

А. Д. Чернышов¹, О. Ю. Никифорова¹, В. В. Горяйнов², С. Ф. Кузнецов¹, И. Г. Рукин¹

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ БЫСТРЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ РАЗЛИЧНОГО ПОРЯДКА

¹ Воронежский государственный университет инженерных технологий,
г. Воронеж, Россия

² Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Даются основы быстрой универсальной тригонометрической интерполяции. Приведены оценки погрешности, вводится понятие граничной функции различных порядков и записаны аналитические формулы, применяемые для решения инженерных задач. Эффективность быстрой универсальной тригонометрической интерполяции показана на примере решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. На отрезке единичной длины для достижения максимальной относительной погрешности решения менее одного процента достаточно учитывать в быстром разложении только одно первое слагаемое с синусами и одно первое слагаемое с косинусами.

Ключевые слова: быстрые разложения, граничная функция, быстрая тригонометрическая интерполяция, относительная погрешность, дифференцирование.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.006

УДК: 519.65+517.95

© Чернышов А. Д., Никифорова О. Ю., Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Рукин И. Г., 2022
Чернышов Александр Данилович
e-mail: chernyshovad@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.
Никифорова Ольга Юрьевна
e-mail: niki22@mail.ru, старший преподаватель, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.
Горяйнов Виталий Валерьевич
e-mail: gorvit77@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия.
Кузнецов Сергей Федорович
e-mail: sfs134@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.
Рукин Иван Геннадьевич
e-mail: thenotnick@gmail.com, аспирант, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Поступила 20.11.2022

Введение

Классические ряды Фурье редко применяются в инженерной практике, так как они медленно сходятся и в общем случае не допускают почленное дифференцирование [1]. С помощью рядов Фурье в некоторых случаях [2–4] и др. получены эффективные и полезные частные решения. Появление синус- и косинус-быстрых разложений [5], основанных на использовании специального вида граничных функций, расширяет возможности применения рядов Фурье для решения задач с интегро-дифференциальными системами [6, 7]. При введении в быстрое разложение граничной функции $M_p(x)$ p -го порядка коэффициенты Фурье с увеличением порядкового номера m быстро уменьшаются по закону m^{-p-2} [5]. Это допускает возможность p кратного дифференцирования ряда и обеспечивает высокую скорость его сходимости. Использование в быстрых разложениях интерполяционного подхода еще более расширило возможности быстрых разложений [8, 9]. В работах [10–12] показано, что скорость сходимости быстрых разложений в сотни раз превосходит сходимость классических рядов Фурье. Особенно эффективными являются быстрые универсальные тригонометрические интерполяции, где при организации быстрых разложений одновременно используется полный ряд Фурье [13]. Подобные интерполяции применимы к дифференциальным системам, содержащим одновременно и четные и нечетные производные. По этой причине в их названии добавлено слово «универсальный».

1. Универсальные быстрые тригонометрические интерполяции

В функциональных пространствах как правило рассматриваются периодические функции, тогда как при рассмотрении прикладных задач необходимо изучать непериодические функции на конечном отрезке $x \in [-a, a]$, так как материальные тела имеют конечные размеры. Для этих целей будем использовать функциональный базис, соответственный полному ряду Фурье

$$\{1, \cos m\pi x/a, \sin m\pi x/a\}. \quad (1)$$

Пусть некоторая непериодическая функция $f(x) \in L_2^\alpha[-a \leq x \leq a]$ из пространства Гильберта рассматривается на отрезке $[-a \leq x \leq a]$. Быстрым разложением $f(x)$ на $[-a \leq x \leq a]$ назовем сумму некоторой граничной функции $M_p(x)$ и ряда Фурье для разности $f(x) - M_p(x)$, т. е.

$$f(x) = M_p(x) + a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\pi \frac{x}{a} + b_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad a_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a (f(x) - M_p(x)) dx, \quad (2)$$

$$a_m = \frac{1}{a} \int_{-a}^a ((f(x) - M_p(x))) \cos m\pi \frac{x}{a} dx, \quad b_m = \frac{1}{a} \int_{-a}^a (f(x) - M_p(x)) \sin m\pi \frac{x}{a} dx.$$

Граничная функция $M_p(x)$ в (2) введена с целью увеличения скорости сходимости ряда Фурье для разности $(f(x) - M_p(x))$, возможности его многократного дифференцирования и определяется следующей суммой

$$M_p(x) = \sum_{q=0}^p A_q P_q(x), \quad (3)$$

где A_q некоторые постоянные, а $P_q(x)$ быстрые полиномы.

Коэффициенты A_q определяются по формуле [13]

$$A_q = f^{(q)}(a) - f^{(q)}(-a), \quad (4)$$

а $P_q(x)$ полиномы четной и нечетной степеней запишем рекуррентными формулами через определенные интегралы

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{x}{2a}, \quad P_{2q-1}(x) = \int_0^x P_{2q-2}(x) dx, \\ P_{2q}(x) &= \int_0^x P_{2q-1}(t) dt - \frac{x}{a} \int_0^a P_{2q-1}(x) dx, \quad q = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Полином первой степени $P_0(x)$ является начальным, остальные полиномы получаются по формулам (5). Например, при $p = 5$, что соответствует граничной функции 5-го порядка $M_5(x)$, получим:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{x}{2a}, \quad P_1(x) = \frac{x^2}{4a}, \quad P_2(x) = \frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12}, \quad P_3(x) = \frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24}, \\ P_4(x) &= \frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720}, \quad P_5(x) = \frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5) и (6) можно установить следующие свойства полиномов $P_p(t)$:

$$P_{2p-1}(a) = P_{2p-1}(-a), \quad P_{2p}(a) = P_{2p}(-a) = 0, \quad p = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Данные полиномы обладают свойством четности и нечетности: полиномы с нечетными номерами — четные функции от x , с четными номерами — нечетные функции от x .

$$P_{2q-1}(x) = P_{2q-1}(-x), \quad P_{2q}(x) = -P_{2q}(-x), \quad q = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Кроме того, полиномы имеют следующие дифференциальные свойства

$$P'_{2q-1}(x) = P_{2q-2}(x), \quad P'_{2q}(x) = P_{2q-1}(x) - \frac{1}{a} \int_0^a P_{2q-1}(x) dx, \quad q = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Во многих случаях воспользоваться интегральными формулами Фурье для нахождения a_0, a_m, b_m не представляется возможным. Поэтому для определения коэффициентов a_0, a_m, b_m используем дискретную систему, полученную из (2) при замене x на x_j .

$$\begin{aligned} f(x_j) &= M_p(x_j) + a_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m \cos m\pi \frac{x_j}{a} + b_m \sin m\pi \frac{x_j}{a}, \\ m &= 1 \div N - 1, \quad j = -N \div N - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

При использовании универсальных быстрых тригонометрических интерполяций необходимо выполнить три условия:

- 1) Отрезок $[-a, a]$ следует равномерно разбить на равные части.
- 2) Количество внутренних точек разбиения должно быть четным $2N$.

Нечетное количество внутренних точек разбиения $(2N + 1)$ строго не допускается, иначе базис (1) в интерполяционном варианте не будет ортогональным на отрезке $[-a, a]$, что приведет к увеличению погрешности. В случае неортогонального базиса

каждый коэффициент ряда Фурье будет вычисляться с некоторой погрешностью, которая будет накапливаться. Если же базис (1) ортогональный, то погрешность равна нулю, что приводит к увеличению точности вычислений.

3) В число расчетных точек входит только совокупность внутренних точек равномерного разбиения и левая граница отрезка $[-a, a]$, т. е. $x = -a$. Правая граница отрезка $x = a$ в суммах не участвует.

Координаты $2N$ расчетных точек x_j зададим формулой

$$x_j = ja/N, \quad j = -N \div N - 1. \quad (11)$$

Для доказательства дискретной ортогональности базиса (1) в интерполяционном варианте предварительно докажем справедливость следующих равенств

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \cos n\pi \frac{x_j}{a} = 0, \quad \sum_{j=-N}^{N-1} \sin n\pi \frac{x_j}{a} = 0, \quad j = -N \div N - 1, \\ 2) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \cos m\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x_j}{a} = 0, \quad \text{при } m \neq n, \\ 3) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \sin m\pi \frac{x_j}{a} \sin n\pi \frac{x_j}{a} = 0, \quad \text{при } m \neq n, \\ 4) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \sin m\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x_j}{a} = 0, \quad \text{при } \forall (m, n) = 1 \div (N - 1). \end{aligned} \quad (12)$$

В последнем равенстве 4) системы (12) не следует требовать выполнения неравенства $m \neq n$, так как равенство 4) выполняются при $\forall m, n$, но при этом значение $j = N$ во всех суммах (12) исключается.

Для доказательства первого равенства 1) из (12) воспользуемся тригонометрической формулой Эйлера для комплексного числа и представим левую часть данной формулы в виде

$$\sum_{j=-N}^{N-1} \cos n\pi \frac{x_j}{a} = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} \exp\left(in\pi \frac{j}{N}\right) + \exp\left(-in\pi \frac{j}{N}\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} q_{nj} + q_{-nj}. \quad (13)$$

В (13) i — мнимая единица и, кроме того, использовано обозначение

$$\exp\left(in\pi \frac{j}{N}\right) = q_{nj}, \quad \exp\left(-in\pi \frac{j}{N}\right) = q_{-nj}.$$

Тогда (13) можно записать в форме геометрических прогрессий

$$\sum_{j=-N}^{N-1} \cos n\pi \frac{t_j}{a} = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} q_{nj} + q_{-nj}. \quad (14)$$

Правую часть в (14) преобразуем

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{N-1} q_{nj} + q_{-nj} &= (q_{-nN} + q_{n(1-N)} + q_{n(2-N)} + \cdots + q_{n(N-1)}) + \\ &+ (q_{nN} + q_{n(N-1)} + q_{n(N-2)} + \cdots + q_{n(1-N)}) = \\ &= q_{-nN} (1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n}) + q_{nN} (1 + q_{-n} + q_{2n} + \cdots + q_{(1-2N)n}). \end{aligned} \quad (15)$$

Для геометрической прогрессии $(1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n})$ можно записать вспомогательное равенство

$$\begin{aligned} (1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n}) (1 - q_n) &= (1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n}) - \\ - q_n (1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n}) &= 1 - q_{2Nn}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как имеют место следующие выражения

$$\begin{aligned} q_{\pm 2Nn} &= \exp(\pm i 2n\pi) = \cos(\pm 2n\pi) + i \sin(\pm 2n\pi) = 1, \\ q_{\pm n} &= \exp\left(\pm i \frac{n\pi}{N}\right) \neq 1 \text{ при } \forall n = -N \div N - 1, \end{aligned}$$

то из (16) получаем доказательство равенства 1) в (12):

$$(1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n}) = (1 - q_{2Nn}) / (1 - q_n) = 0.$$

При помощи тригонометрической формулы Эйлера и получающихся геометрических прогрессий аналогично доказываются и все остальные равенства из (12).

Остается вычислить норму для дискретной системы (1). Вначале рассмотрим сумму квадратов косинусов

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{N-1} \cos^2 n\pi \frac{x_j}{a} &= \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} \left(1 + \cos 2n\pi \frac{j}{N}\right) = N + \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} \cos 2n\pi \frac{j}{N} = \\ &= N + \frac{1}{4} \sum_{j=-N}^{N-1} q_{2nj} + q_{-2nj} = N + \frac{1}{4} (q_{-2nN} + q_{2n(1-N)} + q_{2n(2-N)} + \cdots + q_{2n(N-1)}) + \\ &+ \frac{1}{4} (q_{2nN} + q_{2n(N-1)} + \cdots + q_{2n(1-N)}) = N + \frac{1}{4} q_{-2nN} (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) + \\ &+ \frac{1}{4} q_{2nN} (1 + q_{-2n} + q_{-4n} + q_{-6n} + \cdots + q_{2n(1-2N)}). \end{aligned}$$

$$q_{\pm 2Nn} = \exp(\pm i 2n\pi) = \cos(\pm 2n\pi) + i \sin(\pm 2n\pi) = 1,$$

$$q_{\pm n} = \exp\left(\pm i \frac{2n\pi}{N}\right) \neq 1 \text{ при } \forall n = 1 \div N - 1.$$

$$\begin{aligned} (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) (1 - q_{2n}) &= (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) - \\ - q_{2n} (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) &= 1 - q_{4N}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для преобразования равенства (17) воспользуемся выражениями

$$\begin{aligned} (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) (1 - q_{2n}) &= (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) - \\ - q_{2n} (1 + q_{2n} + q_{4n} + q_{6n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) &= 1 - q_{4N} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Кроме (18) потребуется следующее свойство: при всех $n = -N \div N - 1$ дробь n/N остается правильной и потому $2n/N$ не может равняться четному числу, т. е. выполняется неравенство

$$\forall n = -N \div N - 1, \quad q_{\pm 2n} = \cos 2\pi n/N + i \sin 2\pi n/N \neq 1. \quad (19)$$

При помощи (18) и (19) из (17) получаем выражение для нормы косинусов

$$N = \sum_{j=-N}^{N-1} \cos^2 n\pi \frac{x_j}{a}. \quad (20)$$

Аналогично доказывается и выражение для нормы синусов

$$N = \sum_{j=-N}^{N-1} \sin^2 n\pi \frac{x_j}{a}. \quad (21)$$

Суммирование в (20) и (21) ведется по индексу j , тогда как индекс n остается свободным, но норма N оказывается независимой от величины n и равна половине количества внутренних расчетных точек, т. е. равна N .

Ортогональные свойства (5) и выражения норм (20) и (21) позволяют получить решение интерполяционной системы (10) относительно a_0, a_m, b_m в явном конечном виде. Для этого вначале левую и правую части (10) просуммируем по индексу j :

$$\sum_{j=-N}^{N-1} (f(t_j) - M_p(t_j)) = 2Na_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m \sum_{j=-N}^{N-1} \cos m\pi \frac{t_j}{a} + b_m \sum_{j=-N}^{N-1} \sin m\pi \frac{t_j}{a}. \quad (22)$$

Выше было доказано, что суммы косинусов и синусов по свойству 1) из (12) равны нулю, поэтому из (22) находим

$$a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(t_j) - M_p(t_j)). \quad (23)$$

То есть коэффициент a_0 равен среднеарифметическому значений $(f(t_j) - M_p(t_j))$ в точках равномерной интерполяции на отрезке $[-a, a]$.

Для нахождения a_m умножим левую и правую части (10) на $\cos m\pi j/N$ и просуммируем по индексу j :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \cos m\pi \frac{x_j}{a} = \\ & = \sum_{j=-N}^{N-1} a_0 \cos m\pi \frac{x_j}{a} + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} a_n \cos m\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x_j}{a} + b_n \sin n\pi \frac{x_j}{a} \cos m\pi \frac{x_j}{a}. \end{aligned} \quad (24)$$

Равенство (24) упростим, воспользовавшись свойствами (12) и (20),

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{N-1} \cos m\pi \frac{x_j}{a} &= 0, \quad \sum_{j=-N}^{N-1} \cos m\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x_j}{a} = 0 \text{ при } m \neq n, \\ \sum_{j=-N}^{N-1} \cos m\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x_j}{a} &= N \text{ при } m = n. \end{aligned} \quad (25)$$

С учетом (25) уравнение (24) принимает вид

$$\sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \cos m\pi \frac{x_j}{a} = a_m N. \quad (26)$$

Отсюда находим в явном виде коэффициенты a_m :

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \cos m\pi \frac{x_j}{a}, \quad m = 1 \div N - 1. \quad (27)$$

Аналогично после умножения левой и правой частей (10) на $\sin m\pi j/N$ и суммирования по j подобными вычислениями найдем b_m :

$$b_m = \frac{1}{N} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \sin m\pi \frac{x_j}{a}, \quad m = 1 \div N - 1. \quad (28)$$

Подставляя a_0 , a_m , b_m из (23), (27) и (28) в (10), получим формулу для полной тригонометрической интерполяции $f(x)$ на отрезке $[-a, a)$ при $f(x)$ задании дискретными значениями $f(x_j)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \cos n\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x}{a} + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \sin n\pi \frac{x_j}{a} \sin n\pi \frac{x}{a} + M_p(x), \\ &f(x) \in L_2^{p+2}(x \in [-a, a)). \end{aligned} \quad (29)$$

Получим оценки для коэффициентов a_m и b_m . Для этого запишем интегральные выражения для косинус-коэффициентов Фурье согласно (2) с использованием граничной функции $M_5(x)$ и применяем метод интегрирования по частям семь раз:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a \left(f(x) - A_0 \frac{x}{2a} - A_1 \frac{x^2}{4a} - A_2 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - A_3 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_4 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) - A_5 \left(\frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440} \right) \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \\ &= \frac{1}{m\pi} \int_{-a}^a \left(f(x) - A_0 \frac{x}{2a} - A_1 \frac{x^2}{4a} - A_2 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - A_3 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_4 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) - A_5 \left(\frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440} \right) \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \\ &= -\frac{1}{m\pi} \int_{-a}^a \left(f'(x) - A_0 \frac{1}{2a} - A_1 \frac{x}{2a} - A_2 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) - A_3 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_4 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) - A_5 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{m\pi} \int_{-a}^a \left(f'(x) - A_1 \frac{x}{2a} - A_3 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - A_5 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= \frac{a}{m^2\pi^2} \int_{-a}^a \left(f'(x) - A_1 \frac{x}{2a} - A_3 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - A_5 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) \right) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \\
&= -\frac{a}{m^2\pi^2} \int_{-a}^a \left(f''(x) - A_1 \frac{1}{2a} - A_3 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) - A_5 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= -\frac{a^2}{m^3\pi^3} \int_{-a}^a \left(f''(x) - A_1 \frac{1}{2a} - A_3 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) - A_5 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \\
&= \frac{a^2}{m^3\pi^3} \int_{-a}^a \left(f'''(x) - A_3 \frac{x}{2a} - A_5 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= \frac{-a^3}{m^4\pi^4} \int_{-a}^a \left(f'''(x) - A_3 \frac{x}{2a} - A_5 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) \right) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \\
&= \frac{-a^3}{m^4\pi^4} \left(f'''(x) - A_3 \frac{x}{2a} - A_5 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) \right) \cos m\pi \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a + \\
&+ \frac{-a^3}{m^4\pi^4} \int_{-a}^a \left(f^{(4)}(x) - A_3 \frac{1}{2a} - A_5 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= \frac{a^4}{m^5\pi^5} \int_{-a}^a \left(f^{(4)}(x) - A_3 \frac{1}{2a} - A_5 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \\
&= -\frac{a^4}{m^5\pi^5} \int_{-a}^a \left(f^{(5)}(x) - A_5 \frac{x}{2a} \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = \frac{a^5}{m^6\pi^6} \int_{-a}^a \left(f^{(5)}(x) - A_5 \frac{x}{2a} \right) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \\
&= -\frac{a^5}{m^6\pi^6} \int_{-a}^a \left(f^{(6)}(x) - A_5 \frac{1}{2a} \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= -\frac{a^6}{m^7\pi^7} \int_{-a}^a \left(f^{(6)}(x) - A_5 \frac{1}{2a} \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \frac{a^6}{m^7\pi^7} \int_{-a}^a f^{(7)}(x) \sin m\pi \frac{x}{a} dx.
\end{aligned}$$

Если обозначить $\max |f^{(7)}(t)| = B^{(7)}$, то получаем оценку для коэффициентов

$$|a_m| \leq \frac{2a^7}{m^7\pi^7} B^{(7)} \sim (m\pi)^{-7}. \quad (30)$$

Интегральные выражения для синус-коэффициентов Фурье согласно (2) с использованием граничной функции $M_5(x)$ будем интегрировать по частям шесть раз:

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a \left(f(x) - A_0 \frac{x}{2a} - A_1 \frac{x^2}{4a} - A_2 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - A_3 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} \right) - \right. \\
&\quad \left. - A_4 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) - A_5 \left(\frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440} \right) \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= \frac{a^2}{m^3\pi^3} \int_{-a}^a \left(f''(x) - A_2 \frac{x}{2a} - A_4 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) \right) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \\
&= -\frac{a^2}{m^3\pi^3} \int_{-a}^a \left(f'''(x) - A_2 \frac{1}{2a} - A_4 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= -\frac{a^3}{m^4\pi^4} \int_{-a}^a \left(f'''(x) - A_2 \frac{1}{2a} - A_4 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \\
&= \frac{a^3}{m^4\pi^4} \int_{-a}^a \left(f^{(4)}(x) - A_4 \frac{x}{2a} \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = -\frac{a^4}{m^5\pi^5} \int_{-a}^a \left(f^{(4)}(x) - A_4 \frac{x}{2a} \right) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \\
&= \frac{a^4}{m^5\pi^5} \int_{-a}^a \left(f^{(5)}(x) - A_4 \frac{1}{2a} \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \frac{a^5}{m^6\pi^6} \int_{-a}^a \left(f^{(5)}(x) - A_4 \frac{1}{2a} \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \\
&= -\frac{a^5}{m^6\pi^6} \int_{-a}^a f^{(6)}(x) \sin m\pi \frac{x}{a} dx.
\end{aligned}$$

Обозначая $\max |f^{(6)}(t)| = B^{(6)}$, получим оценку для коэффициентов b_m :

$$|b_m| \leq \frac{2a^6}{m^6\pi^6} B^{(6)} \sim (m\pi)^{-6}. \quad (31)$$

Из оценок (30) и (31) следует, что рассматриваемый метод по скорости сходимости ряда во много раз превосходит все известные методы и обладает следующими свойствами:

- 1) Данный приближенный универсальный метод является аналитическим.
- 2) Вследствие его чрезвычайно высокой скорости сходимости в ряде Фурье в большинстве случаев достаточно учитывать всего только одно первое слагаемое с синусами и одно первое слагаемое с косинусами (всего два слагаемых), что приводит к весьма удобной экономичной алгебраической системе и позволяет быстро получить ответ с высокой точностью.
- 3) Данный универсальный ряд Фурье с граничной функцией $M_5(x)$ допускает шестикратное почленное дифференцирование, что является недоступным в других методах.

2. Применение универсальных быстрых тригонометрических интерполяций для решения нелинейных дифференциальных уравнений

В качестве примера рассмотрим краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' = (x + 2y)^2 + 3(y')^2 + 1.44\pi^2 \sin(1.2\pi x) + (x + 2 \sin(1.2\pi x))^2 + 4.32\pi^2 \cos^2(1.2\pi x), \quad x \in [-a, a]. \quad (32)$$

$$y(-a) = -\sin(1.2\pi a), \quad y(a) = \sin(1.2\pi a). \quad (33)$$

Краевая задача (32), (33) имеет точное решение

$$y(x) = \sin(1.2\pi x), \quad (34)$$

которое позволит провести исследование погрешности решения краевой задачи (32), (33) путем сравнения с приближенным аналитическим решением, полученным методом универсальных быстрых разложений [13]. При сравнении будет вычислена относительная погрешность решения $y(x)$ и невязка дифференциального уравнения (32).

Решение задачи (32), (33) представим быстрым универсальным разложением

$$y(x) = \sum_{q=0}^5 A_q P_q(x) + a_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m \cos m\pi \frac{x}{a} + \sum_{m=1}^{N-1} b_m \sin m\pi \frac{x}{a}. \quad (35)$$

Полиномы $P_q(x)$ берутся из (6). Подлежат определению коэффициенты граничной функции $A_0 \div A_5$ и коэффициенты Фурье $a_0, a_m, b_m, m = 1 \div N - 1$.

После подстановки $y(x)$ из (35) в граничные условия (33), найдем

$$y(a) = A_0 \frac{1}{2} + A_1 \frac{a}{4} - A_3 \frac{a^3}{48} + A_5 \frac{a^5}{480} + a_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m (-1)^m = \sin(1.2\pi a). \quad (36)$$

$$y(-a) = -A_0 \frac{1}{2} + A_1 \frac{a}{4} - A_3 \frac{a^3}{48} + A_5 \frac{a^5}{480} + a_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m (-1)^m = -\sin(1.2\pi a). \quad (37)$$

Вычитая из (36) равенство (37) получим значение коэффициента A_0 :

$$A_0 = 2 \sin(1.2\pi a). \quad (38)$$

Складывая равенства (36) и (37) имеем уравнение для определения коэффициента A_1 :

$$A_1 \frac{a}{2} - A_3 \frac{a^3}{24} + A_5 \frac{a^5}{240} + 2a_0 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} a_m (-1)^m = 0. \quad (39)$$

Далее подставим $y(x)$ из (35) в дифференциальное уравнение (32):

$$A_1 \frac{1}{2a} + A_2 \frac{x}{2a} + A_3 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) + A_4 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) + A_5 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) - \sum_{m=1}^{N-1} a_m \left(m \frac{\pi}{a} \right)^2 \cos m\pi \frac{x}{a} - \sum_{m=1}^{N-1} b_m \left(m \frac{\pi}{a} \right)^2 \sin m\pi \frac{x}{a} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x + 2 \left(A_0 \frac{x}{2a} + A_1 \frac{x^2}{4a} + A_2 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) + A_3 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A_4 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) + A_5 \left(\frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left. + a_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m \cos m\pi \frac{x}{a} + \sum_{m=1}^{N-1} b_m \sin m\pi \frac{x}{a} \right) \right)^2 + \\
&+ 3 \left(A_0 \frac{1}{2a} + A_1 \frac{x}{2a} + A_2 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) + A_3 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) + A_4 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) + \right. \\
&\quad \left. + A_5 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) - \sum_{m=1}^{N-1} a_m m \frac{\pi}{a} \sin m\pi \frac{x}{a} + \sum_{m=1}^{N-1} b_m m \frac{\pi}{a} \cos m\pi \frac{x}{a} \right) + \quad (40) \\
&+ 1.44\pi^2 \sin(1.2\pi x) + (x + 2 \sin(1.2\pi x))^2 + 4.32\pi^2 \cos^2(1.2\pi x), \quad x \in [-a, a].
\end{aligned}$$

Согласно [13] уравнения для нахождения коэффициентов $A_2 \div A_5$ составим следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(40)|_{x=a} - (40)|_{x=-a}, \quad \frac{d}{dx}(40)|_{x=a} - \frac{d}{dx}(40)|_{x=-a}, \\
&\frac{d^2}{dx^2}(40)|_{x=a} - \frac{d^2}{dx^2}(40)|_{x=-a}, \quad \frac{d^3}{dx^3}(40)|_{x=a} - \frac{d^3}{dx^3}(40)|_{x=-a}. \quad (41)
\end{aligned}$$

Аналитический вид равенств (41) здесь не приводим из-за их громоздкости.

Коэффициенты Фурье $a_0, a_m, b_m, m = 1 \div N - 1$ определим с помощью универсальной быстрой тригонометрической интерполяции по формулам (23), (27), (28), полагая, что значения искомой функции в расчетных точках (11) известны.

В уравнения (41) подставим значения найденных коэффициентов Фурье $a_0, a_m, b_m, m = 1 \div N - 1$ и значения A_0 и A_1 из (38) и (39) соответственно. Тем самым получим систему нелинейных алгебраических уравнений (41) относительно коэффициентов $A_2 \div A_5$. Данная система четырех уравнений была решена в среде Maple. В расчетах принимались различные значения номера N и параметра a . Приближенное аналитическое решение (35) сравнивалось с точным (34). Относительная погрешность $\delta^{y(x)}$ решения $y(x)$ и невязка δ^{du} дифференциального уравнения (32) вычислялась по формуле

$$\delta = |\Delta|/f_{\max} \cdot 100 \%,$$

где Δ — абсолютная погрешность, f_{\max} — максимальное значение решения $y(x)$ или невязки уравнения (32).

Графики $\delta^{y(x)}$ и δ^{du} при $a = 1/2$ и $N = 4$ показаны на рис. 1 и рис. 2 соответственно, из которых видно, что граничные условия (33) выполняются точно, а максимальные значения погрешностей $\delta_{\max}^{y(x)}$ и δ_{\max}^{du} находятся вблизи левой границы отрезка $x \in [-a, a]$. Значения максимальной относительной погрешности $\delta_{\max}^{y(x)}$ решения $y(x)$ и максимальной невязки δ_{\max}^{du} дифференциального уравнения (32) для различных значений параметров N и a приведены в таблице.

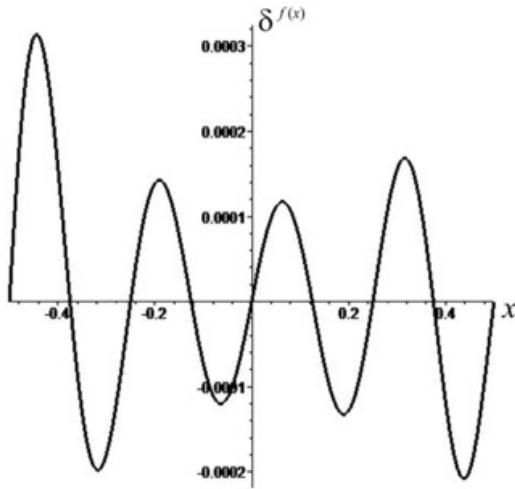


Рис. 1. Относительная погрешность решения $y(x)$

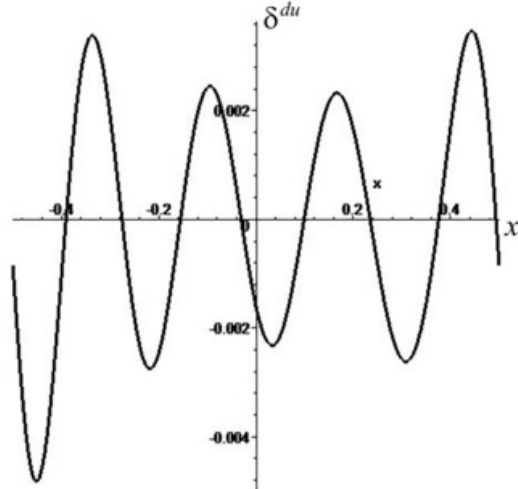


Рис. 2. Невязка дифференциального уравнения (32)

N	a = 1/2		a = 2	
	$\delta_{\max}^{y(x)}$, %	δ_{\max}^{du} , %	$\delta_{\max}^{y(x)}$, %	δ_{\max}^{du} , %
2	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-1}$	—	—
3	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$1.750 \cdot 10^{-2}$	7.4	15
4	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.85 \cdot 10^{-3}$	$7.4 \cdot 10^{-1}$	2.0
5	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-1}$	$9.1 \cdot 10^{-1}$
6	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-4}$	$1.24 \cdot 10^{-1}$	$4.3 \cdot 10^{-1}$
7	$8.8 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$2.0 \cdot 10^{-1}$
8	$3.8 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-1}$
10	$9.2 \cdot 10^{-7}$	$9.3 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$4.5 \cdot 10^{-2}$
20	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$5.6 \cdot 10^{-6}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$

Таблица 1. Максимальная относительная погрешность δ_{\max} решения краевой задачи (32), (33)

Из таблицы видно, что на отрезке единичной длины $x \in [-1/2, 1/2]$ для достижения $\delta_{\max}^{y(x)} < 1\%$ и $\delta_{\max}^{du} < 1\%$ требуется использовать по одному коэффициенту Фурье a_1 и b_1 ($N = 2$). С увеличением значения номера N погрешности $\delta_{\max}^{y(x)}$ и δ_{\max}^{du} быстро убывают. При увеличении длины отрезка, например в четыре раза ($x \in [-2, 2]$), для достижения той же погрешностей $\delta_{\max}^{y(x)}$ и δ_{\max}^{du} , что и при отрезке единичной длины требуется увеличение значения номера N в четыре раза, например с $N = 2$ до $N = 8$ или с $N = 5$ до $N = 20$ (см. таблицу).

Заключение

В данной работе описана универсальная быстрая тригонометрическая интерполяция и продемонстрирована ее эффективность при решении нелинейной краевой задачи. Вычислительные эксперименты показали, что с увеличением значения номера N максимальная относительная погрешность $\delta_{\max}^{y(x)}$ решения $y(x)$ краевой задачи и максимальная невязка δ_{\max}^{du} нелинейного дифференциального уравнения (32) быстро убывают. На отрезке единичной длины для достижения значений $\delta_{\max}^{y(x)}$ и δ_{\max}^{du} менее

одного процента достаточно учитывать в быстром разложении только одно первое слагаемое с синусами и одно первое слагаемое с косинусами. При увеличении длины отрезка для достижения той же погрешности $\delta_{\max}^{y(x)}$ и δ_{\max}^{du} , что и на отрезке единичной длины требуется увеличение значения номера N .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Толстов Г. П. Ряды Фурье. Москва: Наука, 1980. 384 с.
- [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. 741 с.
- [3] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1979. 560 с.
- [4] Biot M. Distributed gravity and temperature loading in two dimensional elasticity replaced by boundary pressure and dislocations // *Journal of Applied Mechanics*. 1935. P. 41–48.
- [5] Чернышов А. Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014. № 54(1). С. 13–24.
- [6] Решение методом быстрых разложений задачи о сушке зерна / А. Д. Чернышов, И. О. Павлов, Е. В. Воронова [и др.] // *Теплофизика и аэромеханика*. 2012. № 19(6). С. 739–749.
- [7] Горяйнов В. В., Попов М. И., Чернышов А. Д. Решение задачи о напряжениях в остром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2019. № 5. С. 113–130.
- [8] Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Чернышов О. А. Применение метода быстрых разложений для расчета траекторий космических кораблей // *Известия вузов. Авиационная техника*. 2015. № 2. С. 41–47.
- [9] Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Danshin A. A. Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. 2018. no. 973. p. 012002.
- [10] Чернышов А. Д., Горяйнов В. В. О выборе оптимального порядка граничной функции в быстром разложении // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2011. № 1. С. 60–65.
- [11] Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Соловьев А. О. О возможности вычисления коэффициентов Фурье поточечным методом // *Вестник Воронежского государственного технического университета*. 2010. № 6(2). С. 49–53.
- [12] Сравнение скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов, О. В. Лешонков [и др.] // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2019. № 1. С. 27–34.
- [13] Chernyshov A. D., Saiko D. S., Kovaleva E. N. Universal fast expansion for solving nonlinear problems // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. p. 012147.

A. D. Chernyshov¹, O. Yu. Nikiforova¹, V. V. Goryainov², S. F. Kuznetsov¹, I. G. Rukin¹

UNIVERSAL FAST TRIGONOMETRIC INTERPOLATIONS FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL PROBLEMS OF VARIOUS ORDERS

¹ *Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia*

² *Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia*

Abstract. The basics of fast universal trigonometric interpolation are given in the article. The error estimates are presented by the authors. The concept of various orders boundary function is introduced in this work. Analytical formulas used to solve engineering problems are written as well. The efficiency of fast universal trigonometric interpolation is shown by the example of solving a boundary value problem for a second-order nonlinear differential equation. To achieve the maximum relative error of the solution of less than one percent, it is sufficient to take into account only one first term with sines and one first term with cosines in the fast decomposition on a segment of unit length.

Keywords: fast expansions, boundary function, fast trigonometric interpolation, relative error, differentiation.

REFERENCES

- [1] Tolstov G. P. Fourier Series. Moscow: Nauka, 1980. 384 p. (in Russian).
- [2] Tikhonov A. N., Samarsky A. A. Mathematical physics equations. Moscow: Nauka, 1977. 741 p. (in Russian).
- [3] Timoshenko S. P., Goodyear J. Theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1979. 560 p. (in Russian).
- [4] Biot M. Distributed gravity and temperature loading in two dimensional elasticity replaced by boundary pressure and dislocations // Journal of Applied Mechanics. 1935. P. 41–48.
- [5] Chernyshov A. D. Method of fast expansions for solving nonlinear differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. no. 54(1). P. 11–21.
- [6] Solution of the grain drying problem by the method of fast expansions / A. D. Chernyshov, I. O. Pavlov, E. V. Voronova et al. // Thermophysics and Aeromechanics. 2012. no. 19(3). P. 739–749. (in Russian).
- [7] Goryainov V. V., Popov M. I., Chernyshov A. D. Solving the stress problem in a sharp wedge-whaped cutting tool using the quick decomposition method and the problem of matching boundary conditions // Mechanics of Solids. 2019. no. 54(7). P. 1083–1097.
- [8] Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Chernyshov O. A. Application of the fast expansion method for spacecraft trajectory calculation // Russian Aeronautics. 2015. no. 58(2). P. 180–186.
- [9] Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Danshin A. A. Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. no. 973. p. 012002.
- [10] Chernyshov A. D., Goryainov V. V. On the choice of the optimal order of a boundary function in a fast decomposition // Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies. 2011. no. 1. P. 60–65. (in Russian).
- [11] Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Soloviev A. O. On the possibility of Fourier coefficients calculating by the point method // Bulletin of Voronezh state technical University. 2010. no. 6(2). P. 49–53. (in Russian).
- [12] Comparison of the convergence rate of fast expansions with expansions into the classical Fourier series / A. D. Chernyshov, V. V. Goryainov, O. V. Leshonkov et al. // Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies. 2019. no. 1. P. 27–34. (in Russian).
- [13] Chernyshov A. D., Saiko D. S., Kovaleva E. N. Universal fast expansion for solving nonlinear problems // Journal of Physics: Conference Series. 2020. p. 012147.

Chernyshov Alexander Danilovich, Dr. Phys. & Math. Sci., Professor Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

Nikiforova Olga Yurievna, Senior Lecturer, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

Goryainov Vitaly Valerievich, Ph.D. in Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia.

Kuznetsov Sergey Fedorovich, Ph.D. in Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

Rukin Ivan Gennadievich, post-graduate student, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.