Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4 (54). С. 71–81

Ю. Д. Щеглова

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. В работе дано развитие метода малого параметра к определению напряженного состояния трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении. Два внешних слоя находятся в пластическом состоянии, внутренний слой находится в упругопластическом состоянии. Рассматривается случай пластической анизотропии, учитывающей одновременно и анизотропию согласно Хиллу и трансляционную анизотропию. Каждый слой обладает своими параметрами анизотропии. В первом приближении определены напряжения в пластических областях, перемещение и напряжения в упругой области внутреннего слоя и упругопластическая граница.

Ключевые слова: упругопластическое кручение, анизотропия согласно Хиллу, трансляционная анизотропия, напряженное состояние, упругопластическая граница, метод малого параметра.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.007

УДК: 539.375

Введение

Пластическое деформирование твердых тел влечет за собой приобретение материалом свойств пластической анизотропии. Метод малого параметра позволяет получить приближенное аналитическое решение задач для тел со сложной реологией.

Среди моделей пластических тел, учитывающих анизотропию, выделяют условие пластичности Хилла, которое содержит 6 констант анизотропии [1]. Однако, условие пластичности Хилла не учитывает эффект Баушингера. К моделям, учитывающим этот эффект, относится модель трансляционного упрочнения, которую предложили А. Ю.

Щеглова Юлия Дмитриевна
`e-mail:` scheglova@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.11.2022

Ишлинский [2] и В. Прагер [3]. Д. Д. Ивлев с коллегами на основе подобных представлений предложили модель идеальнопластического тела с трансляционной анизотропией [4, 5]. В задачах пластического кручения трансляционная анизотропия учитывалась в работе [5], в работе [6] рассматривалась анизотропия согласно Хиллу. В работах [7, 8] использовался метод малого параметра при определении напряженного состояния анизотропной толстостенной трубы при упругопластическом кручении. В работе [7] рассматривался случай трансляционной анизотропии, случай анизотропии по Хиллу исследовался в работе [8]. Метод возмущений также привлекался при исследовании взаимодействия различных видов пластической анизотропии при упругопластической плоской деформации толстостенной трубы а работе [9]. В работах [10, 11] исследовался случай анизотропии, учитывающей одновременно и трансляционную анизотропию и анизотропию согласно Хиллу. В работе [10] рассмотрено упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Работа [11] посвящена упругопластическому кручению анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения, при этом использовался метод малого параметра. В настоящей работе метод возмущений применяется для определения напряженного состояния трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении. Рассматривается случай анизотропии, частными видами которой являются трансляционная анизотропия и анизотропия согласно Хиллу. Задача решена в первом приближении. Определены поля напряжений в каждом слое, перемещения в упругой области внутреннего слоя и упругопластическая граница.

Постановка задачи

Рассмотрим упругопластическое кручение [12] трехслойного пластически анизотропного цилиндрического стержня. Поперечное сечение стержня ограничивается некруговыми контурами: внешним контуром L_1, границами раздела слоев L_2 и L_3, и внутренним контуром L_4. Предполагается, что крутящий момент M имеет такую величину, при которой два внешних слоя находятся в пластическом состоянии, а внутренний слой – в упругопластическом, так что существует упругопластическая граница L_s, которая определяетя при решении задачи о напряженном состоянии. Слои стержня являются анизотропными, при этом анизотропия одновременно учитывает анизотропию по Хиллу и трансляционную анизотропию, и каждый слой имеет свои параметры анизотропии. Решение поставленной задачи будем проводить в цилиндрической системе координат (ρ, θ, z, ось z направлена по оси стержня) в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к пределу текучести внутреннего слоя k_3, а величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу упругопластической границы в нулевом приближении $r_s^{(0)}$. Кроме того, далее символ "e" вверху означает принадлежность величин к упругой области, символ "p" – к пластической.

Запишем систему уравнений для решения задачи:

— уравнение равновесия выполняютя в каждом слое

$$\frac{\partial \tau_{\rho z i}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\theta z i}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z i}}{\rho} = 0, \tag{1}$$

где $\tau_{\rho z}, \tau_{\theta z}$ – компоненты тензора напряжений;

— соотношения Коши в упругой зоне внутреннего слоя

$$\varepsilon^e_{\rho z3} = \frac{\omega}{2}\frac{\partial w^e_3}{\partial \rho}, \quad \varepsilon^e_{\theta z3} = \frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w^e_3}{\partial \theta} + \rho\right), \tag{2}$$

где w^e_3 – функция депланации в упругой зоне третьего слоя, ω – крутка или угол кручения на единицу длины;
— закон Гука

$$\tau^e_{\rho z3} = 2G\varepsilon^e_{\rho z3}, \quad \tau^e_{\theta z3} = 2G\varepsilon^e_{\theta z3}, \tag{3}$$

где $G = \mu$ – модуль сдвига;
— условие пластичности в каждом слое примем в виде [11]

$$A_i\Big(\tau^p_{\rho zi}cos\theta - \tau^p_{\theta zi}sin\theta - k_i\Big)^2 + B_i\Big(\tau^p_{\rho zi}sin\theta + \tau^p_{\theta zi}cos\theta - \chi_i\Big)^2 = {K_i}^2, \tag{4}$$

где $i = 1, 2, 3$; A_i, B_i, k_i, χ_i – параметры анизотропии;
— в упругой области внутреннего слоя подстановкой (2) в (3), а затем в (1), получим уравнение

$$\Delta w^e_3 = 0, \tag{5}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}$ - оператор Лапласа;
— граничное условие на внешнем контуре L_1 будет иметь вид

$$\left.\Big(\tau^p_{\rho z1}n_{\rho_1} + \tau^p_{\theta z1}n_{\theta_1}\Big)\right|_{L_1} = 0; \tag{6}$$

— на границах раздела слоев L_2 и L_3 выполняются условия сопряжения напряжений

$$\left.\Big(\tau^p_{\rho z2}n_{\rho_2} + \tau^p_{\theta z2}n_{\theta_2}\Big)\right|_{L_2} = \left.\Big(\tau^p_{\rho z1}n_{\rho_2} + \tau^p_{\theta z1}n_{\theta_2}\Big)\right|_{L_2}, \tag{7}$$

$$\left.\Big(\tau^p_{\rho z3}n_{\rho_3} + \tau^p_{\theta z3}n_{\theta_3}\Big)\right|_{L_3} = \left.\Big(\tau^p_{\rho z2}n_{\rho_3} + \tau^p_{\theta z2}n_{\theta_3}\Big)\right|_{L_3}; \tag{8}$$

— граничное условие на внутреннем контуре L_4 имеет форму

$$\left.\big(\tau^e_{\rho z3}n_{\rho_4} + \tau^e_{\theta z3}n_{\theta_4}\big)\right|_{L_4} = 0; \tag{9}$$

— на упругопластической границе L_s внутреннего слоя выполняются условия непрерывности напряжений

$$\left.[\tau_{\rho z3}]\right|_{L_s} = 0, \tag{10}$$

$$\left.[\tau_{\theta z3}]\right|_{L_s} = 0. \tag{11}$$

Компоненты единичной нормали к контуру L_i определяются соотношениями

$$n_{\rho i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho}\left(\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, n_{\theta i} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}\left(\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

где $\Phi_i\,(\rho, \theta) = 0\,(i = 1, 2, 3, 4)$ - уравнения контуров поперечного сечения.

Применение метода малого параметра

Определим напряженное состояние стержня с помощью метода возмущений [13]. Ограничимся нулевым и первым приближениями. В каждом слое параметры анизотропии представим в виде

$$A_i = 1 + \delta a_i, B_i = 1 + \delta b_i, k_i = \delta k_i^{(1)}, \chi_i = \delta \chi_i^{(1)}, \tag{13}$$

где δ - безразмерный малый параметр, $\delta << 1$.

Уравнения контуров запишем в форме

$$\Phi_i\left(\rho, \theta\right) = \rho - R_{0i} - \delta_i R_{1i}, \tag{14}$$

где $\delta_i = d_i \delta$, $-1 \le d_i \le 1$, $R_{1i} = R_{1i}(\theta)$ – функции переменной θ.

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(0)} + \delta \tau_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \delta \varepsilon_{ij}^{(1)}, w^e = w^{e(0)} + \delta w^{e(1)}, \tag{15}$$

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} + \delta \rho_s^{(1)}. \tag{16}$$

Подставляя разложения (13)-(16) в систему уравнений (1)-(12) и приравнивая члены при одинаковых степенях малого параметра δ, получим системы уравнений для нулевого и первого приближений.

В нулевом приближении будем иметь.

Уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{\rho z i}^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\theta z i}^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z i}^{(0)}}{\rho} = 0. \tag{17}$$

Соотношения Коши

$$\varepsilon_{\rho z 3}^{e(0)} = \frac{\omega}{2}\frac{\partial w_3^{e(0)}}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z 3}^{e(0)} = \frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w_3^{e(0)}}{\partial \theta} + \rho\right). \tag{18}$$

Соотношения закона Гука

$$\tau_{\rho z 3}^{e(0)} = 2G\varepsilon_{\rho z 3}^{e(0)}, \quad \tau_{\theta z 3}^{e(0)} = 2G\varepsilon_{\theta z 3}^{e(0)}. \tag{19}$$

Условие пластичности в каждом слое

$$\tau_{\rho z i}^{p(0)2} + \tau_{\theta z i}^{p(0)2} = K_i^2. \tag{20}$$

Граничные условия и условия сопряжения напряжений на границе раздела слоев в нулевом приближении будут иметь вид

$$\left.\tau_{\rho z 1}^{p(0)}\right|_{\rho = R_{01}} = 0, \left.\tau_{\rho z 2}^{p(0)}\right|_{\rho = R_{02}} = \left.\tau_{\rho z 1}^{p(0)}\right|_{\rho = R_{02}}, \left.\tau_{\rho z 3}^{p(0)}\right|_{\rho = R_{03}} = \left.\tau_{\rho z 2}^{p(0)}\right|_{\rho = R_{03}}, \left.\tau_{\rho z 3}^{e(0)}\right|_{\rho = R_{04}} = 0. \tag{21}$$

Условия непрерывности напряжений на упругопластической границе в нулевом приближении примут форму

$$\left.\tau_{\rho z 3}^{e(0)}\right|_{\rho = \rho_s^{(0)}} = \left.\tau_{\rho z 3}^{p(0)}\right|_{\rho = \rho_s^{(0)}}, \quad \left.\tau_{\theta z 3}^{e(0)}\right|_{\rho = \rho_s^{(0)}} = \left.\tau_{\theta z 3}^{p(0)}\right|_{\rho = \rho_s^{(0)}}. \tag{22}$$

Рассмотрим первое приближение.

Система уравнений для первого приближения будет иметь следующий вид.

Уравнение равновесия не меняет свою форму

$$\frac{\partial \tau_{\rho z i}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\theta z i}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z i}^{(1)}}{\rho} = 0. \tag{23}$$

Соотношения Коши примут вид

$$\varepsilon_{\rho z3}^{e(1)} = \frac{\omega}{2}\frac{\partial w_3^{e(1)}}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z3}^{e(1)} = \frac{\omega}{2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial w_3^{e(1)}}{\partial \theta}. \tag{24}$$

Соотношения закона Гука не изменяются

$$\tau_{\rho z3}^{e(1)} = 2G\varepsilon_{\rho z3}^{e(1)}, \quad \tau_{\theta z3}^{e(1)} = 2G\varepsilon_{\theta z3}^{e(1)}. \tag{25}$$

Условие пластичности в каждом слое будет иметь вид

$$\begin{gathered} 2\tau_{\rho zi}^{p(0)}\tau_{\rho zi}^{p(1)} + 2\tau_{\theta zi}^{p(0)}\tau_{\theta zi}^{p(1)} + 2\left(-k_i^{(1)}\tau_{\rho zi}^{p(0)}cos\theta + k_i^{(1)}\tau_{\theta zi}^{p(0)}sin\theta\right) - \\ -2\left(\chi_i^{(1)}\tau_{\rho zi}^{p(0)}sin\theta + \chi_i^{(1)}\tau_{\theta zi}^{p(0)}cos\theta\right) + \\ +a_i\left(\tau_{\rho zi}^{p(0)2}cos^2\theta + \tau_{\theta zi}^{p(0)2}sin^2\theta - \tau_{\rho zi}^{p(0)}\tau_{\theta zi}^{p(0)}sin2\theta\right) + \\ +b_i\left(\tau_{\rho zi}^{p(0)2}sin^2\theta + \tau_{\theta zi}^{p(0)2}cos^2\theta + \tau_{\rho zi}^{p(0)}\tau_{\theta zi}^{p(0)}sin2\theta\right) = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

В упругой области внутреннего слоя уравнение (5) сохраняет свою форму

$$\Delta w_3^{e(1)} = 0. \tag{27}$$

Граничное условие на внешнем контуре L_1 (6) примет форму

$$\left.\left(\frac{\partial \tau_{\rho z1}^{p(0)}}{\partial \rho}R_{11} + \tau_{\rho z1}^{p(1)} - \tau_{\theta z1}^{p(0)}\frac{\dot{R}_{11}}{R_{01}}\right)\right|_{\rho=R_{01}} = 0. \tag{28}$$

Условие сопряжения напряжений на границе L_2 (7) будет иметь вид

$$\left.\left(\frac{\partial \tau_{\rho z2}^{p(0)}}{\partial \rho}R_{12} + \tau_{\rho z2}^{p(1)} - \tau_{\theta z2}^{p(0)}\frac{\dot{R}_{12}}{R_{02}}\right)\right|_{\rho=R_{02}} = \left.\left(\frac{\partial \tau_{\rho z1}^{p(0)}}{\partial \rho}R_{12} + \tau_{\rho z1}^{p(1)} - \tau_{\theta z1}^{p(0)}\frac{\dot{R}_{12}}{R_{02}}\right)\right|_{\rho=R_{02}}. \tag{29}$$

Условие сопряжения на границе L_3 (8) запишется так

$$\left.\left(\frac{\partial \tau_{\rho z3}^{p(0)}}{\partial \rho}R_{13} + \tau_{\rho z3}^{p(1)} - \tau_{\theta z3}^{p(0)}\frac{\dot{R}_{13}}{R_{03}}\right)\right|_{\rho=R_{03}} = \left.\left(\frac{\partial \tau_{\rho z2}^{p(0)}}{\partial \rho}R_{13} + \tau_{\rho z2}^{p(1)} - \tau_{\theta z2}^{p(0)}\frac{\dot{R}_{12}}{R_{02}}\right)\right|_{\rho=R_{03}}. \tag{30}$$

Граничное условие на внутреннем контуре L_4 (9) будет иметь вид

$$\left.\left(\frac{\partial \tau_{\rho z3}^{e(0)}}{\partial \rho}R_{14} + \tau_{\rho z3}^{e(1)} - \tau_{\theta z1}^{e(0)}\frac{\dot{R}_{14}}{R_{04}}\right)\right|_{\rho=R_{04}} = 0. \tag{31}$$

Условия непрерывности напряжений на упругопластической границе L_s (10), (11) имеют форму

$$\left.\left(\frac{\partial \tau_{\rho z3}^{e(0)}}{\partial \rho}\rho_s^{(1)} + \tau_{\rho z3}^{e(1)}\right)\right|_{\rho=\rho_s^{(0)}} = \left.\left(\frac{\partial \tau_{\rho z3}^{p(0)}}{\partial \rho}\rho_s^{(1)} + \tau_{\rho z3}^{p(1)}\right)\right|_{\rho=\rho_s^{(0)}}, \tag{32}$$

$$\left.\left(\frac{\partial \tau_{\theta z3}^{e(0)}}{\partial \rho}\rho_s^{(1)} + \tau_{\theta z3}^{e(1)}\right)\right|_{\rho=\rho_s^{(0)}} = \left.\left(\frac{\partial \tau_{\theta z3}^{p(0)}}{\partial \rho}\rho_s^{(1)} + \tau_{\theta z3}^{p(1)}\right)\right|_{\rho=\rho_s^{(0)}}. \tag{33}$$

Объединяя (17)-(22), в нулевом приближении получим задачу упругопластического кручения трехслойного изотропного цилиндирческого стержня кругового поперечного

сечения.
Решение данной задачи имеет вид

$$\tau^{p(0)}_{\rho zi}=0,\tau^{p(0)}_{\theta zi}=K_i,\tau^{e(0)}_{\rho zi}=0,\tau^{e(0)}_{\theta z3}=G\omega\rho,w^{e(0)}_3=0,\rho^{(0)}_s=1. \qquad (34)$$

Результаты для первого приближения

Следуя [14], уравнения контуров L_i $(i=1,2,3,4)$ представим в виде

$$\rho=\alpha_i\left(1+d_i\delta cosm\theta\right), \qquad (35)$$

где $-1\le d_i\le 1$, причем $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4$.
Из условия пластичности (26) с учетом нулевого приближения (34) можно получить компоненту напряжения $\tau^{p(1)}_{\theta zi}$ в каждом слое

$$\tau^{p(1)}_{\theta zi}=-k^{(1)}_i sin\theta+\chi^{(1)}_i cos\theta-\frac{K_i}{4}\left(a_i+b_i-\left(a_i-b_i\right)cos2\theta\right). \qquad (36)$$

Уравнение равновесия (23) в пластических областях можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\tau^{p(1)}_{\rho zi}\right)=-\frac{\partial\tau^{p(1)}_{\theta zi}}{\partial\theta}. \qquad (37)$$

Подставляя (36) в (37) и, производя интегрирование, получим выражение для компоненты напряжений $\tau^{p(1)}_{\rho zi}$ в каждом слое

$$\tau^{p(1)}_{\rho zi}=k^{(1)}_i cos\theta+\chi^{(1)}_i sin\theta+\frac{K_i\left(a_i-b_i\right)}{4}sin2\theta+\frac{N_i}{\rho}, \qquad (38)$$

где $N_i=N_i(\theta)$ – неизвестные функции координаты θ, которые определяются из граничного условия на внешнем контуре для внешнего слоя и условий сопряжения напряжений на границе раздела слоев для второго и третьего слоев.
Рассмотрим внешний слой.
Граничное условие на внешнем контуре (28), исходя из (34) и (35), примет вид

$$\left.\tau^{p(1)}_{\rho z1}\right|_{\rho=\alpha_1}=-K_1d_1msinm\theta. \qquad (39)$$

Подставляя (38) в (39), надем выражение для N_1 и получим

$$\tau^{p(1)}_{\rho z1}=\left(k^{(1)}_1 cos\theta+\chi^{(1)}_1 sin\theta+\frac{K_1\left(a_1-b_1\right)}{4}sin2\theta\right)\left(1-\frac{\alpha_1}{\rho}\right)-\frac{\alpha_1}{\rho}K_1d_1msinm\theta. \qquad (40)$$

На границе раздела первого и второго слоев условие сопряжения напряжений (29), учитывая (34) и (35), будет иметь форму

$$\left.\tau^{p(1)}_{\rho z2}\right|_{\rho=\alpha_2}=\left.\left(\tau^{p(1)}_{\rho z1}-d_2\left(K_2-K_1\right)msinm\theta\right)\right|_{\rho=\alpha_2}. \qquad (41)$$

Подстановкой (38) и (40) в (41) найдем N_2, и соотношение для $\tau^{p(1)}_{\rho z2}$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\tau^{p(1)}_{\rho z2}&=\left(k^{(1)}_2 cos\theta+\chi^{(1)}_2 sin\theta+\frac{K_2\left(a_2-b_2\right)}{4}sin2\theta\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{\rho}\right)+\\&+\left(k^{(1)}_1 cos\theta+\chi^{(1)}_1 sin\theta+\frac{K_1\left(a_1-b_1\right)}{4}sin2\theta\right)\frac{\left(\alpha_2-\alpha_1\right)}{\rho}-\\&-\frac{\left(\alpha_1d_1K_1+\alpha_2d_2\left(K_2-K_1\right)\right)}{\rho}msinm\theta.\end{aligned} \qquad (42)$$

Наконец, условие сопряжения напряжений на границе раздела второго и третьего слоя (30) с учетом (34) и (35) примет форму

$$\tau_{\rho z3}^{p(1)}\Big|_{\rho=\alpha_3} = \left(\tau_{\rho z2}^{p(1)} - d_3\left(K_3 - K_2\right) m sin m\theta\right)\Big|_{\rho=\alpha_3}. \tag{43}$$

Выражение для N_3 найдем подстановкой (38) и (42) в (43), и затем определим выражение для $\tau_{\rho z3}^{p(1)}$, оно будет иметь вид

$$\begin{gathered}\tau_{\rho z3}^{p(1)} = \left(k_3^{(1)} cos\theta + \chi_3^{(1)} sin\theta + \frac{K_3\left(a_3 - b_3\right)}{4} sin2\theta\right)\left(1 - \frac{\alpha_3}{\rho}\right) + \\ + \left(k_2^{(1)} cos\theta + \chi_2^{(1)} sin\theta + \frac{K_2\left(a_2 - b_2\right)}{4} sin2\theta\right)\frac{\left(\alpha_3 - \alpha_2\right)}{\rho} + \\ + \left(k_1^{(1)} cos\theta + \chi_1^{(1)} sin\theta + \frac{K_1\left(a_1 - b_1\right)}{4} sin2\theta\right)\frac{\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)}{\rho} - \\ - \frac{\left(\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2\left(K_2 - K_1\right) + \alpha_3 d_3\left(K_3 - K_2\right)\right)}{\rho} m sin m\theta.\end{gathered} \tag{44}$$

Таким образом, определены напряжения в первом приближении в пластических областях.

Рассмотрим упругую область внутреннего слоя.

Выразим компоненты упругих напряжений через функцию депланации в упругой области, для этого подставим (24) в (25), получим

$$\tau_{\rho z3}^{e(1)} = G\omega\frac{\partial w^{e(1)_3}}{\partial\rho}, \quad \tau_{\theta z3}^{e(1)} = G\omega\frac{1}{\rho}\frac{\partial w^{e(1)_3}}{\partial\theta}. \tag{45}$$

Граничное условие на внутреннем контуре (31) с учетом начального приближения (34), уравнения границы (35) и первого из соотношений (45) примет форму

$$\frac{\partial w^{e(1)}}{\partial\rho}\Big|_{\rho=\alpha_4} = -\alpha_4 d_4 m sin m\theta. \tag{46}$$

Условие непрерывности компоненты напряжений $\tau_{\rho z3}^{(1)}$ на упругопластической границе (32) подстановкой в него (34) и (45) даст соотношение

$$\frac{\partial w^{e(1)}}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1} = \frac{1}{G\omega}\tau_{\rho z3}^{p(1)}\Big|_{\rho=1}. \tag{47}$$

В упругой области для функции депланации объединением уравнения (27) и краевых условий (46) и (47) с учетом полученного соотношения (44) получим задачу Неймана для кольца ($0 \leqslant \theta < 2\pi$, $\alpha_4 < \rho < 1$):

$$\begin{cases} \Delta w^{e(1)} = 0 \\ \left.\frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = \frac{1}{G\omega}\left(k_3^{(1)} cos\theta + \chi_3^{(1)} sin\theta + \frac{K_3(a_3-b_3)}{4} sin2\theta\right)(1-\alpha_3) + \\ + \frac{1}{G\omega}\left(k_2^{(1)} cos\theta + \chi_2^{(1)} sin\theta + \frac{K_2(a_2-b_2)}{4} sin2\theta\right)(\alpha_3-\alpha_2) + \\ + \frac{1}{G\omega}\left(k_1^{(1)} cos\theta + \chi_1^{(1)} sin\theta + \frac{K_1(a_1-b_1)}{4} sin2\theta\right)(\alpha_2-\alpha_1) - \\ - \frac{1}{G\omega}\left(\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 \left(K_2 - K_1\right) + \alpha_3 d_3 \left(K_3 - K_2\right)\right) m sinm\theta \\ \left.\frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho}\right|_{\rho=\alpha_4} = -\alpha_4 d_4 m sinm\theta \end{cases} \tag{48}$$

Решая систему (48), получим выражение для функции перемещения в упругой области третьего слоя

$$\begin{aligned} w_3^{e(1)} = {} & \frac{1}{G\omega\left(1-\alpha_4^2\right)}\left(M_1 cos\theta + M_2 sin\theta\right)\left(\rho + \frac{\alpha_4^2}{\rho}\right) + \\ & + \frac{1}{2G\omega\left(1-\alpha_4^4\right)} M_3 \left(\rho^2 + \frac{\alpha_4^4}{\rho^2}\right) sin2\theta + \\ & + \left(M_4\left(\rho^m + \frac{\alpha_4^{2m}}{\rho^m}\right) + \frac{d_4 \alpha_4^{m+2}}{\rho^m}\right) sinm\theta, \end{aligned} \tag{49}$$

где введены обозначения
$M_1 = k_3^{(1)}\left(1-\alpha_3\right) + k_2^{(1)}\left(\alpha_3-\alpha_2\right) + k_1^{(1)}\left(\alpha_2-\alpha_1\right)$,
$M_2 = \chi_3^{(1)}\left(1-\alpha_3\right) + \chi_2^{(1)}\left(\alpha_3-\alpha_2\right) + \chi_1^{(1)}\left(\alpha_2-\alpha_1\right)$,
$M_3 = \frac{K_3(a_3-b_3)}{2}\left(1-\alpha_3\right) + \frac{K_2(a_2-b_2)}{2}\left(\alpha_3-\alpha_2\right) + \frac{K_1(a_1-b_1)}{2}\left(\alpha_2-\alpha_1\right)$,
$M_4 = \frac{1}{G\omega\left(1-\alpha_4^{2m}\right)}\left(\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 \left(K_2-K_1\right) + \alpha_3 d_3 \left(K_3-K_2\right)\right)$.
Поле напряжений в упругой зоне получим по формулам (45) подстановкой в них (49)

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z 3}^{e(1)} = {} & \frac{1}{\left(1-\alpha_4^2\right)}\left(M_1 cos\theta + M_2 sin\theta\right)\left(1 - \frac{\alpha_4^2}{\rho^2}\right) + \\ & + \frac{1}{\left(1-\alpha_4^4\right)} M_3 \left(\rho - \frac{\alpha_4^4}{\rho^3}\right) sin2\theta + \\ & + mG\omega\left(M_4\left(\rho^{m-1} - \frac{\alpha_4^{2m}}{\rho^{m+1}}\right) - \frac{d_4 \alpha_4^{m+2}}{\rho^{m+1}}\right) sinm\theta, \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z 3}^{e(1)} = {} & \frac{1}{\left(1-\alpha_4^2\right)}\left(-M_1 sin\theta + M_2 cos\theta\right)\left(1 + \frac{\alpha_4^2}{\rho^2}\right) + \\ & + \frac{1}{\left(1-\alpha_4^4\right)} M_3 \left(\rho + \frac{\alpha_4^4}{\rho^3}\right) cos2\theta + \\ & + mG\omega\left(M_4\left(\rho^{m-1} + \frac{\alpha_4^{2m}}{\rho^{m+1}}\right) + \frac{d_4 \alpha_4^{m+2}}{\rho^{m+1}}\right) cosm\theta. \end{aligned} \tag{51}$$

Определим упругопластическую границу в первом приближении.

Подставляя (34) в (33), получим формулу для определения радиуса упругопластической границы

$$\rho_s^{(1)} = \frac{1}{G\omega}\left(\tau_{\theta z3}^{p(1)} - \tau_{\theta z3}^{e(1)}\right)\Big|_{\rho=1}. \tag{52}$$

Подстановка (36) и (51) в (52) дает выражение для упругопластической границы в первом приближении, оно имеет вид

$$\begin{gathered}\rho_s^{(1)} = \frac{1}{G\omega}\left(-k_3^{(1)} sin\theta + \chi_3^{(1)} cos\theta - \frac{K_3}{4}\left(a_3 + b_3 - \left(a_3 - b_3\right) cos2\theta\right)\right) - \\ -\frac{\left(1+\alpha_4^2\right)}{G\omega\left(1-\alpha_4^2\right)}\left(-M_1 sin\theta + M_2 cos\theta\right) - \frac{\left(1+\alpha_4^4\right)}{G\omega\left(1-\alpha_4^4\right)} M_3 cos2\theta - \\ -m\left(M_4\left(1+\alpha_4^{2m}\right) + d_4\alpha_4^{m+2}\right) cosm\theta.\end{gathered} \tag{53}$$

Заключение

Таким образом, в работе с помощью метода малого параметра получено приближенное аналитическое решение задачи упругопластического кручения трехслойного анизотропного цилиндрического стержня. В первом приближении получены напряжения в пластических и упругой областях, поле перемещений в упругой области и упругопластическая граница.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. Москва: ГИТТ, 1956. 407 с.

[2] Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матема. ж. 1954. Т. 6, № 3. С. 314–325.

[3] Прагер В. Упрочнение металла при сложном напряженном состоянии // Теория пластичности / под ред. Ю.Н. Работнов. Москва: ИЛ, 1948. С. 325–335.

[4] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. Об условиях анизотропии идеальнопластических тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 571–575.

[5] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 560–600.

[6] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении анизотропных цилиндрических стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1(9). С. 80–87.

[7] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Упругопластическое кручение толстостенной трубы в случае трансляционной анизотропии // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформирумого твердого тела. 1. Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 2014. С. 193–199.

[8] Ковалев А. В., И. Э. Свиридов Ю. Д. Щеглова. Упругопластическое кручение кругового цилиндра в случае анизотропиисогласно Хиллу // Сборник трудов Международной научнотехнической конференции. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2015. С. 68–71.

[9] Фоминых С. О. Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1(9). С. 211–226.

[10] Фоминых С. О. Определение упругопластического состояния в толстостенной трубе при условии идеальнопластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2(16). С. 150–153.

[11] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Упругопластическое состояние толстостенного стержня некругового поперчного сечения при кручении в случае анизотропии общего вида // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4(30). С. 42–54.
[12] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
[13] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
[14] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неодномерные задачи уруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2004. 219 с.

Yu. D. Shcheglova

PERTURBATION METHOD IN STUDYING THE STRESSED STATE OF A THREE-LAYER ANISOTROPIC CYLINDRICAL ROD OF NON-CIRCULAR CROSS SECTION UNDER ELASTIC-PLASTIC TORSION

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The paper presents the development of the small parameter method for determining the stress state of a three-layer anisotropic cylindrical rod of non-circular cross section under elastic-plastic torsion. The two outer layers are in the plastic state, the inner layer is in the elastoplastic state. The case of plastic anisotropy is considered, which takes into account both anisotropy according to Hill and translational anisotropy. Each layer has its own anisotropy parameters. In the first approximation, the stresses in the plastic regions, the displacement and stresses in the elastic region of the inner layer, and the elastoplastic boundary are determined.

Keywords: elastoplastic torsion, anisotropy according to Hill, translational anisotropy, stress state, elastoplastic boundary, small parameter method.

REFERENCES

[1] Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford: Oxford University Press, 1998. 355 p.
[2] Ishlinskiy A. Yu. General theory of plasticity with linear hardening // Ukrain. Math. J. 1954. T. 6, № 3. C. 314–325.
[3] Prager W. Hardening of metal under complex stress state // Theory of plasticity / под ред. Yu. N. Rabotnov. Moscow: FL, 1948. C. 325–335.
[4] Ivlev D. D., Maksimova L. A. On conditions of anisotropy of ideal plastic bodies // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. № 2(8). C. 571–575.
[5] Ivlev D. D., Mironov B. G. On the ratios of the translational ideal plastic anisotropy in torsion // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. № 2(8). C. 560–600.
[6] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. On torsion of anisotropic cylindrical rods // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2011. № 1(9). C. 80–87.
[7] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Elastic-plastic torsion of a thick-walled pipe in the Case of translational anisotropy // Proceedings of the VIII All-Russian Conference on Solid Mechanics. 1. Cheboksary: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, 2014. C. 193–199.
[8] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Y. D. Elastic-plastic torsion of a circular cylinder in the case of anisotropy according to Hill // Proceedings of the International Scientific and Technical Conference. Voronezh: Voronezh State University, 2015. P. 68–71.

Shcheglova Yuliya Dmitrievna, Candidate Sci. Phys. and Math., Ass. Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[9] Fominykh S. O. Elastic-plastic state of a thick-walled pipe in the interaction of different types of anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2011. № 1(9). C. 211–226.

[10] Fominykh S. O. Determination of the elastoplastic state in a thick-walled pipe under the condition of ideal plastic anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 2(16). C. 150–153.

[11] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Elastic-plastic state of a thick-walled bar of non-circular cross section under torsion in the case of general anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. № 4(30). C. 42–54.

[12] Kachanov L. M. Fundamentals of the theory of plasticity. Moscow: Science, 1969. 420 c.

[13] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Science, 1978. 208 c.

[14] Sporykhin A. N., Kovalev A. V., Shcheglova Yu. D. Non-One-Dimensional Problems of Elastic-Visco-Plasticity with an Unknown Boundary. Voronezh: Voronezh State University, 2004. 219 c.