Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 13–17

Б. Г. Миронов[1], *Ю. Б. Миронов*[2]

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОМПОНЕНТ ДЕФОРМАЦИИ В СЛУЧАЕ КРУЧЕНИЯ ИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

[1]*Российский университет транспорта, г. Москва, Россия*
[2]*Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия*

Аннотация. В настоящей работе исследуется деформированное состояние изотропного стержня из идеального жесткопластического материала, в предположении, что стержень закручивается вокруг своей оси. Кручение изотропных и анизотропных идеально пластических стержней рассмотрено в работах [1–5]. В работах [6–9] исследовано кручение стержней, находящихся под действием линейного давления

Ключевые слова: пластичность, стержень, кручение, анизотропия, деформация, напряжение, ассоциированный закон течения, изотропия.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.002

УДК: 539.374

Рассмотрим изотропный стержень из идеально пластического материала кругового сечения радиуса R, ориентированный в цилиндрической системе координат $\rho\theta z$ причем ось z является осью стержня. Стержень закручивается вокруг своей оси противоположными и равными парами сил. При этом боковая поверхность стержня предполагается свободной от нагрузок.

Кручение изотропных и анизотропных идеально пластических стержней рассмотрено в работах [1–5]. В работах [6–9] исследовано кручение стержней, находящихся под действием линейного давления.

Пусть напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + \tau_{\rho\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho z}^2 = k^2. \ (k - \mathrm{const}) \qquad (1)$$

Миронов Борис Гурьевич
`e-mail:` mbg.chspu@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.
Миронов Юрий Борисович
`e-mail:` i.b.mironov@mtuci.ru, кандидат технических наук, декан, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 10.01.2023

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0,\\
\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho}=0,\\
\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Предположим

$$
\begin{gathered}
\sigma_\rho=\sigma_\theta=\sigma_z=-\lambda z+\mu,\ (\lambda,\,\mu-const,\,\lambda>0)\\
\tau_{\rho\theta}=0,\tau_{\rho z}=\tau_{\rho z}\left(\rho,\,\theta\right),\,\tau_{\theta z}=\tau_{\theta z}\left(\rho,\,\theta\right).
\end{gathered} \tag{3}
$$

Согласно (3) из (1) и (2) следует

$$
\tau_{\theta z}^2+\tau_{\rho z}^2=k^2, \tag{4}
$$

$$
\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=\lambda \tag{5}
$$

$$
\tau_{\rho z}\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\theta}+\tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}=0. \tag{6}
$$

Умножим соотношение (5) на $\rho\tau_{\theta z}$

$$
\rho\tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}=(\lambda\rho-\tau_{\rho z})\tau_{\theta z} \tag{7}
$$

Тогда из (6) и (7) получим

$$
\rho\tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}-\tau_{\rho z}\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\theta}=(\lambda\rho-\tau_{\rho z})\tau_{\theta z}. \tag{8}
$$

Характеристики и соотношения вдоль характеристик уравнения (8) определяются из следующих соотношений

$$
\frac{d\rho}{\rho\tau_{\theta z}}=-\frac{d\theta}{\tau_{\rho z}}=\frac{d\tau_{\rho z}}{(\lambda\rho-\tau_{\rho z})\tau_{\theta z}}. \tag{9}
$$

Из системы (9) имеем следующее уравнение для определения компоненты $\tau_{\rho z}$ напряжения

$$
\frac{d\tau_{\rho z}}{d\rho}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=\lambda. \tag{10}
$$

Тогда из (10) находим компоненту $\tau_{\rho z}$

$$
\tau_{\rho z}=\frac{\lambda\rho^2+c_1}{2\rho} \tag{11}
$$

где $c_1=const$ вдоль характеристики.

Учитывая, что на контуре поперечного сечения стержня вектор касательного напряжения $\tau=(\tau_{\rho z},\,\tau_{\theta z})$ направлен по касательной к нему, при $\rho=R$ имеем $\tau_{\rho z}=0$. Отсюда следует

$$
\tau_{\rho z}=\frac{\lambda(\rho^2-R^2)}{2\rho} \tag{12}
$$

Согласно (4), из (12) получим

$$
\tau_{\theta z}=\sqrt{k^2-\frac{\lambda^2}{4\rho^2}(\rho^2-R^2)^2}. \tag{13}
$$

С учетом (12) и (13) из (9) получим следующее уравнение характеристики

$$\theta = \theta_0 - \int\limits_R^\rho \frac{\lambda(\rho^2 - R^2)d\rho}{\rho\sqrt{4\rho^2k^2 - \lambda^2(\rho^2 - R^2)^2}}, \tag{14}$$

где точка $M_0(R, \theta_0)$ принадлежит контуру поперечного сечения стержня. В соответствии с [5] характеристики (14) есть окружности радиуса $\frac{k}{\lambda}$ ортогональные контуру поперечного сечения стержня, причем центры этих окружностей лежат на касательных к контуру. Огибающая семейства характеристик (14) есть окружность с центром в начале координат и радиуса

$$r = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 R^2} - 1}{\lambda} \tag{15}$$

Деформированное состояние стержня определяется из соотношений ассоциированного закона пластического течения. С учетом (3) и (4) они имеют вид

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \varepsilon_{\rho\theta} = 0,\ \tau_{\rho z}\varepsilon_{\theta z} = \tau_{\theta z}\varepsilon_{\rho z} \tag{16}$$

где ε_ρ, ε_θ, ε_z, $\varepsilon_{\rho\theta}$, $\varepsilon_{\theta z}$, $\varepsilon_{\rho z}$ – компоненты скоростей деформации.

Интегрируя соотношения (16), и, учитывая, что в начальный момент деформирования все компоненты деформации равны нулю, имеем

$$e_\rho = e_\theta = e_z = e_{\rho\theta} = 0,\ \tau_{\rho z}\mathrm{e}_{\theta z} = \tau_{\theta z}e_{\rho z} \tag{17}$$

где e_ρ, e_θ, e_z, $e_{\rho\theta}$, $e_{\theta z}$, $e_{\rho z}$ – компоненты деформации.

Рассмотрим соотношения между компонентами деформации e_ρ, e_θ, e_z, $e_{\rho\theta}$, $e_{\theta z}$, $e_{\rho z}$ и компонентами перемещений u, v, w

$$e_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho},\ e_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ e_z = \frac{\partial w}{\partial z},\ e_{\rho\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \tag{18}$$

$$e_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right),\ e_{\rho z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right) \tag{19}$$

Из (17) и (18) следует

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0,\ \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\ \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0. \tag{20}$$

Положим

$$u = 0,\ v = \xi\rho z \tag{21}$$

где $\xi = const$ Тем самым удовлетворяются соотношения (20).

Из (19) с учетом (21) следует

$$\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial e_{\rho z}}{\partial \theta} = \xi - \frac{e_{\theta z}}{\rho} \tag{22}$$

Продифференцируем последнее соотношение из (17) по переменной θ. Согласно (13) и (14) получим

$$\tau_{\rho z}\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \theta} - \tau_{\theta z}\frac{\partial e_{\rho z}}{\partial \theta} = 0. \tag{23}$$

Умножив уравнение (22) на $\rho\tau_{\theta z}$, и, вычитая из полученного соотношения соотношение (23), имеем

$$\rho\tau_{\theta z}\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho} - \tau_{\rho z}\frac{\partial e_{\rho z}}{\partial \theta} = \xi\rho\tau_{\theta z} - \tau_{\theta z}e_{\theta z} \tag{24}$$

Система уравнений для определения характеристик соотношения (24) имеет вид

$$\frac{d\rho}{\rho\tau_{\theta z}} = -\frac{d\theta}{\tau_{\rho z}} = \frac{d\tau_{\rho z}}{(\xi\rho - e_{\rho z})\tau_{\theta z}}. \tag{25}$$

Из (25) следует, что характеристики соотношений (8) и (24) совпадают. Также из системы (25) имеем следующее уравнение для определения компоненты деформации $\mathrm{e}_{\theta z}$ вдоль характеристик соотношения (24)

$$\frac{d\mathrm{e}_{\theta z}}{d\rho} + \frac{\mathrm{e}_{\theta z}}{\rho} = \xi. \tag{26}$$

Согласно (26) находим компоненту $\mathrm{e}_{\theta z}$

$$e_{\theta z} = \frac{\xi\rho^2 + c_2}{2\rho} \tag{27}$$

где $c_2 = const$ вдоль характеристики.

Согласно (12), (13) и (27) из (17) находим компоненту деформации $\mathrm{e}_{\rho z}$ вдоль характеристик соотношения (24)

$$\mathrm{e}_{\rho z} = \frac{\frac{\lambda(\rho^2 - R^2)}{2\rho}}{\sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2}{4\rho^2}(\rho^2 - R^2)^2}} \frac{\xi\rho^2 + c_2}{2\rho} \tag{28}$$

Рассматривая огибающую характеристик как предельное положение жесткого слоя, можно положить на ней компоненты деформации равными нулю. Тогда получим

$$e_{\theta z} = \frac{\xi(\rho^2 - r^2)}{2\rho},\ e_{\rho z} = \frac{\lambda\xi(\rho^2 - R^2)(\rho^2 - r^2)}{4\rho^2\sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2}{4\rho^2}(\rho^2 - R^2)^2}} \tag{29}$$

Таким образом, мы полностью определили деформированное состояние стержня.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. с. 608.

[2] Прагер В., Ходж Г. Ф. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. с. 398.

[3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. с. 232.

[4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. К вопросу о кручении анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. Т. 1, № 23. с. 196–199.

[5] Миронов Б. Г., Тихонов С. В. Об одном виде анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. Т. 1, № 11. с. 36–38.

[6] Козлова Л. С., Миронов Б. Г. Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Известия Российской академии наук. 2014. № 3. с. 107–113.

[7] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. Т. 3, № 21. с. 105–111.

[8] Козлова Л. С., Миронов Б. Г. Предельное состояние призматических стержней, находящихся под давлением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2009. № 63. с. 3–4.

[9] Миронов Б. Г. О кручении призматических, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2006. № 1. с. 98.

B. G. Mironov[1], *Yu. B. Mironov*[2]

ON THE DETERMINATION OF THE STRAIN COMPONENTS IN THE CASE OF TORSION OF ISOTROPIC RODS UNDER EXTERNAL PRESSURE

[1]*Russian University of transport, Moscow, Russia*
[2]*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. In this paper, we study the deformed state of an isotropic rod made of an ideal rigid-plastic material, assuming that the rod is twisted around its axis. The torsion of isotropic and anisotropic ideally plastic rods was considered in [1–5]. In [6–9], the torsion of rods under the action of linear pressure.

Keywords: plasticity, rod, torsion, anisotropy, deformation, stress, associated flow law, isotropy.

REFERENCES

[1] Sokolovsky V. V. Theory of plasticity. M.: high school, 1969. p. 608.
[2] Prager V., Hodge G. F. Theory of Ideally Plastic Solids. M.: IL, 1956. p. 398.
[3] Ivlev D. D. Theory of Ideal Plasticity. M.: Science, 1966. p. 232.
[4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. To the question of torsion of anisotropic rods // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2015. Vol. 1, no. 23. p. 196–199.
[5] Kozlova L. S., Mironov B. G. Torsion of prismatic rods under the action of pressure changing linearly along the generatrix // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. 2014. no. 3. p. 107–113.
[6] Derevyannykh E. A., Mironov B. G. On the issue of torsion of inhomogeneous prismatic rods // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2014. Vol. 3, no. 21. p. 105–111.
[7] Mironov B. G., Tikhonov S. V. About one kind of anisotropy in torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2012. Vol. 1, no. 11. p. 36–38.
[8] Kozlova L. S., Mironov B. G. Limit State of Pressurized Prismatic Bars // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovleva. 2009. no. 63. p. 3–4.
[9] Mironov B. G. On the torsion of prismatic objects under the influence of pressure that changes linearly along the generatrix // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2006. no. 1. p. 98.

Mironov Boris Gurjevich , Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.
Mironov Yuri Borisovich , Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.