdrlt} = \int_V S^{indrkl} \nabla_n \varphi^{mt} \nabla_i \varphi_{mp} dV. \quad (27)$$

Здесь величины $S^{in}, \dots, S^{indrkl}$ определяются по формулам (25). Условием устойчивости будет положительность функции Ляпунова II типа (16), которая для потенциала Мурнагана будет следующей

$$\Pi = \frac{1}{2} A_p^k \ddot{f}_k \ddot{f}_p + \frac{1}{2} C_p^k f_k f_p + \frac{1}{3} D_p^{kd} f_k f_p f_d + \frac{1}{4} L_p^{kdr} f_k f_p f_d f_r +$$

$$+\frac{1}{5}E_p^{kdrl}f_kf_pfdfrfl + \frac{1}{6}R_p^{kdrlt}f_kf_pfdfrflft, \quad \left(\sum_1^\infty k, p, d, r, l, t\right). \quad (28)$$

При этом допускаемые величины начальных возмущений определяются из системы уравнений типа (15), которая для потенциала Мурнагана принимает вид

$$A_p^k \overset{\bullet}{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + E_p^{kdrl} f_k f_d f_r f_l + R_p^{kdrlt} f_k f_d f_r f_l f_t = 0, \quad \left(\sum_1^\infty k, p, d, r, l, t\right). \quad (29)$$

б) Рассмотрим нелинейно-упругое сжимаемое тело, описываемое двухконстантным потенциалом. Этот потенциал получается из потенциала Мурнагана, если в последнем потенциале положить

$$a = b = c = 0. \quad (30)$$

Тогда соотношения (26) принимают вид

$$S^{kij} = \left(g^{ij}\lambda + 2g^{il}\varepsilon_l^{0j}\right)\varepsilon_s^{ks} + 2\mu\varepsilon_l^{ki}g^{lj};$$

$$S^{kpij} = \lambda g^{ij}\varepsilon_s^{kps} + 2\mu\varepsilon_l^{kpi}g^{lj}; \quad S^{kplij} = 0; \quad S^{kpldij} = 0. \quad (31)$$

Учитывая это из (25) выводим отличные от нуля значения коэффициентов системы уравнений типа (15) для двухконстантного потенциала в виде

$$A_p^k = \rho_0 \int_V \varphi_p^m \varphi_m^k dV;$$

$$C_p^k = \int_V \left[S^{0in} \nabla_n \varphi_p^m + g_{lp} S^{inl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m}) \right] \nabla_i \varphi_m^k dV;$$

$$D_p^{kd} = \int_V \left[S^{ind} \nabla_n \varphi^{mk} + S^{indk} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om}) \right] \nabla_i \varphi_{mp} dV;$$

$$L_p^{kdr} = \int_V S^{indr} \nabla_n \varphi^{mr} \nabla_i \varphi_{mp} dV. \quad (32)$$

Тогда система уравнений (12) принимает конкретный вид

$$A_p^k \overset{\bullet\bullet}{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r = 0. \quad (33)$$

Очевидно, условием устойчивости будет положительность функции Ляпунова вида

$$\Pi = \frac{1}{2} A_p^k \overset{\bullet}{f}_k \overset{\bullet}{f}_p + \frac{1}{2} C_p^k f_k f_p + \frac{1}{3} D_p^{kd} f_k f_p f_d + \frac{1}{4} L_p^{kdr} f_k f_p f_d f_r. \quad (34)$$

При этом для величин начальных возмущений, не превосходящих величин, найденных из системы уравнений (33), имеем

$$A_p^k \overset{\bullet}{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r = 0. \quad (35)$$

в) Рассмотрим потенциал Муни. В этом случае компоненты тензора напряжений $\mathbf{S}$ будут вычисляться по формулам (31). Для возмущений компонент тензора напряжений получим

$$S^{ij} = g^{ij} 4\mu A_1 - 4\mu g^{ik} \varepsilon_k^j + p^0 G^{ij} + p G^{0ij} + p G^{ij}.$$

Соотношения компонент тензора напряжений, запишем в виде

$$S^{ij} = S^{ij}(1) + S^{ij}(2) + S^{ij}(3) + S^{ij}(4) + S^{ij}(5),$$

где

$$\begin{aligned} S^{ij}(1) &= 4\mu g^{ij} A_1(1) - 4\mu \varepsilon_k^j(1) + u_4^0 G^{ij}(1) + u_4 G^{0ij}; \\ S^{ij}(2) &= 4\mu g^{ij} A_1(2) - 4\mu \varepsilon_k^j(2) + u_4^0 G^{ij}(2) + u_4 G^{ij}(1); \\ S^{ij}(3) &= u_4^0 G^{ij}(3) + u_4 G^{ij}(2); \\ S^{ij}(4) &= u_4^0 G^{ij}(4) + u_4 G^{ij}(3); \\ S^{ij}(5) &= u_4 G^{ij}(4). \end{aligned} \quad (36)$$

Соотношения (25) примут вид

$$\begin{aligned} G^{ij}(1) &= \varepsilon_{mn}^j [2\delta_1^i (\delta_2^n + 2\varepsilon_2^{0n}) \varepsilon_3^{km} + 2\delta_1^i (\delta_2^m + 2\varepsilon_2^{0m}) \varepsilon_3^{kn} - \\ &\quad - 2\delta_2^i (\delta_1^n + 2\varepsilon_1^{0n}) \varepsilon_3^{km} - 2\delta_2^i (\delta_3^m + 2\varepsilon_3^{0m}) \varepsilon_1^{kn} + \\ &\quad + 2\delta_3^i (\delta_1^n + 2\varepsilon_1^{0n}) \varepsilon_2^{km} + 2\delta_3^i (\delta_2^m + 2\varepsilon_2^{0m}) \varepsilon_3^{kn}] f_k = G^{ijk} f_k; \\ G^{ij}(2) &= \varepsilon_{mn}^j [2\delta_1^i (\delta_2^n + 2\varepsilon_2^{0n}) \varepsilon_3^{kpm} + 2\delta_1^i (\delta_2^m + 2\varepsilon_2^{0m}) \varepsilon_3^{kpn} - \\ &\quad - 2\delta_2^i (\delta_1^n + 2\varepsilon_1^{0n}) \varepsilon_3^{kpm} - 2\delta_2^i (\delta_3^m + 2\varepsilon_3^{0m}) \varepsilon_1^{kpn} + \\ &\quad + 2\delta_3^i (\delta_1^n + 2\varepsilon_1^{0n}) \varepsilon_2^{kpm} + 2\delta_3^i (\delta_2^m + 2\varepsilon_2^{0m}) \varepsilon_3^{kpn} + 4\delta_1^i \varepsilon_2^{kn} \varepsilon_3^{pm}] f_k f_p = G^{ijkp} f_k f_p; \\ G^{ij}(3) &= \varepsilon_{mn}^j 4\delta_1^i [\varepsilon_2^{kn} \varepsilon_3^{prm} + \varepsilon_2^{kpn} \varepsilon_3^{rm}] f_k f_p f_r = G^{ijkpr} f_k f_p f_r; \\ G^{ij}(4) &= \varepsilon_{mn}^j 4\delta_1^i \varepsilon_2^{kpn} \varepsilon_3^{nlm} f_k f_p f_r f_l = G^{ijkprl} f_k f_p f_r f_l, \quad \sum_1^\infty k, p, r, l. \end{aligned} \quad (37)$$

В качестве величины u_4 возьмем

$$u_4 = f_l (\varphi_1^l + \varphi_2^l + \varphi_3^l) = f_l u_4^l;$$

Для компонент тензора напряжений получим

$$\begin{aligned} S^{ij}(1) &= f_p S^{ijp}; \quad S^{ij}(2) = f_p f_l S^{ijpl}; \\ S^{ij}(3) &= f_p f_l f_r S^{ijplr}; \quad S^{ij}(4) = f_p f_l f_r f_k S^{ijplrk}; \\ S^{ij}(5) &= f_p f_l f_r f_k f_d S^{ijplrk d}; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \sum_1^\infty k, p, r, l, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} S^{kij} &= 4\mu g^{ij} \varepsilon_s^{ks} - 4\mu g^{ik} \varepsilon_m^{kj} + u_4^0 G^{kij} + u_4^k G^{0ij}; \\ S^{kpij} &= 4\mu g^{ij} \varepsilon_s^{kps} - 4\mu g^{ik} \varepsilon_m^{kpj} + u_4^0 G^{kpij} + u_4^k G^{pij}; \\ S^{kplij} &= u_4^0 G^{kplij} + u_4^k G^{plij}; \quad S^{kplrdij} = u_4 G^{kplrdij}; \\ &k, p, l, r, d = 1, 2, 3, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (39)$$

Система уравнений типа (33) принимает вид

$$\begin{aligned} A_p^k \overset{\bullet\bullet}{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + E_p^{kdr l} f_k f_d f_r f_l + \\ + R_p^{kdr l t} f_k f_d f_r f_l f_t + M_p^{kdr l t z} f_k f_d f_r f_l f_t f_z = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Коэффициенты системы уравнений (40) определяются аналогично (32) и имеют вид

$$\begin{aligned}
A_p^k &= \rho_0 \int_V \varphi_p^m \varphi_m^k dV; \\
C_p^k &= \int_V \left[S^{0in} \nabla_n \varphi_p^m + g_{lp} S^{inl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m}) \right] \nabla_i \varphi_m^k dV; \\
D_p^{kd} &= \int_V \left[S^{ind} \nabla_n \varphi^{mk} + S^{indk} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om}) \right] \nabla_i \varphi_{mp} dV; \\
L_p^{kdr} &= \int_V \left[S^{indr} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indr} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om}) \right] \nabla_i \varphi_{mp} dV; \\
E_p^{kdrl} &= \int_V \left[S^{indr} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indrkl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om}) \right] \nabla_i \varphi_{mp} dV; \\
R_p^{kdrlt} &= \int_V \left[S^{indrkl} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indrkl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om}) \right] \nabla_i \varphi_{mp} dV; \\
M_p^{kdrltz} &= \int_V S^{indrkl} \nabla_n \varphi^{mt} \nabla_i \varphi_{mp} dV.
\end{aligned} \tag{41}$$

Условием устойчивости будет положительность функции Ляпунова типа (34), которая для потенциала Муни будет следующей

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} A_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + \frac{1}{2} C_p^k f_k f_p + \frac{1}{3} D_p^{kd} f_k f_p f_d + \frac{1}{4} L_p^{kdr} f_k f_p f_d f_r + \\
&+ \frac{1}{5} E_p^{kdrl} f_k f_p f_d f_r f_l + \frac{1}{6} R_p^{kdrlt} f_k f_p f_d f_r f_l f_t + \frac{1}{7} M_p^{kdrltz} f_k f_p f_d f_r f_l f_t f_z.
\end{aligned} \tag{42}$$

При этом величины допускаемых начальных возмущений определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
A_p^k \dot{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + E_p^{kdrl} f_k f_d f_r f_l + \\
+ R_p^{kdrlt} f_k f_d f_r f_l f_t + M_p^{kdrltz} f_k f_d f_r f_l f_t f_z = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

г) Для потенциала Трелоара надо положить $\mu = 0$, а вместо λ подставить E , тогда получим

$$\begin{aligned}
S^{kij} &= u_4^0 G^{kij} + u_4^k G^{0ij}; & S^{kpij} &= u_4^0 G^{kpij} + u_4^k G^{pij}; \\
S^{kplij} &= u_4^0 G^{kplij} + u_4^k G^{plij}; & S^{kprlij} &= u_4^0 G^{kprlij} + u_4^k G^{prlij}; \\
S^{kprldij} &= u_4^0 G^{kprldij} + u_4^k G^{pldrij}; & k, p, l, r, d &= 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{44}$$

Результаты и обсуждение

Очевидно, что соотношения для потенциала Трелоара имеют тот же вид, с той лишь разницей, если в них сделать соответствующие подстановки.

Полученные критерии устойчивости для различных потенциалов Мурнагана, Муни, Трелоара и т.д. в рамках конечных возмущений дают возможность получить величины критических значений параметров нагрузки в зависимости от величины начальных возмущений, которые могут реализовываться в виде конечной последовательности точек бифуркаций на фазовой плоскости. Это существенным образом отличает

предложенный подход к исследованию устойчивости нелинейно-упругих систем от линеаризированных теорий.

Выводы

Достаточно отметить, что для линеаризированных теорий (точной трехмерной линеаризированной теории устойчивости и прикладных теорий) как известно характерно лишь одно значение параметра нагрузки, при котором тело может потерять устойчивость. При этом считается, что при увеличении параметра нагрузки вплоть до критического, материал устойчивости не теряет, а при переходе значения параметра нагрузки через критическое значение происходит потеря устойчивости. Учет конечности возмущений позволяет избежать этого. Условие положительности функции Ляпунова для величин начальных возмущений, найденных из условий вида (44), дает возможность для каждого значения параметра нагрузки находить такую область возмущений, в которой невозмущенное состояние будет устойчиво. И наоборот, задавая область возмущений, мы можем найти такие значения параметра нагрузки, при которых невозмущенное состояние будет устойчиво. Заметим, что развитый в настоящей главе подход к исследованию устойчивости нелинейно-упругих систем применим как в случае, если на тело действуют «мертвые» нагрузки, так и в случае, если на тело действуют «следящие» нагрузки, то есть как для консервативных, так и не консервативных внешних нагрузок.

Бесспорно, что разработанный подход к исследованию устойчивости нелинейно-упругих сред в «большом» позволяет исследовать не только докритическое поведение систем, но и послекритическое. Однако последнее связано с проведением достаточно трудоемкого вычислительного эксперимента, результаты которого в рассмотренном классе задач не имеют, как представляется практического смысла. По-видимому, это существенно в задачах сейсмологии, горной механики, тонкостенных элементах конструкций и т.п.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Sumin A. I., Boger A. A., Sumin V. A. Nonlinear dynamics in problems of stability of complex media // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. 03. Т. 973. с. 012019.
- [2] Stability of a nonlinear elastic plate under uniaxial loading with respect to finite perturbations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin [и др.] // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. 04. Т. 1203. с. 012025.
- [3] Torsion stability of a cylinder with circular and elliptical section under finite perturbations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin [и др.] // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. 03. Т. 1479. с. 012138.
- [4] Stability of a three-dimensional plate made of a nonlinear viscoelastic material under superimposed finite deformations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin [и др.] // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. 05. Т. 1902. с. 012025.
- [5] Сумин А.И. Спорыхин А.Н. Нелинейная динамика в задачах устойчивости механики сложных сред. Academic publishing: LAP LAMBERT, 2014. 173 с.
- [6] Sporykhin AN, Sumin AI. On new phenomena in the theory of stability of nonlinear media under finite perturbations // (Doc. USSR Academy of Sciences) Series: A. 1982. Т. 8. С. 46–49.
- [7] Sumin A. I. On the question of the stability of a plate made of a nonlinear viscoelastic material with finite deformations imposed // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2010. Т. 3, № 2(8). С. 501–505.
- [8] Guz A. N. Stability of Elastic Bodies at Finite Deformations. Kiev: Naukova Dumka, 1973. 271 с.

A. I. Sumin, A. A. Boger, V. A. Sumin, S. V. Ryabov

STABILITY OF NONLINEAR ELASTIC MEDIA UNDER IMPOSED FINITE DEFORMATIONS

Military Educational Scientific Center of the Military – Air Forces "Military Air Academy named after Professor N E Zhukovsky and Yu A Gagarin", Voronezh, Russia

Abstract. The paper studies aspects of the stability of nonlinear elastic bodies with respect to superimposed finite deformations. The question of studying the basic process of deformation of the initial medium is reduced to solving a nonlinear boundary value problem with variable coefficients for finite perturbations. Solutions for displacement perturbations are selected in the form of series containing eigenfunctions. Using the principle of possible displacements, the question of the stability of the ground state is reduced to the study of the stability of the zero solution of a system of ordinary differential equations with constant coefficients. For this system, a function is constructed, which, with some restrictions on the initial perturbations, will be the Lyapunov function, which is used to find stability regions.

Keywords: stability, nonlinear elastic medium, finite perturbations, elastic potentials, Lyapunov function, stability regions, finite deformations, stability of the solution, zero solution, bifurcation points.

REFERENCES

- [1] Sumin A. I., Boger A. A., Sumin V. A. Nonlinear dynamics in problems of stability of complex media // Journal of Physics: Conference Series. 2018. 03. Vol. 973. p. 012019.
- [2] Stability of a nonlinear elastic plate under uniaxial loading with respect to finite perturbations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin et al. // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 04. Vol. 1203. p. 012025.
- [3] Torsion stability of a cylinder with circular and elliptical section under finite perturbations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin et al. // Journal of Physics: Conference Series. 2020. 03. Vol. 1479. p. 012138.
- [4] Stability of a three-dimensional plate made of a nonlinear viscoelastic material under superimposed finite deformations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin et al. // Journal of Physics: Conference Series. 2021. 05. Vol. 1902. p. 012025.

Sumin Alexander Ivanovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Mathematics of the Military Educational and Scientific Center of the Military – Air Forces "Military Air Academy named after Professor N E Zhukovsky and Yu A Gagarin", Voronezh, Russia.

Boger Andrey Alexandrovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics of the Military Educational and Scientific Center of the Military – Air Forces "Military Air Academy named after Professor N E Zhukovsky and Yu A Gagarin", Voronezh, Russia.

Sumin Viktor Alexandrovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics of the Military Educational and Scientific Center of the Military – Air Forces "Military Air Academy named after Professor N E Zhukovsky and Yu A Gagarin", Voronezh, Russia.

Ryabov Sergey Vladimirovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics of the Military Educational and Scientific Center of the Military – Air Forces "Military Air Academy named after Professor N E Zhukovsky and Yu A Gagarin", Voronezh, Russia.

- [5] Sumin A. I., Sporykhin A. N. Nonlinear dynamics in problems of stability of mechanics of complex media. Academic publishing: LAP LAMBERT, 2014. 173 p.
- [6] Sporykhin A., Sumin A. On new phenomena in the theory of stability of nonlinear media under finite perturbations // (Doc. USSR Academy of Sciences) Series: A. 1982. Vol. 8. P. 46–49.
- [7] Sumin A. I. On the question of the stability of a plate made of a nonlinear viscoelastic material with finite deformations imposed // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. Vol. 3, no. 2(8). P. 501–505.
- [8] Guz A. N. Stability of Elastic Bodies at Finite Deformations. Kiev: Naukova Dumka, 1973. 271 p.