

В. Э. Богачева<sup>1</sup>, Л. В. Глаголев<sup>2</sup>

## РАЗРЫВ ПО МОДЕ I АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ДИАГОНАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

<sup>1</sup>Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

<sup>2</sup>КБП им. академика А.Г. Шипунова, г. Тула, Россия

**Аннотация.** Рассматривается упругое деформирование композита, состоящей из двух пластин, связанных адгезионным слоем в состоянии плоской деформации. Напряженное состояние слоя рассматривается на основе средних по толщине характеристик. Из общей вариационной постановки с учетом теории Миндлина–Рейснера получена постановка задачи в дифференциальном виде. Показано, что в напряженном состоянии слоя имеет место практическое совпадение двух средних главных напряжений, действующих в направлениях ортогональных отрыву. Установлено, что величина, к которой сходится произведение толщины слоя и удельной свободной энергии при фиксированной внешней нагрузке и предельно малой толщине адгезионного слоя, не зависит от механических свойств адгезива.

**Ключевые слова:** адгезионный слой, композит, энергетическое произведение, слой взаимодействия, линейный параметр, нормальный отрыв, упругое деформирование.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.005

УДК: 539.375

### Введение

Одним из основных разделов современной механики деформируемого твердого тела является механика композиционных материалов. При проведении экспериментов для исследования трещиностойкости адгезионных слоев в качестве образца обычно используют двухконсольную балку. А трещиноподобный дефект в адгезиве моделируют слоем нулевой толщины.

---

© Богачева В. Э., Глаголев Л. В., 2022

*Богачева Виктория Эдуардовна*

e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, аспирант кафедры вычислительной механики и математики, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

*Глаголев Леонид Вадимович*

e-mail: len4ic92@gmail.com, кандидат физико-математических наук, начальник бюро, АО КБП им. академика А.Г. Шипунова, г. Тула, Россия.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00003, <https://rscf.ru/project/22-71-00003/> в Тульском государственном университете.

Поступила 20.11.2022

В работах [1–8] трещиноподобный дефект представляют в виде разреза с характерной толщиной. Для случая зарождения трещины в адгезионном слое, который соединяет тела, по толщине значительно превосходящие слой, адгезионный слой заменяют ”слоем взаимодействия” [6–8]. Его механические характеристики соответствуют адгезиву, а толщина задается в виде линейного параметра  $\delta_0$ .

В качестве критерия разрушения в работе [7] рассматривают энергетическое произведение. При различии модуля упругости консоли с модулем упругости адгезива и примерном равенстве их коэффициентов Пуассона данная характеристика не имеет существенного различия.

### 1. Постановка задачи

В качестве образца рассматривается композитная пластина длиной  $\ell + a$ , состоящий из трех тел (рис. 1). Для консолей 1 и 2 заданы одинаковые толщины  $h$  и механические свойства. По длине  $\ell$  тела связаны слоем взаимодействия 3, толщина которого  $\delta_0$ . Правый торец слоистого композита жестко закреплен от перемещений. В виде антисимметричной нагрузки на левых торцах консолей 1 и 2 действует изгибающий момент  $M$ . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки.

Композитную пластину рассматриваем в состоянии плоской деформации ( $\varepsilon_{33} = 0$ ), а поведение слоя и консолей — в рамках линейной теории упругости.

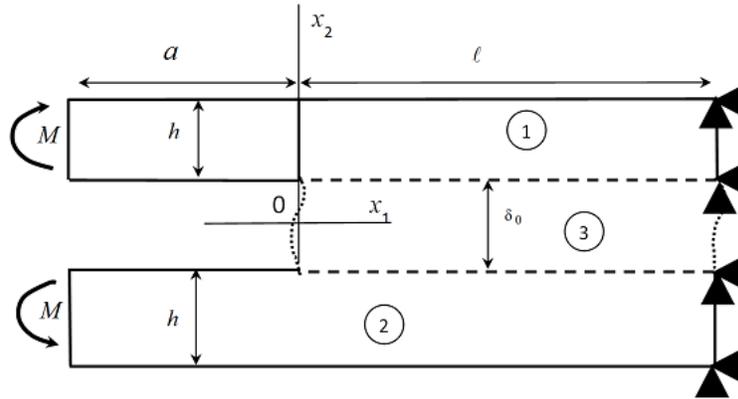


Рис. 1. Композитная пластина

Применив концепцию ”слоя взаимодействия”, развитую в работах [6–8], для описания взаимодействия слоя 3 с консолями, рассмотрим вариационную форму равновесия тел 1 и 2:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 +$$

$$+ 0.5 \delta_0 \left( \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + \\ & + 0.5\delta_0 \left( \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathbf{P}^2 \cdot \delta \mathbf{u} dl, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\cdot \cdot$  — двойное скалярное умножение;  $\cdot$  — скалярное умножение;  $S_k$  — площадь поперечного сечения  $k$ -го тела;  $k = 1, 2$  здесь и далее;  $L_k$  — граница приложения внешней нагрузки для  $k$ -го тела;  $u_k^+$  — компоненты векторов перемещений верхней границы слоя;  $u_k^-$  — нижней границы слоя;  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор деформаций;  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  — тензор средних напряжений слоя;  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — тензор средних деформаций слоя.

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = 0.5 \left( \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} \right), \quad \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \left( \frac{u_2^+ - u_2^-}{\delta_0} \right), \quad (4)$$

$$\bar{\varepsilon}_{12}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{21} = 0.5 \left( \frac{u_1^+ - u_1^-}{\delta_0} + 0.5 \left( \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-}{\partial x_1} \right) \right).$$

Считаем, что между границами области 3 и 1, 2 жесткое сцепление, а векторы напряжений по границам слоя равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ &= \mathbf{u}(x_1, \delta_0/2); \quad \sigma_{2i}^+ \mathbf{e}_i = -\sigma_{2i}(x_1, \delta_0/2) \mathbf{e}_i; \\ \mathbf{u}^- &= \mathbf{u}(x_1, -\delta_0/2); \quad \sigma_{2i}^- \mathbf{e}_i = -\sigma_{2i}(x_1, \delta_0/2) \mathbf{e}_i; \quad x_1 \in [0, \ell]. \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\sigma_{2i}^+$ ,  $\sigma_{2i}^-$  — граничные напряжения слоя;  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2$  — орты осей координат.

В рамках линейной теории упругости уравнения (1) и (2) замкнем определяющими соотношениями в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k}{1 + \nu_k} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu_k}{1 - 2\nu_k} \varepsilon \delta_{ij} \right), \quad (6)$$

где  $E_k$  — модуль упругости  $k$ -го тела;  $\nu_k$  — коэффициент Пуассона  $k$ -го тела;  $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  — объемная деформация;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $i, j = 1, 2, 3$ .

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left( \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right). \quad (7)$$

Учитывая геометрию образца и приложенное нагружение, получим следующее ограничение на поле перемещений границ слоя:  $u_1^+ = u_1^-$ ,  $u_2^+ = -u_2^-$ . В адгезионном слое с учетом (4) и (7)  $\bar{\sigma}_{12} = 0$  и для решения системы вариационных уравнений (1)–(2) достаточно ограничиться рассмотрением уравнения:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl. \quad (8)$$

Чтобы упростить задачу и получить аналитическое решение, поле перемещений в консоли 1 определяем согласно распределению Миндлина следующим образом:

$$u_1^{(1)}(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), u_2^{(1)}(x_1, x_2) = u_2^+(x_1), \quad (9)$$

где  $\varphi$  — малый угол поворота материальных нормалей к плоскости  $x_2 = \delta_0/2$ .

Основываясь на распределении (9), отличные от нуля деформации будут определяться в виде:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = u_1^{+\prime}(x_1) - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{21}^{(1)} = 0.5(u_2^{+\prime}(x_1) - \varphi(x_1)). \quad (10)$$

Обобщенные силы и обобщенный момент имеют следующий вид:

$$Q_{1k}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{1k} dx_2, M_{11}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2. \quad (11)$$

Тогда от вариационного уравнения (8), с учетом поля деформаций (10), приходим к двум системам дифференциальных уравнений для консоли 1:

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} = 0; & x_1 \in [-a; 0), \\ \frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}; & x_1 \in (0; \ell] \end{cases} \quad (12)$$

с условиями сопряжения в точке  $x_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} u_k^+|_{x_1=-0} &= u_k^+|_{x_1=+0}, \varphi|_{x_1=-0} = \varphi|_{x_1=+0}, \\ Q_{12}^{(1)}|_{x_1=-0} &= Q_{12}^{(1)}|_{x_1=+0}, M_{11}^{(1)}|_{x_1=-0} = M_{11}^{(1)}|_{x_1=+0}, \\ Q_{11}^{(1)}|_{x_1=-0} &= (Q_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0}, \end{aligned} \quad (13)$$

граничными условиями на правом торце (жесткая заделка):

$$u_1^+(x_1)|_{x_1=\ell} = 0, u_2^+(x_1)|_{x_1=\ell} = 0, \varphi(x_1)|_{x_1=\ell} = 0, \quad (14)$$

и на левом торце (изгибающий момент  $M$ ):

$$Q_{12}^{(1)}|_{x_1=-a} = 0, Q_{11}^{(1)}|_{x_1=-a} = 0, M_{11}^{(1)}|_{x_1=-a} = -M. \quad (15)$$

Напряженное состояние в слое взаимодействия определим из соотношений (4) и (7):

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 u_1^{+\prime} + D_2 u_2^+, \bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 u_1^{+\prime}, \bar{\sigma}_{33} = \nu_3 (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}), \quad (16)$$

где  $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$ ;  $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$ ;  $C_1 = \frac{2}{\delta_0} D_1$ ;  $C_2 = \frac{\delta_0}{2} D_2$ .

В результате система (12) с учетом напряженного состояния адгезионного слоя (16), условий сопряжения (13) и граничных условий (14)–(15) становится замкнутой. Решение поставленной задачи определяет три неизвестные функции  $u_1^+$ ,  $u_2^+$ ,  $\varphi$ .

## 2. Решение задачи

Для нахождения напряженного состояния в вершине слоя ограничимся рассмотрением участка  $(0; \ell]$ , перенеся граничные условия (15) в точку  $x_1 = 0$ , используя условия сопряжения (13). Приходим к следующим граничным условиям:

$$Q_{12}^{(1)} \Big|_{x_1=+0} = 0, \left( Q_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=+0} = 0, M_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=+0} = -M. \quad (17)$$

С учетом (6), (10), (11) выражения обобщенных сил и момента принимают вид:

$$Q_{11}^{(1)} = Dh \left( u_1^+{}' - \frac{h}{2} \varphi' \right), Q_{12}^{(1)} = Lh (u_2^+{}' - \varphi), M_{11}^{(1)} = Dh^2 \left( \frac{1}{2} u_1^+{}' - \frac{h}{3} \varphi' \right), \quad (18)$$

где  $D = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}$ ;  $L = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$ .

Тогда, учитывая (16), (18), система (12) примет следующий вид:

$$\begin{cases} D \left( \frac{h^2}{2} u_1^+{}'' - \frac{h^3}{3} \varphi'' \right) - Lh (u_2^+{}' - \varphi) = 0; \\ D \left( hu_1^+{}'' - \frac{h^2}{2} \varphi'' \right) + 0.5\delta_0 (D_1 u_1^+{}'' + D_2 u_2^+{}') = 0; \\ Lh (u_2^+{}'' - \varphi') = C_1 u_2^+{}' + C_2 u_1^+{}'. \end{cases} \quad (19)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений 2 порядка (19) на участке  $(0; \ell]$  имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_1^+ = \frac{a_1}{R_1} \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} - \frac{a_2}{R_1} \tilde{C}_3 e^{-R_1 x_1} + \frac{a_3}{R_2} \tilde{C}_4 e^{R_2 x_1} - \frac{a_4}{R_2} \tilde{C}_5 e^{-R_2 x_1} + \frac{C_1}{C_2} S_3 \tilde{C}_1 x_1 + \tilde{C}_6; \\ u_2^+ = \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} + \tilde{C}_3 e^{-R_1 x_1} + \tilde{C}_4 e^{R_2 x_1} + \tilde{C}_5 e^{-R_2 x_1} - S_3 \tilde{C}_1; \\ \varphi = \frac{b_1}{R_1} \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} - \frac{b_2}{R_1} \tilde{C}_3 e^{-R_1 x_1} + \frac{b_3}{R_2} \tilde{C}_4 e^{R_2 x_1} - \frac{b_4}{R_2} \tilde{C}_5 e^{-R_2 x_1}. \end{cases} \quad (20)$$

где  $b_i = \frac{(\lambda_i^2 - m_2)}{m_1}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ;  $a_1 = \frac{Lh}{C_2} R_1^2 - \frac{Lh}{C_2} \frac{(\lambda_1^2 - m_2)}{m_1} - \frac{C_1}{C_2}$ ;  $a_2 = \frac{Lh}{C_2} R_1^2 - \frac{Lh}{C_2} \frac{(\lambda_2^2 - m_2)}{m_1} - \frac{C_1}{C_2}$ ;  $a_3 = \frac{Lh}{C_2} R_2^2 - \frac{Lh}{C_2} \frac{(\lambda_3^2 - m_2)}{m_1} - \frac{C_1}{C_2}$ ;  $a_4 = \frac{Lh}{C_2} R_2^2 - \frac{Lh}{C_2} \frac{(\lambda_4^2 - m_2)}{m_1} - \frac{C_1}{C_2}$ ;  $S_2 = \frac{Dh + 0.5\delta_0 D_1}{C_2}$ ;  $S_3 = \frac{1}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2}$ ;  $m_1 = 1 + \frac{Dh}{2LS_2}$ ;  $m_2 = \frac{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2}{Lh S_2}$ ;  $m_3 = -\frac{3\delta_0 D_2 Dh + 12LC_2 S_2}{Dh(4hC_2 S_2 - 3Dh^2)}$ ;  $m_4 = \frac{12LC_2 S_2}{Dh(4hC_2 S_2 - 3Dh^2)}$ ;  $d^2 = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4$ ;  $\lambda_1 = R_1 = \sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 + d}{2}}$ ;  $\lambda_3 = R_2 = \sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 - d}{2}}$ ;  $\lambda_2 = -R_1$ ;  $\lambda_4 = -R_2$ .

Чтобы однозначно определить решение (20), необходимо найти 6 постоянных интегрирования  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4, \tilde{C}_5, \tilde{C}_6$  из условий (14), (17), которые образуют систему линейных уравнений в виде:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{R_1} \tilde{C}_2 e^{R_1 \ell} - \frac{a_2}{R_1} \tilde{C}_3 e^{-R_1 \ell} + \frac{a_3}{R_2} \tilde{C}_4 e^{R_2 \ell} - \frac{a_4}{R_2} \tilde{C}_5 e^{-R_2 \ell} + \frac{C_1 S_3}{C_2} \tilde{C}_1 \ell + \tilde{C}_6 = 0; \\ \tilde{C}_2 e^{R_1 \ell} + \tilde{C}_3 e^{-R_1 \ell} + \tilde{C}_4 e^{R_2 \ell} + \tilde{C}_5 e^{-R_2 \ell} - S_3 \tilde{C}_1 = 0; \\ \frac{b_1}{R_1} \tilde{C}_2 e^{R_1 \ell} - \frac{b_2}{R_1} \tilde{C}_3 e^{-R_1 \ell} + \frac{b_3}{R_2} \tilde{C}_4 e^{R_2 \ell} - \frac{b_4}{R_2} \tilde{C}_5 e^{-R_2 \ell} = 0; \\ \frac{R_1^2 - b_1}{R_1} \tilde{C}_2 - \frac{R_1^2 - b_2}{R_1} \tilde{C}_3 + \frac{R_2^2 - b_3}{R_2} \tilde{C}_4 - \frac{R_2^2 - b_4}{R_2} \tilde{C}_5 + \frac{C_1 S_3}{2C_2} \tilde{C}_1 = 0; \\ r_1 \tilde{C}_2 + r_2 \tilde{C}_3 + r_3 \tilde{C}_4 + r_4 \tilde{C}_5 + \left[ Dh \frac{C_1}{C_2} + \frac{\delta_0}{2} \left( D_1 \frac{C_1}{C_2} - D_2 \right) \right] S_3 \tilde{C}_1 = 0; \\ \left( \frac{a_1}{2} - \frac{h}{3} b_1 \right) \tilde{C}_2 + \left( \frac{a_2}{2} - \frac{h}{3} b_2 \right) \tilde{C}_3 + \left( \frac{a_3}{2} - \frac{h}{3} b_3 \right) \tilde{C}_4 + \left( \frac{a_4}{2} - \frac{h}{3} b_4 \right) \tilde{C}_5 = -\frac{M}{Dh^2}. \end{cases} \quad (21)$$

где  $r_i = Dh \left( a_i - \frac{h}{2} b_i \right) + \frac{\delta_0}{2} (D_1 a_i + D_2)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

В работе [8] найдено упрощенное аналитическое решение данной задачи.

### 3. Результаты

У рассматриваемого образца механические характеристики тела 1:  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu_1 = 0.3$ . А геометрические характеристики будут следующими:  $h = 0.05$  м,  $\ell = 0.2$  м,  $\delta_0 = 10^{-5}$  м при единичном изгибающем моменте  $M = 1$  Н·м. Механические характеристики для адгезионного слоя из работы [9] приведем в таблице 1.

	$E_3$ , Па	$\nu_3$
Araldite AV138	$4.9 \cdot 10^9$	0.35
Araldite 2015	$1.85 \cdot 10^9$	0.33
Sikaforce 7752	$0.49 \cdot 10^9$	0.3

Таблица 1. Механические характеристики адгезивов

На рис. 2 изображено распределение напряжений в адгезионном слое Araldite AV138. График 1 соответствует напряжению  $\bar{\sigma}_{11}$ , график 2 — напряжению  $\bar{\sigma}_{22}$ , а график 3 — напряжению  $\bar{\sigma}_{33}$ . По оси абсцисс (рис. 2) отложена длина консоли, единица измерения величины — метр, по оси ординат — значение напряжения, единица измерения величин — Паскаль.

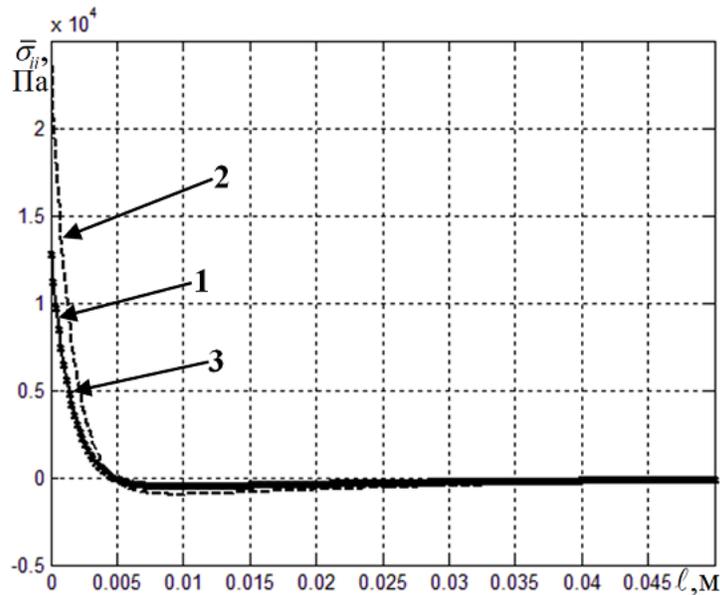
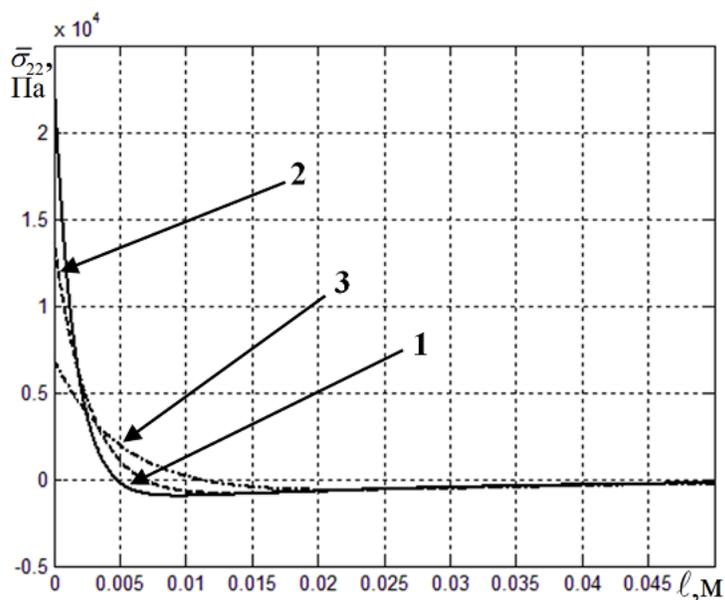


Рис. 2. Распределение напряжений в слое Araldite AV138

Из рис. 2 видно, что в слое осуществляется практическое равенство двух главных напряжений  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{33}$ .

На рис. 3 построены графики для напряжения отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$ . Кривая 1 соответствует расчету для адгезива Araldite AV138, кривая 2 — расчету для адгезива Araldite 2015, кривая 3 — расчету для адгезива Sikaforce 7752.

Из рис. 3 видно, что механические свойства адгезива влияют на распределение напряжений в адгезионном слое.

Рис. 3. Распределение напряжения  $\bar{\sigma}_{22}$ 

На рис. 4 показано распределение напряжений в торцевой области адгезионного слоя Araldite AV138 при различных длинах консоли  $\ell$ . Графики 1 и 2 построены для  $\ell = 0.05$  м, а графики 3 и 4 — для  $\ell = 1$  м. Графики 1 и 3 соответствуют напряжению  $\bar{\sigma}_{11}$ , графики 2 и 4 — напряжению  $\bar{\sigma}_{22}$ .

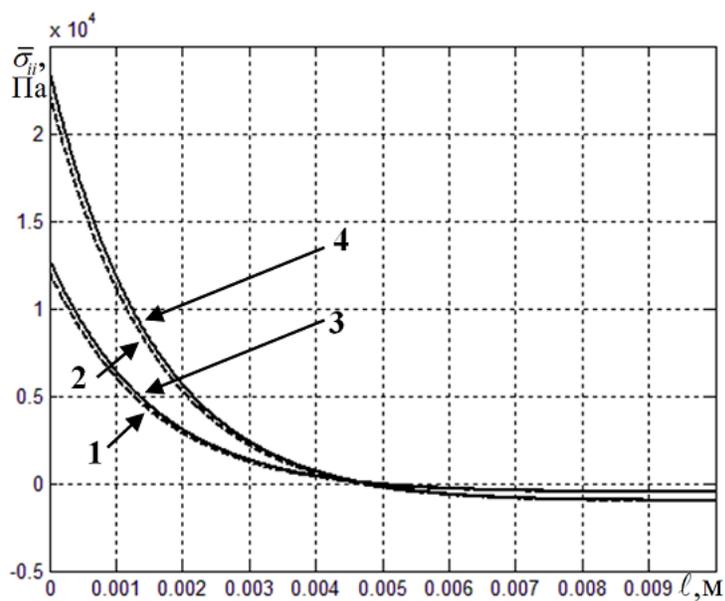


Рис. 4. Распределение напряжений в слое при различных длинах консоли

Из рис. 4 видно, что при рассмотренном диапазоне длин консолей распределение напряжений в слое практически не меняется.

#### 4. Анализ

Рассмотрим регулярную характеристику напряженно-деформированного состояния относительно изменения толщины слоя взаимодействия  $z$ . В работе [7] в качестве такой характеристики используется энергетическое произведение (ЭП) в вершине адгезионного слоя:

$$2\hat{\gamma} = 0.5 (\bar{\sigma}_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22}\bar{\varepsilon}_{22}) \delta_0. \quad (22)$$

На рис. 5 изображена зависимость энергетического произведения (22) в слое от десятичного логарифма отношения толщины слоя к высоте консоли  $h$  при заданных ранее характеристиках образца. Толщина слоя принимала значение от  $\delta_0 = 10^{-5}$  м до  $\delta_0 = 10^{-8}$  м. График 1 построен для адгезива Araldite AV138, график 2 — для Araldite 2015, график 3 — для Sikaforce 7752. На рис. 5 ЭП  $2\hat{\gamma}$  задается в виде отношения ЭП адгезива к ЭП Sikaforce 7752, полученного при толщине слоя  $\delta_0 = 10^{-8}$  м.

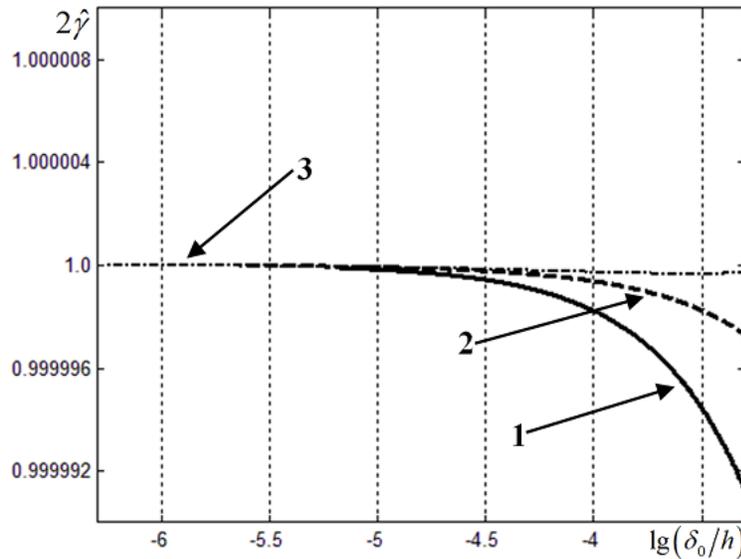


Рис. 5. Энергетическое произведение в слое

Из рис. 5 видно, при достижении определенного значения относительной толщины адгезионного слоя формула (22), основанная на решении (21), перестает давать результат. Для Sikaforce 7752 это условие  $-\lg(\delta_0/h) \approx -6.3$ , для Araldite 2015 —  $\lg(\delta_0/h) \approx -5.6$ , а для Araldite AV138 —  $\lg(\delta_0/h) \approx -5.3$ . Это связано с вычислительной погрешностью решения системы линейных уравнений (21) при нахождении коэффициентов общего аналитического решения (20). В этом плане упрощенное решение, полученное в работе [8] дает результат при существенно меньших ограничениях на относительную толщину слоя.

Также из рис. 5 видим, что при уменьшении отношения толщины адгезионного слоя к высоте консоли значение ЭП не зависит от упругих механических свойств материала слоя.

### Заключение

На основе вариационной постановки задачи о равновесии двух тел, сопряженных тонким "слоем взаимодействия" определена упрощенная постановка задачи в дифференциальном виде. Было получено аналитическое решение. На его основе построено

распределение напряжений в слое, которое зависит от механических свойств адгезива. Показано, что в состоянии плоской деформации осуществляется практическое равенство двух главных средних напряжений. Рассмотрена зависимость энергетического произведения на торце слоя от относительной толщины адгезионного слоя. Показано, что ЭП возможно вычислить для решений с малой, но конечной толщиной слоя.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // *International Journal of Fracture*. 2011. Vol. 171, no. 2. P. 105–109.
- [2] Ентов В. М., Салганик Р. Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела*. 1968. № 6. С. 87–99.
- [3] Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А. Модель трещины Прандтля и ее применение для решения задачи механики контактного взаимодействия. К 75-летию со дня рождения профессора Владимира Марковича Ентова. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. 180 с.
- [4] Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегающем горизонтальном пласте // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. 2015. № 2. С. 24–33.
- [5] Макклинтон Ф. Пластические аспекты разрушения // *Разрушение*. Москва: Мир, 1975. Т. 3. С. 67–262.
- [6] Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 193-194. P. 447–454.
- [7] Об одном подходе к оценке прочности адгезионного слоя в слоистом композите / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 64. С. 63–77.
- [8] Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021. № 3. С. 22–34.
- [9] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // *Journal of Adhesion and Adhesives*. 2016. Vol. 67. P. 103–111.

V.E. Bogacheva<sup>1</sup>, L.V. Glagolev<sup>2</sup>

## FRACTURE IN MODE I OF THE ADHESION LAYER TAKING INTO ACCOUNT THE DIAGONAL COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR

<sup>1</sup>*Tula State University, Tula, Russia*

<sup>2</sup>*Instrument Design Bureau named after Academician A.G. Shipunov, Tula, Russia*

**Abstract.** The elastic deformation of a composite plate consisting of two cantilevers connected by an adhesive layer in a state of plane deformation is considered. The stress state of the layer is considered on the basis of the characteristics averaged over the thickness. From the general variational statement, taking into account the theory of Mindlin–Reisner, a statement in a differential form is obtained. It is shown that in the stressed state of the layer there is a practical coincidence of two average principal stresses acting in directions orthogonal to separation. It has been established that the value to which the product of the specific free energy and the layer thickness converges at a fixed external load and the adhesion layer thickness tends to zero does not depend on the mechanical properties of the adhesive.

**Keywords:** adhesive layer, composite, energy product, interaction layer, linear parameter, normal separation, elastic deformation.

**REFERENCES**

- [1] Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // International Journal of Fracture. 2011. Vol. 171, no. 2. P. 105–109.
- [2] Entov V. M., Salganik R. L. To the Prandtl model of brittle fracture // Izv. AN SSSR. MTT. 1968. no. 6. P. 87–99. (in Russian).
- [3] Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Prandtl crack model and its application for solving the problem of contact interaction mechanics. Izhevsk: Institut komp'yuternyh issledovaniy, 2012. 180 p. (in Russian).
- [4] Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Stress state in the vicinity of excavation in deep horizontal bed // Journal of Mining Science. 2015. no. 2. P. 24–33. (in Russian).
- [5] Makkintok F. Plastic aspects of destruction // Razrushenie. Moscow: Mir, 1975. Vol. 3. P. 67–262. (in Russian).
- [6] Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 193-194. P. 447–454.
- [7] On one approach to assessing the strength of adhesive layer in layered composite / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2020. no. 64. P. 63–77. (in Russian).
- [8] Stress state and conditions for crack initiation in the adhesion layer of the composite / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // PNRPU Mechanics Bulletin. 2021. no. 3. P. 22–34. (in Russian).
- [9] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. Vol. 67. P. 103–111.

---

*Bogacheva Viktoriya Eduardovna*, Postgraduate, Department of Computational Mechanics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russia.

*Glagolev Leonid Vadimovich*, Cand. Sci. Phys. & Math., Department head, JSC «KBP», Tula, Russia.