

Е. В. Мурашкин

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ПОВЕРХНОСТНОГО НАРАЩИВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ С МИКРОСТРУКТУРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В статье обсуждаются проблемы постановки и решения краевых задач при моделировании процессов аддитивного производства 3D материала, при учете наличия в нем дополнительных выделенных характерных направлений (выкладки волокон в тканых материалах, арматуры в бетонных конструкциях, биоволокон в мышечной ткани и т.д.). Выводится общая форма тензорного соотношения на поверхности наращивания, при учете дополнительных выделенных направлений. Определяется необходимая система независимых аргументов определяющей тензорной функции на поверхности наращивания в рассматриваемом случае. Определяется минимально необходимый полный набор совместных рациональных псевдоинвариантов тензоров силовых и моментных напряжений и характерных векторов, выделенных направлений. Дается инвариантно-полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания. Предложены постановки краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов. Полученные дифференциальные ограничения конкретизируются для ортогональных систем координат, учитывающих геометрию рассматриваемого процесса наращивания. Получены формулы преобразования тензоров напряжений при условии, что выделенные направления не являются ортогональными.

**Ключевые слова:** определяющая тензорная функция, псевдотензор, поверхность наращивания, тканый 3D-материал, микрополярная среда, рациональный псевдоинвариант

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.010

УДК: 539.374

**Вводные замечания.** Современные методы проектирования и изготовления изделий и конструкций сложной формы все чаще используют методы аддитивных технологий (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойная солидификация) [1].

---

© Мурашкин Е. В. 2022

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 20-01-00666.

Поступила 20.10.2022

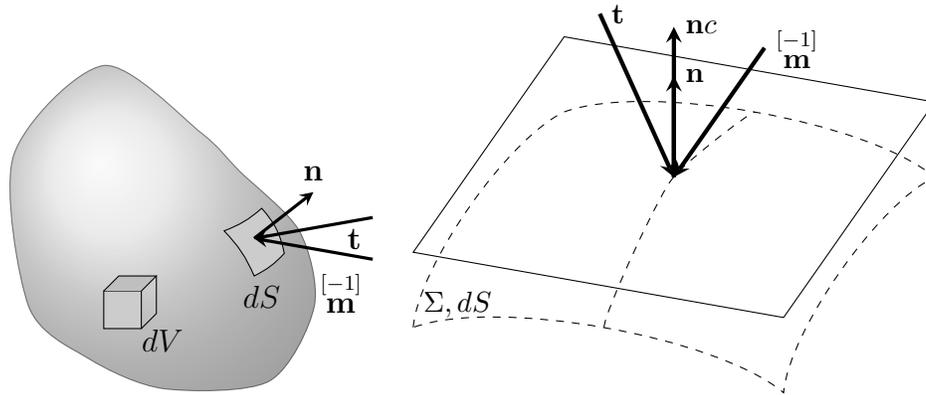


Рис. 1. Растущее тело

Такие производственные процессы связаны с синтезом изделий путем последовательного добавления материала к основному телу. При этом следует отметить, что рассматриваемые процессы роста [2,3] не включают процессы так называемого объемного роста [4], проявляющиеся в биологических процессах. В то же время процедура выбора адекватных граничных условий на поверхности наращивания является актуальной фундаментальной проблемой современной механики сплошных сред и прикладной математики. Конечные продукты аддитивных технологий, обладают микроструктурными особенностями и механическими свойствами, которые лучше всего описываются асимметричными теориями механики сплошных сред. Следовательно, для разработки математических моделей таких технологических процессов необходимо использовать микрополярные континуумы.

Псевдотензоры естественным образом возникают в математических моделях микрополярного континуума. Например, псевдотензорами являются: вектор микровращения, тензор изгиба-кручения, псевдотензор моментных напряжений, микроинерция, характерная микродлина. Литературный поиск показывает, что применение псевдотензоров в теориях механики сплошных сред не имеет широкого распространения, несмотря на разработанный аппарат [5–13].

Решение прикладной задачи механики роста твердого тела всегда является сложной и трудоемкой процедурой [14, 15]. Существенной особенностью постановки краевых задач в рамках механики роста является постановка граничных условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью [16].

**1. Условия на поверхности наращивания в материалах с характерными выделенными направлениями.** На протяжении всей статьи будем применять описание в эйлеровых координатах. Терминология и обозначения в основном соответствуют аналогичным в работах [22–25]. Определим распространяющуюся поверхность наращивания  $\Sigma$  в трехмерном евклидовом пространстве неявным уравнением

$$t = \tau_*(x^i). \quad (1)$$

На элемент поверхности наращивания  $dS$  с вектором единичной нормали  $n_i$  действуют векторы поверхностных сил  $\mathbf{t}$  и моментов  $\mathbf{m}^{[-1]}$  (см. рис. 1), выселяющихся через

компоненты тензора актуальных силовых  $\sigma$  и моментных  $\mu^{[-1]}$  напряжений согласно формулам

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \sigma, \quad \mathbf{m}^{[-1]} = \mathbf{n} \cdot \mu^{[-1]}. \quad (2)$$

Тогда единичный вектор нормали  $n_i$  на наращиваемой поверхности  $\Sigma$  направленный в сторону ее распространения, связан с пространственным градиентом (1)

$$n_i = c \partial_i \tau, \quad c = |\nabla \tau|^{-1} \quad (t = \tau), \quad (3)$$

где  $c$  — линейная скорость распространения поверхности наращивания в нормальном направлении  $n_k$ .

Ранее в работах подробно обсуждался вывод краевых условий на поверхности наращивания (см., Например, [22–24]). Приведем здесь лишь окончательные формулы для актуальных компонент тензора силовых напряжений  $\sigma^{ij}$

$$\sigma^{ij} = \int_{\tau+0}^t [\partial. \sigma^{ij}(x^s, t')] dt' + \mathcal{S}^{ji} + \sigma_*^{ij}(x^s), \quad (4)$$

$$\mathcal{S}^{ij} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial. \sigma^{ij}(x^s, t')] dt', \quad (5)$$

$$c[\nabla_j \sigma_*^{ji}(x^s) + \nabla_j \mathcal{S}^{ji} + X_*^i(x^s)] - n_j \partial. \sigma^{ji}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau + 0). \quad (6)$$

и для компонент тензора моментных напряжений

$$\mu_{.k}^{[-1]i.} = \int_{\tau+0}^t [\partial. \mu_{.k}^{[-1]i.}(x^s, t')] dt' + \mathcal{M}_{.k}^{i.} + \mu_{.k}^{[-1]i.}(x^s), \quad (7)$$

$$\mathcal{M}_{.k}^{i.} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial. \mu_{.k}^{[-1]i.}(x^s, t')] dt', \quad (8)$$

$$c[\nabla_i \mu_{.k}^{[-1]i.}(x^s) + \nabla_i \mathcal{M}_{.k}^{i.} - 2 \frac{[-1]}{\tau k} + \frac{[-1]}{Y_k}] - n_i \partial. \mu_{.k}^{[-1]i.}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau + 0). \quad (9)$$

В приведенных выше уравнениях (4)–(9) введены следующие обозначения:  $\mathcal{S}^{ji}$  — интеграл, связанный со скачком напряжений,  $\sigma_*^{ij}(x^s) = \sigma^{ij}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$  — компоненты тензора напряжений, соответственно, вычисленные в момент  $t = \tau(x^s) - 0$  прямо перед включением элемента в основное твердое тело,  $X_*^i(x^s) = X^i(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)+0}$ . Момент  $t = \tau(x^s) + 0$  соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к поверхности наращивания,  $\mathcal{M}_{.k}^{i.}$  — интеграл, связанный со скачком моментных напряжений,  $\mu_{.k}^{[-1]i.}(x^s) = \mu_{.k}^{[-1]i.}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$  — компоненты тензора моментных напряжений, вычисленные во время  $t = \tau(x^s) - 0$ .

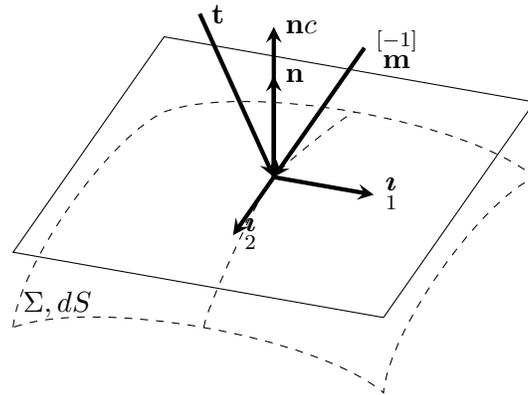


Рис. 2. Геометрическая визуализация векторов действующих на плоский касательный элемент  $T$  на поверхности наращивания  $\Sigma$ .

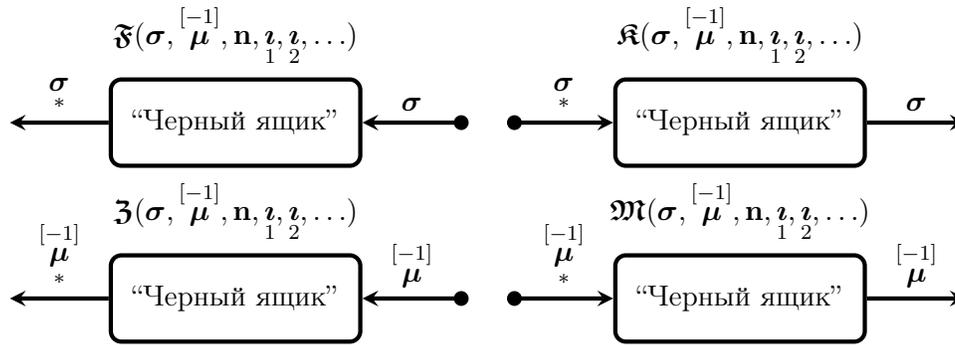


Рис. 3. Идея физического принципа “Черного ящика” в механике наращиваемых тел.

**2. Тензорные функции связи актуальных силовых и моментных напряжений с напряжениями в наращиваемом элементе с учетом выделенного направления.** В процессах производства тканых материалов зачастую можно выделить характерные направления на поверхности наращивания. Обозначим направляющие вектора таких направления  $\mathbf{l}_1$  и  $\mathbf{l}_2$  (см. рис. 2). В этом случае псевдотензорные функции связи силовых  $\sigma_*^{ij}$  и моментных напряжений  $\mu_{*k}^{[-1]i}$  с актуальными напряжениями и моментами на поверхности наращивания можно принять в форме

$$\sigma_*^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\sigma_*^{ij}, \mu_{*j}^{[-1]i}, n_j, \mathbf{l}_{1j}, \mathbf{l}_{2j}, \dots), \quad \mu_{*j}^{[-1]i} = \mathfrak{Z}_{*j}^{i}(\sigma_*^{ij}, \mu_{*j}^{[-1]i}, n_j, \mathbf{l}_{1j}, \mathbf{l}_{2j}, \dots), \quad (10)$$

и если возможно обратное

$$\sigma_*^{ij} = \mathfrak{K}^{ij}(\sigma_*^{ij}, \mu_{*j}^{[-1]i}, n_j, \mathbf{l}_{1j}, \mathbf{l}_{2j}, \dots), \quad \mu_{*j}^{[-1]i} = \mathfrak{M}_{*j}^{i}(\sigma_*^{ij}, \mu_{*j}^{[-1]i}, n_j, \mathbf{l}_{1j}, \mathbf{l}_{2j}, \dots), \quad (11)$$

Соотношения (10) и (11) необходимо уточнить путем экспериментального определения функций  $\mathfrak{F}_{ij}$ ,  $\mathfrak{Z}_{.k}^{[-1].i}$ ,  $\mathfrak{K}_{ij}$  и  $\mathfrak{M}_k^{[-1].i}$ . Схематически процесс определения необходимых параметров процесса наращивания изображен на рис. 3. В этом случае под “черным ящиком” понимаются возможные изменения параметров напряженно деформированного состояния материала во временном промежутке от момента создания наращиваемого элемента до момента его присоединения к основному телу, т.е. во временном интервале  $\tau - 0 \leq t \leq \tau + 0$ . “Черный ящик” может быть связан с различными физическими яв-

лениями. В частности, тензорные функции  $\mathfrak{F}_{ij}$ ,  $\mathfrak{Z}_{.k}^{[-1].i}$ ,  $\mathfrak{K}_{ij}$  и  $\mathfrak{M}_k^{[-1].i}$  при производстве тканых материалов могут зависеть от подвижных выделенных направлений, связанных с распространяющейся поверхностью наращивания. Физический смысл дополнительных направляющих может быть связан с характерными направлениями укладки волокон в тканых композитных материалах, направлениях армирования более жесткими волокнами, направлениями наматывания нитей в бобину и т. д. Важное ограничение, накладываемое на тензорные функции  $\mathfrak{F}_{ij}$ ,  $\mathfrak{Z}_{.k}^{[-1].i}$ ,  $\mathfrak{K}_{ij}$  и  $\mathfrak{M}_k^{[-1].i}$ , которое следует принять — является инвариантность их аргументов относительно поворотов подвижной системы координат вокруг единичного вектора нормали  $n_j$  к поверхности наращивания. В этом случае необходимо выбрать систему совместных инвариантов тензорных  $\sigma^{ij}$ ,  $\mu_{.j}^{[-1].i}$  и векторных  $n_j$ ,  $\varrho_{1j}$ ,  $\varrho_{2j}$ , величин, удовлетворяющих условию ротационной инвариантности относительно вектора  $n_j$ .

**3. Способы построения систем совместных алгебраических относительных инвариантов тензора второго ранга и вектора.** Как видно из обсуждения в предыдущем разделе, для дальнейшей конкретизации определяющих тензорных функций на поверхности наращивания необходимо определить систему совместных инвариантов тензорных  $\sigma^{ij}$ ,  $\mu_{.j}^{[-1].i}$  и векторных  $n_j$ ,  $\varrho_{1j}$ ,  $\varrho_{2j}$ . В дальнейшем разумно учесть, что единичный вектор нормали  $n_i$  и касательный к поверхности наращивания вектор  $\varrho_{1j}$ ,  $\varrho_{2j}$ , определяют ее локальную. Введем специальную ортонормированную систему координат, с базисными векторами: единичным вектором нормали  $n_i$  касательным вектором  $\varrho_{1j}$ ,  $\varrho_{2j}$ , и вектором в касательной плоскости к поверхности наращивания, который можно определить через векторы  $n_i$  и  $\varrho_{1j}$ ,  $\varrho_{2j}$ , согласно правилу

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu}. \quad (12)$$

В этом случае система трех взаимно-ортогональных векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  будет правоориентированной.

Алгоритм построения систем совместных рациональных инвариантов подробно рассмотрены в монографии [8]. Следуя методологии, изложенной в [8], для рассматриваемого здесь случая получим рациональную систему алгебраических рациональных инвариантов тензора силовых напряжений  $\sigma^{ij}$  и векторов  $n_k$  и  $\nu_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp, \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}_2, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp, & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp. \end{aligned} \quad (13)$$

тогда для псевдоаффинора моментных напряжений  $\mu_{\cdot k}^{[-1]i}$  и векторов  $n_k$  и  $\nu_i$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}^{[-1]} \cdot \boldsymbol{\mu}^{[-1]} \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}, & \mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp, \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2, & & \end{aligned} \quad (14)$$

Совместные инварианты тензоров  $\sigma^{ij}$  и  $\mu_{\cdot k}^{[-1]i}$  определяются согласно

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp, & \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_2, \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{t}, & \mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp, & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_2. \end{aligned} \quad (15)$$

При построении системы совместных инвариантов (13)–(15) векторы  $\mathbf{t}_\perp$ ,  $\mathbf{m}_\perp$ ,  $\mathbf{t}_2$  и  $\mathbf{m}_2$  есть проекции векторов  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{m}$ , соответственно, в касательную плоскость к поверхности наращивания.

Очевидно, что система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов, представленная уравнениями (13)–(15) является полной. Вместе с этим совместные инварианты, входящие в нее, не являются независимыми и частично могут быть исключены из рассмотрения с помощью рациональных сизигий. Более того, совместные алгебраические рациональные инварианты высоких порядков, включающие кубы и биквадраты тензора силовых и псевдотензора моментных напряжений следует исключить в силу теоремы Гамильтона–Кэли [8].

Таким образом, неприводимая полная система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов тензора силовых напряжений  $\sigma^{ij}$ , псевдотензора моментных напряжений  $\mu_{\cdot k}^{[-1]i}$  и векторов  $n_k$  и  $\nu_i$  может быть принята в виде

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp. \quad (16)$$

Отметим еще раз, что система инвариантов (16) не чувствительна к вращениям локальной ортогональной системы координат с базисными ортами  $n_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\tau_i$  вокруг единичного орта  $n_i$ .

Неприводимая полная система гемитропных псевдоинвариантов выглядит следующим образом

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp. \quad (17)$$

Отметим, что система инвариантов (17) чувствительна к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, но, при этом, ротационно инвариантна.

**4. Определяющие тензорные функции в специфической ортогональной системе координат.** Рассмотрим инвариантно–геометрическую интерпретацию случая в специальной ортогональной системе координат с ортами  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{z}_1$  и  $\mathbf{z}_2$ . Пусть на поверхности наращивания известны поверхностные усилия  $\mathbf{t}$  и моменты  $\mathbf{m}$ . В этом случае, определяющие тензорные функции (10) на поверхности наращивания в терминах

полной системы совместных инвариантов (16) для сужения на двумерный плоский касательный элемент  $T$  тензора  $\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}$ , примет вид

$$\sigma_{*}^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}([\overset{-1}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{t} \cdot [\overset{-1}{\mathbf{m}}], \mathbf{t}_{\perp} \cdot [\overset{-1}{\mathbf{m}}]_{\perp}). \quad (18)$$

$$\mu_{*}^{[i]j} = \mathfrak{Z}_{.j}^{[i]}([\overset{-1}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{t} \cdot [\overset{-1}{\mathbf{m}}], \mathbf{t}_{\perp} \cdot [\overset{-1}{\mathbf{m}}]_{\perp}). \quad (19)$$

Для проекций векторов  $\mathbf{t}_{\perp}$  и  $[\overset{-1}{\mathbf{m}}]_{\perp}$  в касательной плоскости  $T$  к поверхности наращивания следует

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}_{\perp}|^2 &= |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{z}_1|^2 + |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{z}_2|^2, \\ |[\overset{-1}{\mathbf{m}}]_{\perp}|^2 &= |[\overset{-1}{\mathbf{m}}]_{\perp} \cdot \mathbf{z}_1|^2 + |[\overset{-1}{\mathbf{m}}]_{\perp} \cdot \mathbf{z}_2|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Квадраты совместных инвариантов, длины векторов (16) и длины их проекций (20) легко вычисляются через актуальные значения  $\mathbf{t}$  и  $[\overset{-1}{\mathbf{m}}]$  на поверхности наращивания, т.е. через актуальные компоненты силовых и моментных напряжений, согласно формулам

$$\begin{aligned} |\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}| &= |\sigma_{33}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{z}_1|^2 = \sigma_{31}^2, \quad |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{z}_2|^2 = \sigma_{32}^2, \\ |[\overset{-1}{\mathbf{m}}] \cdot \mathbf{n}| &= |[\overset{-1}{\mu}]_{33}|, \quad |[\overset{-1}{\mathbf{m}}]_{\perp} \cdot \mathbf{z}_1| = [\overset{-1}{\mu}]_{31}, \quad |[\overset{-1}{\mathbf{m}}]_{\perp} \cdot \mathbf{z}_2| = [\overset{-1}{\mu}]_{32}, \\ |\mathbf{t} \cdot [\overset{-1}{\mathbf{m}}]| &= |\sigma_{3s} [\overset{-1}{\mu}]_{s3}| = |\sigma_{31} [\overset{-1}{\mu}]_{13} + \sigma_{32} [\overset{-1}{\mu}]_{23} + \sigma_{33} [\overset{-1}{\mu}]_{33}|, \\ |\mathbf{t}_{\perp} \cdot [\overset{-1}{\mathbf{m}}]_{\perp}| &= |[\overset{-1}{\mu}]_{3s} \mu_{s3}| = |\sigma_{31} [\overset{-1}{\mu}]_{13} + \sigma_{32} [\overset{-1}{\mu}]_{23}|. \end{aligned} \quad (21)$$

Определяющие тензорные функции (18) и (19) на поверхности наращивания с учетом выражений (21) и приняв следующие обозначения для инвариантов,

$$\begin{aligned} I &= |[\overset{-1}{\mu}]_{33}|, \quad II = |\sigma_{31} [\overset{-1}{\mu}]_{13} + \sigma_{32} [\overset{-1}{\mu}]_{23} + \sigma_{33} [\overset{-1}{\mu}]_{33}|, \\ III &= |\sigma_{31} [\overset{-1}{\mu}]_{13} + \sigma_{32} [\overset{-1}{\mu}]_{23}|. \end{aligned} \quad (22)$$

можно выписать в форме

$$\sigma_{*}^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(I, II, III), \quad (23)$$

$$\mu_{*}^{[i]j} = \mathfrak{Z}_{.j}^{[i]}(I, II, III). \quad (24)$$

Граничные условия в форме дифференциальных ограничений на поверхности наращивания (32), (9) с учетом псевдотензорных определяющих функций (23) обладают необходимыми свойствами полуизотропной чувствительности к геометрии поверхности наращивания и характерным направлениям выкладки материала в процессах намотки нитей или производстве тканых композитов.

**2. Преобразование операторов дифференцирования вдоль координатных направлений на плоскости.**

Ниже воспроизведем вывод формул преобразования операторов  $d_k$  дифференцирования вдоль координатных направлений на плоскости при переходе от ортогональной сетки к произвольной (необязательно ортогональной) криволинейной сетке.

Предположим, что на плоскости имеется локальный ортонормированный базис  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ , а другой локальный базис состоит из, вообще говоря, неортогональных единичных векторов  $\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{m}}$ , первый из которых отклоняется от орта  $\mathbf{l}$  на угол  $\psi_1$  по ходу часовой стрелки, а второй отклоняется от орта  $\mathbf{l}$  на угол  $\psi_2$  против хода часовой стрелки. Мы считаем, что  $\psi_1 > 0, \psi_2 > 0, \psi_1 + \psi_2 \neq \pi$ . Углы  $\psi_1, \psi_2$  могут, вообще говоря, изменяться при движении вдоль координатных линий локальной базисной системы  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ .

Найдем формулы преобразования дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla, & d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla, \\ \bar{d}_1 &= \bar{\mathbf{l}} \cdot \nabla, & \bar{d}_2 &= \bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla \end{aligned}$$

при переходе от одной локальной базисной системы к другой. Эти операторы, как следует из их определения, представляют собой производные вдоль соответствующих координатных линий.

Коэффициенты в разложении

$$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2 \quad (25)$$

на основании

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}} &= \cos \psi_1 = k_1 + k_2 \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{m}} &= \cos \psi_2 = k_2 + k_1 \cos(\psi_1 + \psi_2) \end{aligned}$$

вычисляются в следующем виде

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ k_2 &= \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично для разложения

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2 \quad (27)$$

с помощью

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{l}} &= -\sin \psi_1 = s_1 + s_2 \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} &= \sin \psi_2 = s_2 + s_1 \cos(\psi_1 + \psi_2) \end{aligned}$$

можно получить

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ s_2 &= \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \cdot \nabla = k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2, \\ d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \cdot \nabla = s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2, \end{aligned}$$

то в итоге искомые формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \overline{d_1} + \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \overline{d_2}, \\ d_2 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \overline{d_1} + \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \overline{d_2}. \end{aligned} \quad (29)$$

В случае преобразования поворота исходного базиса  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ , т.е. когда

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \psi_2 = \psi,$$

полученные формулы упрощаются

$$\begin{aligned} d_1 &= \sin \psi \overline{d_1} + \cos \psi \overline{d_2}, \\ d_2 &= -\cos \psi \overline{d_1} + \sin \psi \overline{d_2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Обратное по отношению к (30) преобразование есть

$$\begin{aligned} \overline{d_1} &= \sin \psi d_1 - \cos \psi d_2, \\ \overline{d_2} &= \cos \psi d_1 + \sin \psi d_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Полученные выше формулы преобразования дифференциальных  $d$ -операторов оказываются весьма удобным средством при исследовании систем уравнений в частных производных, с которыми приходится сталкиваться в двумерных задачах математической теории пластичности. То же самое можно сказать о задачах механики растущих тел [16–21]. Соответствующий круг вопросов рассмотрен в следующих разделах работы.

### 3. Дифференциальное ограничение на растущей поверхности, сформулированное в эйлеровых переменных.

Можно показать [22–25], что дифференциальное ограничение на поверхности наращивания можно записать в виде

$$c[\nabla_j \tau^{*ji}(x^k) + \nabla_j \mathfrak{I}^{ji} + \dot{X}^i(x^k)] - [n_j \partial_t \tau^{*ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^s)+0} = 0 \quad (t = \tau^* + 0). \quad (32)$$

где  $\nabla_j$  — ковариантное дифференцирование по эйлеровой метрике,  $c$  — линейная скорость поверхности наращивания в направлении нормали,  $\tau^{ij}$  — тензор напряжений (вообще говоря несимметричный),  $\partial_t$  — производная по времени при фиксированных координатах  $x^k$ ,  $\dot{X}^i(x^k) = X^i(x^k, t) \Big|_{t=\tau^*(x^s)-0}$ ,  $X^i = X^i(x^k, t)$ , — объемные силы,  $\mathfrak{I}^{ji}$  — интеграл скачков напряжений,  $\tau^{*ij}(x^k) = \tau^{ij}(x^k, t) \Big|_{t=\tau^*(x^s)-0}$ ,  $t = \tau^*(x^s) - 0$  момент времени непосредственно перед моментом включения элемента в состав основного тела (Рис. 2). Момент времени  $t = \tau^*(x^s) + 0$  соответствует моменту непосредственно после присоединения элемента к поверхности наращивания.

Заметим, что

$$\mathfrak{I}^{ij} = \int_{\tau^*-0}^{\tau^*+0} [\partial_t \tau^{ij}(x^k, t')] dt'.$$

Дифференциальное ограничение (32) для напряжений на поверхности наращивания в ортогональной системе координат, можно представить в форме (в отсутствие

массовых сил и скачков напряжений)

$$[cd_j \tau_{<ji>}^* - n_{<j>} \partial. \tau_{<ji>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x_s)+0} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (33)$$

В (33) индекс 3 соответствует направлению нормали, а индексы 1 и 2 — касательным направлениям к поверхности наращивания. Выпишем соотношение (33) в криволинейной системе координат, воспользовавшись преобразованием (29) при условии, что орт, соответствующий индексу 3, направлен вдоль нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности наращивания.

После подстановки соотношений (29) в дифференциальное ограничение (33) с учетом обозначений (26), (28) и равенства (35) получим

$$\begin{aligned} & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \tau_{<11>}^* + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \tau_{<21>}^* + d_3 \tau_{<31>}^* - \\ & - n_{<1>} \partial. \tau_{<11>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial. \tau_{<21>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial. \tau_{<31>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x_s)+0} = 0, \\ & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \tau_{<12>}^* + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \tau_{<22>}^* + d_3 \tau_{<32>}^* - \\ & - n_{<1>} \partial. \tau_{<12>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial. \tau_{<22>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial. \tau_{<32>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x_s)+0} = 0, \\ & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \tau_{<13>}^* + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \tau_{<23>}^* + d_3 \tau_{<33>}^* - \\ & - n_{<1>} \partial. \tau_{<13>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial. \tau_{<23>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial. \tau_{<33>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x_s)+0} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь учтено, что

$$d_3 = \bar{d}_3 = \mathbf{n} \cdot \nabla. \quad (35)$$

За счет выбора углов  $\psi_1, \psi_2$  можно упростить вид дифференциальных ограничений (34). Вообще говоря, в соотношениях (34) компоненты тензора напряжений  $\tau_{<ji>}^*$  необходимо преобразовать к новому базису. Соотношения для преобразования компонент тензора напряжений будут даны в разделе 5 работы.

**5. Преобразование несимметричного тензора напряжений при переходе к неортогональному базису.** Несимметричный тензор напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  можно записать как линейную комбинацию базисных тензорных произведений с сомножителями  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \tau_{<11>} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \tau_{<12>} \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + \tau_{<21>} \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \tau_{<22>} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \tau_{<23>} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{<32>} \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \tau_{<33>} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{<13>} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \tau_{<31>} \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (36)$$

Найдем диадное представление тензора  $\boldsymbol{\tau}$  после замены базиса  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$  на новый базис  $\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{m}}, \mathbf{n}$ . Подставив в формулу (36) формулы (25) и (27), получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \tau_{<11>} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{<12>} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\ & + \tau_{<21>} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{<22>} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\ & + \tau_{<23>} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{<32>} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \tau_{<33>} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{<13>} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{<31>} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2), \end{aligned} \quad (37)$$

кроме того, имеем:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle 11 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_1^2 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_1 k_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_2 k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_2^2) + \\
& + \tau_{\langle 12 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_1 s_1 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_1 s_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_2 s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_2 s_2) + \\
& + \tau_{\langle 21 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_1 k_1 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_1 k_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_2 k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_2 k_2) + \\
& + \tau_{\langle 22 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_1^2 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_1 s_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_2 s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_2^2) + \\
& + \tau_{\langle 23 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} s_2) + \tau_{\langle 32 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_1 + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_2) + \\
& + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} k_2) + \tau_{\langle 31 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_1 + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_2).
\end{aligned} \tag{38}$$

Соберем затем слагаемые с одинаковыми диадами базисных директоров  $\bar{\mathbf{l}}$ ,  $\bar{\mathbf{m}}$ ,  $\mathbf{n}$ . После ряда преобразований приходим к:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} = & (k_1^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \\
& + (k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_1 k_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
& + (k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_2 k_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \\
& + (k_2^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_2^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
& + (k_2 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 23 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} + (k_2 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
& + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (k_1 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 23 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} + (k_1 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Откуда, окончательно, формулы преобразования компонент тензора напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  от исходного базиса к искаженному примут вид:

$$\begin{aligned}
\tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} &= k_1^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1^2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} &= k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_1 k_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} &= k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_2 k_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} &= k_2^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_2^2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle} &= k_2 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 23 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle} &= k_2 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 32 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{3}\bar{3} \rangle} &= \tau_{\langle 33 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{1}\bar{3} \rangle} &= k_1 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 23 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{3}\bar{1} \rangle} &= k_1 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 32 \rangle}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Далее рассмотрим обращение формул (40). Формулы преобразования базисных директоров  $\bar{\mathbf{l}}$ ,  $\bar{\mathbf{m}}$ ,  $\mathbf{n}$  в директоры  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  можно принять как

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l} \bar{k}_1 + \mathbf{m} \bar{k}_2, \tag{41}$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{l} \bar{s}_1 + \mathbf{m} \bar{s}_2, \tag{42}$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n}. \tag{43}$$

Тогда коэффициенты в разложении (41), (42) легко получить на основании соотношений

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{l} &= \cos \psi_1 = \bar{k}_1, \\ \bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{m} &= -\sin \psi_1 = \bar{k}_2, \\ \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{l} &= \cos \psi_2 = \bar{s}_1, \\ \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} &= \sin \psi_2 = \bar{s}_2.\end{aligned}\tag{44}$$

Снова запишем тензор напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  как линейную комбинацию базисных тензорных произведений

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \tau_{\langle 11 \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \tau_{\langle 12 \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle 21 \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \tau_{\langle 22 \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle 23 \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} + \\ &+ \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}.\end{aligned}\tag{45}$$

Подставляя в формулу (45) разложения (41), (42), получим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \tau_{\langle 11 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) + \tau_{\langle 12 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\ &+ \tau_{\langle 21 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) + \tau_{\langle 22 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\ &+ \tau_{\langle 23 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\ &+ \tau_{\langle 13 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2).\end{aligned}\tag{46}$$

Раскроем скобки в (46), в результате приходим к:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \tau_{\langle 11 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{k}_1^2 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_1\bar{k}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{k}_2\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2^2) + \\ &+ \tau_{\langle 12 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{k}_1\bar{s}_1 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_1\bar{s}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{k}_2\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2\bar{s}_2) + \\ &+ \tau_{\langle 21 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{s}_1\bar{k}_1 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_1\bar{k}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{s}_2\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2\bar{k}_2) + \\ &+ \tau_{\langle 22 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{s}_1^2 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_1\bar{s}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{s}_2\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2^2) + \\ &+ \tau_{\langle 23 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}\bar{s}_2) + \tau_{\langle 32 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{s}_1 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\ &+ \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}\bar{k}_2) + \tau_{\langle 31 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{k}_1 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2).\end{aligned}\tag{47}$$

Соберем слагаемые с одинаковыми диадами, состоящими из векторов  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ . После ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= (\bar{k}_1^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_1^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \\ &+ (\bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{s}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + \\ &+ (\bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{s}_2 \bar{k}_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \\ &+ (\bar{k}_2^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_2^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \\ &+ (\bar{k}_2 \tau_{\langle 13 \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle 23 \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_2 \tau_{\langle 31 \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \\ &+ \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_1 \tau_{\langle 13 \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle 23 \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_1 \tau_{\langle 31 \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}.\end{aligned}\tag{48}$$

Откуда, окончательно формулы преобразования компонент тензора напряжений  $\tau$  от искаженного базиса к исходному запишем в форме:

$$\begin{aligned}
\tau_{\langle 11 \rangle} &= \bar{k}_1^2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1^2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
\tau_{\langle 12 \rangle} &= \bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
\tau_{\langle 21 \rangle} &= \bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{s}_2 \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
\tau_{\langle 22 \rangle} &= \bar{k}_2^2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_2^2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
\tau_{\langle 23 \rangle} &= \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{3} \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle}, \\
\tau_{\langle 32 \rangle} &= \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{3}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle}, \\
\tau_{\langle 33 \rangle} &= \tau_{\langle \bar{3}\bar{3} \rangle}, \\
\tau_{\langle 13 \rangle} &= \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{3} \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle}, \\
\tau_{\langle 31 \rangle} &= \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{3}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle}.
\end{aligned} \tag{49}$$

**Заключение.** В статье рассмотрены вопросы формулировки краевых задач моделировании процессов аддитивного производства тканых 3D материала, при учете наличия в нем дополнительных выделенных направлений (выкладки волокон в тканых материалах, арматуры в бетонных конструкциях, биоволокон в мышечной ткани и т.д.). Получена общая форма тензорного соотношения на поверхности наращивания, при учете дополнительных характерных выделенных направлений. Определена необходимая система независимых аргументов определяющей тензорной функции на поверхности наращивания в рассматриваемом случае. Определен полный набор совместных рациональных полузотропных псевдоинвариантов тензора напряжений, псевдотензора моментных напряжений и характерных директоров. Дается инвариантно-полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания. Предложены постановки краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов. Полученные дифференциальные ограничения конкретизируются для ортогональных систем координат, учитывающих геометрию процесса наращивания. Получены формулы преобразования тензоров напряжений при условии, что выделенные направления не являются ортогональными.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. Vol. 55. P. 155–162.
- [2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International Journal of Plasticity. 2000. Vol. 16. P. 951–978.
- [3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. p. 731–741.
- [4] Goriely A. The mathematics and mechanics of biological growth. New York: Springer, 2017. xxii + 646 p.
- [5] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377.
- [6] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 c.
- [7] Levi-Civita T. The absolute differential calculus (calculus of tensors). London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 p.
- [8] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: P. Noordhoff, 1964.
- [9] Einstein A. General Relativity; an Einstein Centenary Survey. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 p.

- [10] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 p.
- [11] Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
- [12] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. New York: Courier Corporation, 1978. Vol. 5. 334 p.
- [13] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 p.
- [14] Southwell R. V. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
- [15] Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. Vol. 14. P. 199–209.
- [16] Arutyunyan N. K., Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. Vol. 48. P. 1–10.
- [17] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // *AIP Conference Proceedings*. — 2019. — Vol. 2116. — P. 380013.
- [18] Stadnik N. E., Dats E. P. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2018. — Vol. 991. — P. 012075.
- [19] Стадник Н. Э. О наращивании 3d-материалов в условиях осевой симметрии // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. — 2021. — № 4(50). — С. 91–97.
- [20] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2022. — Vol. 45, no. 5. — P. 3197–3212.
- [21] Нестеров Т. К., Мурашкин Е. В. Объемный рост составного толстостенного упругого цилиндра // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. — 2021. — № 4(50). — С. 82–90.
- [22] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 2019. Vol. 23. P. 646–656.
- [23] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2019. № 3(41). С. 11–29.
- [24] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. P. 1157–1164.
- [25] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2021. № 1(47). С. 114–121

E. V. Murashkin

## ON MODELING THE PROCESSES OF SURFACE GROWTH OF MATERIALS WITH MICROSTRUCTURE

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The article discusses the problems of setting and solving boundary value problems in modeling the processes of additive production of a 3D material, taking into account the presence of additional selected characteristic directions in it (layout of fibers in woven materials, reinforcement in concrete structures, biofibers in muscle tissue, etc.). The general form of the tensor relation on the growth surface is derived, taking into account additional distinguished directions. The necessary system of independent arguments of the defining tensor function on the growth surface in the case under consideration is determined. The minimum necessary complete set of joint rational pseudo-invariants of force and moment stress tensors and characteristic vectors, selected directions is determined. An invariant-complete formulation of the constitutive relations on the growth surface is given. Statements of boundary value problems simulating the processes of synthesis of woven 3D materials are proposed. The resulting differential constraints are specified for orthogonal coordinate systems that take into account the geometry of the growth process under consideration.

**Keywords:** pseudotensor, growing surface, 3D woven material, micropolar medium, rational invariant

### REFERENCES

- [1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // *Business Horizons*. 2012. T. 55. C. 155–162.
- [2] Epstein M. Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // *International Journal of Plasticity*. 2000. T. 16. C. 951–978.
- [3] A. Maugin G. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009. c. 731–741.
- [4] A. Goriely. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York: Springer, 2017. xxii + 646 c.
- [5] Veblen O. Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Transactions of the American Mathematical Society*. 1924. T. 26. C. 373–377.
- [6] O. Veblen. *Invariants of quadratic differential forms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 c.
- [7] T. Levi-Civita. *The absolute differential calculus (calculus of tensors)*. London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 c.
- [8] B. Gurevich G. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Gröningen: P. Noordhoff, 1964.
- [9] A. Einstein. *General Relativity; an Einstein Centenary Survey*. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 c.
- [10] A. Schouten J. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 c.
- [11] S. Sokolnikoff I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 c.
- [12] Synge J. L. Schild A. *Tensor calculus*. New York: Courier Corporation, 1978. T. 5. 334 c.
- [13] J. Das A. *Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 c.
- [14] V. Southwell R. *An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists*. London: Oxford Univ. Press, 1936.
- [15] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. T. 14. C. 199–209.

---

*Murashkin Evgenii Valeryevich*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

- 
- [16] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. T. 48. C. 1–10.
- [17] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // *Mechanics of Solids*. 2019. T. 54. C. 1157–1164.
- [18] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 2019. T. 23. C. 646–656.
- [19] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a class of constitutive equations on propagating growing surface // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2019. C. 11–29.
- [20] В. Мурашкин Е. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3d materials // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2021. C. 114–121.

---

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 20-01-00666.