Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 52–62

В. Н. Орлов, А. М. Барзини

ВОЗМУЩЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе представлено продолжение ранее полученных авторских результатов. Доказано влияние возмущения исходных данных на аналитическое приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений. Представлены результаты численного эксперимента, подтверждающие теоретические результаты, а также дан вариант оптимизации априорных оценок с помощью апостериорных. Представленные результаты являются завершающим этапом обоснования аналитического приближенного метода решения для дифференциальных уравнений, в общем случае не разрешимых в квадратурах.

Ключевые слова: погрешность исходных данных, аналитическое решение, нелинейное уравнение дифференциальное, априорная и апостериорная оценки.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.007

УДК: 517.928.4

1. Введение Отметим применение нелинейных дифференциальных уравнений в: гидродинамике [1]; в изучении устойчивости установившегося свободного падения авторотирующего тела в среде с сопротивлением [2]; в задачах физики при определении времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины [3]; в механике строительных конструкций [4]; в механике [5, 6]; в расчетах конструкций атомных реакторов [7]; в исследовании нелинейной диффузии [8]. Как показывает обзор работы [9], ее авторы проводят исследования колебаний в эластичной балке с помощью математической модели на основе дифференциального уравнения

$$u'''(t) + f(t, u(t)) = 0 \tag{1}$$

Орлов Виктор Николаевич
e-mail: orlovvn@mgsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия,
Барзини Александр Минчев
e-mail: zettinks@yandex.ru, магистрант второго курса Института цифровых технологий и моделирования в строительстве, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 11.02.2023

с краевыми условиями (2)

$$0 \le t \le 1, u(0) = u'(0) = u'(1) = 0 \quad . \tag{2}$$

Неявный вид функции$f(t, u(t))$ в уравнении (1) может иметь как линейную, так и нелинейную структуру относительно искомой функции. В первом случае решение задачи (1)-(2) не вызывает сложностей в ее решении, нет веских аргументов для отклонения классических методов решения поставленной задачи. Во втором случае функция$f(t, u(t))$будет нелинейной относительно искомой функции и поэтому возникают сложности. Одним из аспектов нелинейности дифференциального уравнения является подвижная особая точка. Поэтому для получения решения задачи (1)-(2) требуется обоснование отсутствия подвижных особых точек в рассматриваемой области, а предлагаемый метод верхних и нижних границ этого не гарантирует. Отметим, что на данный момент существуют два варианта решения нелинейных дифференциальных уравнений. К первому случаю относят ситуацию, когда с помощью специфической замены переменной удается разрешить нелинейное дифференциальное уравнение в квадратурах [10–16]. Во втором случае применяется аналитический приближенный метод решения [17–21]. В статье [22] рассматривается вариант решения дифференциального уравнения (1) в вещественной области. В данной работе представлено завершение исследований работы [22], решение математической задачи: доказательство зависимости аналитического приближенного решения рассматриваемой задачи Коши от погрешности исходных данных. В случае когда неявная функция $f(t, u(t))$ имеет полиномиальную структуру шестой степени относительно искомой функции и уравнение (1) принимает вид

$$y''' = a_0(x) \cdot y^6 + a_1(x) \cdot y^5 + a_2(x) \cdot y^4 + a_3(x) \cdot y^3 + a_4(x) \cdot y^2 + a_5(x) \cdot y^1 + a_6(x). \tag{3}$$

Учитывая новую замену переменных

$$y = \sqrt[5]{\frac{1}{a_0}} \cdot g(x) - \frac{a_1(x)}{6 \cdot a_0}, \tag{4}$$

приводим уравнение (3) к нормальной форме

$$g''' = g^6 + (r(x)), \tag{5}$$

при выполнении условий:

$$\begin{cases} a_0(x) = a_0 = const \neq 0, \\ a_2(x) = \frac{5a_1^2(x)}{4a_0}, a_3(x) = \frac{-55a_1^3(x)}{54a_0^2}, a_4(x) = \frac{145a_1^4(x)}{432a_0^3}, a_5(x) = -\frac{624a_1^5(x)+870a_0a_1^4}{1296a_0^4}, \\ r(x) = \frac{a_1'''(x)}{6 \cdot a_0} + \frac{4439a_1^6(x)}{46656a_0^5} + \frac{870a_1^5(x)}{7776a_0^4} + a_6. \end{cases} \tag{6}$$

Указанная замена переменной значительно расширяет класс, рассматриваемых нелинейных дифференциальных уравнений в работе [22]. Приведем работы [4, 17–21], где используемый математический аппарат успешно реализован для нелинейных дифференциальных уравнений в вещественной и комплексной областях.

2. Результаты исследования

Рассматривается задача Коши

$$y''' = y^6 + r(x), \tag{7}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \tag{8}$$

В работе [22] доказано существование и единственность решения задачи (7)-(8) и получена структура приближенного решения в виде

$$y_N(x) = \sum_0^N C_n(x-x_0)^n. \tag{9}$$

Так как исходные данные имеют возмущения, то (8) и (9) принимает вид

$$\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0, \tilde{y'}(x_0) = \tilde{y}_1, \tilde{y''}(x_0) = \tilde{y}_2, \tag{10}$$

$$\tilde{y}_N(x) = \sum_0^N \tilde{C}_n(x-x_0)^n. \tag{11}$$

Теорема. При выполнении условий:
1) $r(x) \in C^\infty$ в области $|x-x_0| < \rho_1$ где $\rho < 0 = const$;
2) $\exists M_n \frac{|r^n(x_0)|}{n!} \leq M_n; M_n = const, n \in \mathrm{N}$.
приближенное решение (11) задачи (7), (10) имеет оценку погрешности

$$\Delta\tilde{y}(x) \leq \Delta_1 + \Delta_2,$$

где Δ_0, Δ_1 будут соответственно равны:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^6 \left|x-x_0\right|^3}{1-(\Delta M+M+1)^5 \left|x-x_0\right|^3} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{|x-x_0|}{24} + \frac{|x-x_0|^2}{60}\right),$$

$$\Delta_2 = \frac{(M+1)^{\frac{5N+8}{3}} \left|x-x_0\right|^{N+3}}{1-(M+1)^5 \left|x-x_0\right|^3} \left(\frac{1}{(N+1)N(N-1)} + \frac{|x-x_0|}{(N+1)(N+2)N} + \right.$$
$$\left. + \frac{|x-x_0|^2}{N(N+2)(N+3)}\right).$$

При этом

$$\rho_2 = \min\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+\Delta M+1)^5}}\}, \quad M = \max\{|\tilde{y}_0|, |\tilde{y}_1|, |\tilde{y}_2|, \sup\frac{|r^n(x_0)|}{n!}\},$$
$$n = 0,1,2,..., \quad \Delta M = \max\{\Delta\tilde{y}_0, \Delta\tilde{y}_1, \Delta\tilde{y}_2\}.$$

Доказательство:

$$\Delta\tilde{y}_N(x) = |y(x) - \tilde{y}_N(x)| \leq |y(x) - \tilde{y}(x)| + |\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)| = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Рассмотрим выражение

$$\Delta_2 = |\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^\infty \tilde{C}_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^N \tilde{C}_n(x-x_0)^n\right| =$$
$$= \left|\sum_{n=N+1}^\infty \tilde{C}_n(x-x_0)^n\right|.$$

Переходим к оценке Δ_2. Учитывая оценки для коэффициентов C_n в работе [22] :

$$|C_{3k}| \leq \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k-1)(3k-2)}, |C_{3k+1}| \leq \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)}, \tag{12}$$
$$|C_{3k+2}| \leq \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)},$$

для Δ_2 получаем, в случае N+1=3k:

$$\Delta_2 = \left|\sum_{N+1}^{\infty} C_n(x-x_0)^n\right| = \Big|C_{3k}(x-x_0)^{3k} + C_{3k+1}(x-x_0)^{3k+1} + C_{3k+2}(x-x_0)^{3k+2} +$$

$$+C_{3k+3}(x-x_0)^{3k+3} + C_{3k}(x-x_0)^{3k+4} + C_{3k+1}(x-x_0)^{3k+5} + ...| =$$

$$= \Big|(C_{3k}(x-x_0)^{3k} + C_{3k+3}(x-x_0)^{3k+3} + C_{3k+6}(x-x_0)^{3k+6} + ...) +$$

$$+(C_{3k+1}(x-x_0)^{3k+1} + C_{3k+4}(x-x_0)^{3k+4k} + C_{3k}(x-x_0)^{3k+7} + ...)+$$

$$+(C_{3k+2}(x-x_0)^{3k+2} + C_{3k+5}(x-x_0)^{3k+5} + C_{3k+8}(x-x_0)^{3k+8} + ...)\Big|.$$

Подставляя в последнее выражение в место коэффициентов C_n соответствующие оценки (12), получаем

$$\Delta_2 \le \left(\frac{(M+1)^{5k+1}\left|x-x_0\right|^{3k}}{3k(3k-1)(3k-2)} + \frac{(M+1)^{5k+6}\left|x-x_0\right|^{3k+3}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} + \frac{(M+1)^{5k+1}\left|x-x_0\right|^{3k+6}}{(3k+5)(3k+4)(3k+3)} + ...\right) +$$

$$+\left(\frac{(M+1)^{5k+6}\left|x-x_0\right|^{3k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)} + \frac{(M+1)^{5k+6}\left|x-x_0\right|^{3k+4}}{(3k+3)(3k+4)(3k+2)} + \frac{(M+1)^{5k+11}\left|x-x_0\right|^{3k+7}}{(3k+5)(3k+6)(3k+7)} + ...\right) +$$

$$+\left(\frac{(M+1)^{5k+11}\left|x-x_0\right|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+2)} + \frac{(M+1)^{5k+6}\left|x-x_0\right|^{3k+5}}{(3k+3)(3k+4)(3k+5)} + \frac{(M+1)^{5k+11}\left|x-x_0\right|^{3k+8}}{(3k+6)(3k+7)(3k+8)} + ...\right) \le$$

$$\le \frac{(M+1)^{5k+1}\left|x-x_0\right|^{3k}}{(3k+6)(3k+7)(3k+5)}\left(1 + \frac{(M+1)^{5}\left|x-x_0\right|^{3}}{1} + \frac{(M+1)^{10}\left|x-x_0\right|^{6}}{1} + ...\right) +$$

$$+\frac{(M+1)^{5k+6}\left|x-x_0\right|^{3k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)}\left(1 + (M+1)^{5}\left|x-x_0\right|^{3} + (M+1)^{10}\left|x-x_0\right|^{6} + ...\right) +$$

$$+\frac{(M+1)^{5k+11}\left|x-x_0\right|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+2)}\left(1 + (M+1)^{5}\left|x-x_0\right|^{3} + (M+1)^{10}\left|x-x_0\right|^{6} + ...\right) =$$

$$= \frac{(M+1)^{5k+1}\left|x-x_0\right|^{3k}}{1-(M+1)^{5}\left|x-x_0\right|^{3}}\left(\frac{1}{3k(3k-1)(3k-2)} + \frac{(M+1)^{5}\left|x-x_0\right|}{3k(3k+1)(3k-1)} + \frac{(M+1)^{10}\left|x-x_0\right|^{2}}{3k(3k+1)(3k+2)}\right).$$

Учитывая связь индексов $N+1=3k$, получаем выражение оценки для Δ_2 через индекс N:

$$\Delta_2 \le \frac{(M+1)^{\frac{5}{3}(N+1)}\left|x-x_0\right|^{N+1}}{1-(M+1)^{5}\left|x-x_0\right|^{3}}\left(\frac{1}{(N+1)3N(N-1)} + \frac{\left|x-x_0\right|}{(N+1)(N+2)N} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left|x-x_0\right|^{2}}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right).$$

Оценка для выражение Δ_2 получена для аргумента xв области

$$|x-x_0| < \frac{1}{(M+1)^{3/5}}.$$

Переходим к оценке Δ_1:

$$\Delta_1 = \left|y\left(x\right) - \tilde{y}\left(x\right)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(x-x_0)^n\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \Delta\tilde{\mathrm{C}}_n(x-x_0)^n\right|.$$

Предварительно получим оценку для $\Delta\tilde{C}_n$. Предположим для $\Delta\tilde{C}_n$ гипотезу:

$$\Delta\tilde{C}_{3k} \le \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{5k+1}}{3k(3k-1)(3k-2)}, \Delta\tilde{C}_{3k+1} \le \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)}, \tag{13}$$

$$\Delta\tilde{C}_{3k+2} \le \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)}.$$

Докажем ее для случая $\Delta\tilde{C}_{3k+3}$.

$$\Delta\tilde{C}_{3k+3} \le \left|C_{3k+3}-\tilde{C}_{3k+3}\right| \le \left|\frac{C^{***}_{3k}+B_{3k}}{3k(3k+2)(3k+1)} - \frac{\tilde{C}^{***}_{3k}+B_{3k}}{3k(3k+2)(3k+1)}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{3k(3k+2)(3k+1)} \times \left|C^{***}_{3k}-\tilde{C}^{***}_{3k}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{3k(3k+2)(3k+1)} \left|\sum_{i=0}^{3k+3} C^{*}_{i}C^{**}_{3k-i} - \sum_{i=0}^{3k+3} \tilde{C}^{*}_{i}\tilde{C}^{**}_{3k-i}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{3k(3k+2)(3k+1)} \left|\sum_{i=0}^{3k+3}\left(\sum_{j=0}^{i} C_jC_{i-j}\right)\left(\sum_{l=0}^{3k-i} C^{*}_{l}C^{*}_{3k-i-l}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{3k+3}\left(\sum_{j=0}^{i} \tilde{C}_j\tilde{C}_{i-j}\right)\left(\sum_{l=0}^{3k-i-j} \tilde{C}^{*}_{l}\tilde{C}^{*}_{3k-i-j-l}\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{3k(3k+2)(3k+1)} \left|\sum_{i=0}^{3k+3}\left(\sum_{j=0}^{i} C_jC_{i-j}\right)\left(\sum_{l=0}^{3k-i} (\sum_{n=0}^{l} C_nC_{l-n})\left(\sum_{m=0}^{3k-i-l} C_mC_{3k-i-l-m}\right)\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{3k+3}\left(\sum_{j=0}^{i} \tilde{C}_j\tilde{C}_{i-j}\right)\left(\sum_{l=0}^{3k-i-j}\left(\sum_{n=0}^{l} \tilde{C}_n\tilde{C}_{l-n}\right)\left(\sum_{m=0}^{3k-i-j-l} \tilde{C}_m\tilde{C}_{3k-i-j-l-m}\right)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{3k(3k+2)(3k+1)} \left|\sum_{i=0}^{3k+3}\left(\sum_{j=0}^{i} (\tilde{C}_j+\Delta\tilde{C}_j\right)\left(\tilde{C}_{i-j}+\Delta\tilde{C}_{i-j}\right)) \times \right.$$

$$\times \left(\sum_{l=0}^{3k-li}\left(\sum_{n=0}^{l}\left(\tilde{C}_n+\Delta\tilde{C}_n\right)\right)\left(\tilde{C}_{l-n}+\Delta\tilde{C}_{l-n}\right) \times\right.$$

$$\times \left(\sum_{m=0}^{3k-i-l} (\tilde{C}_m+\Delta\tilde{C}_m)\right)(\tilde{C}_{3k-i-l-m}+\Delta\tilde{C}_{3k-i-l-m})) -$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{3k+3}\left(\sum_{j=0}^{i} \tilde{C}_j\tilde{C}_{i-j}\right)\left(\sum_{l=0}^{3k-i-j}\left(\sum_{n=0}^{l} \tilde{C}_n\tilde{C}_{l-n}\right)\left(\sum_{m=0}^{3k-i-j-l} \tilde{C}_m\tilde{C}_{3k-i-j-l-m}\right)\right)\right|.$$

В последнее выражение подставляем вместо $\tilde{C}_n$ и $\Delta\tilde{C}_n$ соответствующие оценки (12) и (13). После ряда преобразований получаем:

$$\Delta\tilde{C}_{3k+3} \le \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{5k+1}}{(3k+3)(3k+1)(3k+2)} \le \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{5k+6}}{(3k+3)(3k+1)(3k+2)}.$$

Тогда для Δ_2 получаем оценку

$$\Delta_2 \leq \left(\frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k}}{3k(3k-1)(3k-2)} + \frac{(M+1)^{5k+6} |x-x_0|^{3k+3}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} + \frac{(M+1)^{5k+11} |x-x_0|^{3k+6}}{(3k+5)(3k+4)(3k+3)} + \ldots \right) +$$

$$\left(\frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)} + \frac{(M+1)^{5k+6} |x-x_0|^{3k+4}}{(3k+3)(3k+4)(3k+2)} + \frac{(M+1)^{5k+11} |x-x_0|^{3k+7}}{(3k+5)(3k+6)(3k+7)} + \ldots \right) +$$

$$\left(\frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+2)} + \frac{(M+1)^{5k+6} |x-x_0|^{3k+5}}{(3k+3)(3k+4)(3k+5)} + \frac{(M+1)^{5k+11} |x-x_0|^{3k+8}}{(3k+6)(3k+7)(3k+8)} + \ldots \right) \leq$$

$$\leq \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k}}{(3k)(3k-1)(3k-2)} \left(1 + \frac{(M+1)^5 |x-x_0|^3}{1} + \frac{(M+1)^{10} |x-x_0|^6}{1} + \ldots \right) +$$

$$+ \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)} \left(1 + (M+1)^5 |x-x_0|^3 + (M+1)^{10} |x-x_0|^6 + \ldots \right) +$$

$$+ \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+1)} \left(1 + (M+1)^5 |x-x_0|^3 + (M+1)^{10} |x-x_0|^6 + \ldots \right) \leq$$

$$\leq \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k}}{3k(3k-1)(3k-2)} \left(\frac{1}{1-(M+1)^5 |x-x_0|^3} \right) +$$

$$+ \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)} \left(\frac{1}{1-(M+1)^5 |x-x_0|^3} \right) +$$

$$+ \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+2)} \left(\frac{1}{1-(M+1)^5 |x-x_0|^3} \right) = \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k}}{1-(M+1)^5 |x-x_0|^3} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{3k(3k-1)(3k-2)} + \frac{|x-x_0|}{3k(3k+1)(3k-1)} + \frac{|x-x_0|^2}{3k(3k+1)(3k+2)} \right) \leq$$

$$\leq \frac{(M+1)^{\frac{5N+8}{3}} |x-x_0|^{N+3}}{1-(M+1)^5 |x-x_0|^3} \left(\frac{1}{(N+1)N(N-1)} + \frac{|x-x_0|}{(N+1)(N+2)N} + \frac{|x-x_0|^2}{N(N+2)(N+3)} \right).$$

Таким образом для Δ_2 получаем оценку

$$\Delta_2 \leq \frac{(M+1)^{\frac{5N+8}{3}} |x-x_0|^{N+3}}{1-(M+1)^5 |x-x_0|^3} \left(\frac{1}{(N+1)N(N-1)} + \frac{|x-x_0|}{(N+1)(N+2)N} + \frac{|x-x_0|^2}{N(N+2)(N+3)} \right).$$

Переходим к оценке Δ_1:

Подставляя в выражение для Δ_1 вместо $\Delta\tilde{C}_n$ полученные оценки (13), будем иметь

$$\Delta_1 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n (x-x_0)^n \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta M (M+\Delta M+1)^{5k+1}}{3k(3k-1)(3k-2)} (x-x_0)^{3k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta M (M+\Delta M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)} (x-x_0)^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta M (M+\Delta M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)} (x-x_0)^{3k+2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{6} \Delta M (M+\Delta M+1)^6 |x-x_0|^3 \frac{1}{1-(M+\Delta M+1)^5 |x-x_0|^3} +$$

$$+ \frac{1}{24} \Delta M (M+\Delta M+1)^6 |x-x_0|^3 \frac{1}{1-(M+\Delta M+1)^5 |x-x_0|^3} +$$

$$+\frac{1}{60}\Delta M\left(M+\Delta M+1\right)^{6}\left|x-x_{0}\right|^{3}\frac{1}{1-\left(M+\Delta M+1\right)^{5}\left|x-x_{0}\right|^{3}}.$$

Или

$$\Delta_1 \le \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^6\left|x-x_0\right|^3}{1-(\Delta M+M+1)^5\left|x-x_0\right|^3}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{\left|x-x_0\right|}{24}+\frac{\left|x-x_0\right|^2}{60}\right).$$

Следовательно

$$\Delta\tilde{y}_N\left(x\right)=\Delta_1+\Delta_2\le\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^6\left|x-x_0\right|^3}{1-\left(\Delta M+M+1\right)^5\left|x-x_0\right|^3}\left(\frac{1}{6}+\frac{\left|x-x_0\right|}{24}+\frac{\left|x-x_0\right|^2}{60}\right)+$$

$$+\frac{\left(M+1\right)^{\frac{5N+8}{3}}\left|x-x_0\right|^{N+3}}{1-\left(M+1\right)^5\left|x-x_0\right|^3}\left(\frac{1}{(N+1)N(N-1)}+\frac{\left|x-x_0\right|}{(N+1)(N+2)N}+\frac{\left|x-x_0\right|^2}{N(N+2)(N+3)}\right).$$

При получении оценки для Δ_1 получаем область сходимости соответствующих рядов

$$\left|x-x_0\right|\le\frac{1}{\sqrt[3]{(M+\Delta M+1)^5}}.$$

В аналогичной ситуации с оценкой для Δ_2получаем область $\left|x-x_0\right|\le\frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}$. Следовательно, оценка для выражения $\Delta\tilde{y}_N(x)$ справедлива в области

$$\rho_2=\min\{\rho_1,\frac{1}{\sqrt[3]{(M+\Delta M+1)^5}},\frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\}.$$

Таким образом, завершаем доказательство теоремы.

Доказанная теорема позволяет строить аналитическое продолжение решения задачи Коши (7), (10).

Пример. Рассмотрим задачу Коши (7), (10),

$$x_0=1.4;\tilde{y}(x_0)=\tilde{y}_0=1.403817;\ \tilde{y}'(x_0)=\tilde{y}_1=1.9210816;\tilde{y}''(x_0)=\tilde{y}_2=2.83595;r(x)=0.$$

$$\Delta\tilde{y}_0=0.0005;\Delta\tilde{y}_1=0.00001;\Delta\tilde{y}_2=0.00003;x_1=1.5.$$

По начальным данным $M=2,8359$, в структуре приближенного решения (11) имеет радиус

$$\rho_2=0,106405;\ \ x_0=1,4;\ \ \ x_1\in\left|x-x_0\right|<\rho_2.$$

Характеристики численного расчета рассматриваемого примера представлены в таблице 1.

x_1	$\tilde{y}_5(x_1)$	$\Delta\tilde{y}_5(x_1)$	Δ_3
1,5	1.62377	0.00189	0.0009

Таблица 1. Характеристики численного расчета

где, $\tilde{y}_5(x_1)$–приближенное решение; $\Delta\tilde{y}_5(x_1)$–априорная оценка; Δ_1- составляющая априорной оценки, показывает какую апостериорную оценку мы можем рассматривать. Если апостериорная оценка оказывается меньше погрешности исходных данных Δy_0, Δy_1, Δy_2, тогда следует уменьшить возмущение начальных данных, таким образом можем достичь точности предполагаемой апостериорной оценки. В нашей ситуации $\Delta_3 = 0.0009$. Следовательно, нет необходимости уменьшать величину погрешности исходных данных Δy_0, Δy_1, Δy_2. Для $\Delta_3 = 0.0009$ по теореме следует, что такую точность можем достичь при значении $N = 10$, для которого априорная оценка $\Delta\tilde{y}_5(x) \leq 0.000058$. Учтем, что с$N = 6$ по 10 слагаемые в общей сумме не превышают требуемой точности $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-4}$. Таким образом приближенное решение $\tilde{y}_5(x_1)$ имеет погрешность $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-4}$.

3. Заключение В статье завершено исследование приближенного решения рассматриваемой задачи Коши (7),(10) в области аналитичности. Получена зависимость аналитического приближенного решения от возмущения исходных данных, получена априорная оценка. Теоретические результаты сопровождены численными расчетами. С помощью апостериорной оценки существенно удается оптимизировать априорную оценку. Таким образом, при решении рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений можно осуществлять аналитическое продолжение решения в области аналитичности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дышко А. Л., Конюхова А. И., Суков Н. Б. О сингулярной задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в гидродинамике // Журнал вычислительной математике и математической физики. 2007. Т. 47, № 7. с. 1158–1178.

[2] Привалов В. А., Самсонов В. А. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // Изв. РАН. ПММ. 1994. Т. 58. с. 37–48.

[3] Самодуров А. А. Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины // Докл. АН БССР. 1985. № 1. с. 9–10.

[4] Orlov V. N., Kovalchuk O. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. p. 012127.

[5] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat. J. Solids Structures. 1977. Vol. 13. p. 93–104.

[6] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / Ed. by D. G. Wilson, A. Solomon, P. Boggs. New York: 1978. p. 129–145.

[7] Axford R. A. The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization. 1974.

[8] Axford R. A. Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // // Los Alamos Report. LA, 1970. Vol. 4514. p. – 34.

[9] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.

[10] Conte R., Musette M. The Painlevé Handbook. 3300 AA Dordrecht, The Netherlands.2008: Published by Springer Science+Business Media B.V. P.O. Box17.

[11] Filipuk G., Chichurin A. The Properties of Certain Linear and Nonlinear Differential Equations // Advances in Mechanics and Mathematics. 2019. Vol. 41. p. 193–200.

[12] Chichurin A., Shvychkina H. Computer simulation of two chemostat models for one nutrient resource // Mathematical Biosciences. 2016. Vol. 278. p. 30–36.

[13] Evtushenko S. A Nonlinear System of Differential Equations in Supercritical Flow Spread Problem and Its Solution Technique // Axioms. 2023. URL: https://doi.org/10.3390/axioms12010011.

[14] Dukhnovskii S. A. Global existence theorems of a solution of the Cauchy problem for systems of the kinetic Carleman and Godunov–Sultangazin equations // Eurasian Math. J. 2021. Vol. 12, no. 1. p. 97–102.

[15] Dukhnovsky A. A self–similar solution and the tanh–function method for the kinetic Carleman system // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. 2022. no. 1. p. 99–110.

[16] Dukhnovsky S. A. New exact solutions for the time fractional Broadwell system // Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal. 2022. Vol. 15, no. 1. p. 53–66.

[17] Orlov V., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. Vol. 1425. p. 012129.
[18] Orlov V., Gasanov M. Analytic Approximate Solution in the Neighborhood of a Moving Singular Point of a Class of Nonlinear Equations // Axioms. 2022. Vol. 11. p. 637.
[19] Orlov V., Gasanov M. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // Mathematics. 2022. Vol. 10. p. 3984.
[20] Orlov V., Chichurin A. About Analytical Approximate Solutions of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // Fractal Fract. 2023. Vol. 7. p. 228.
[21] Orlov V., Gasanov M. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // Mathematics. 2022. Vol. 10. p. 3984.
[22] Орлов В. Н., Разакова Р. В. Приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка в области аналитичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1(43). с. 92–99.

V. N. Orlov, A. M. Barzini

PERTURBATION OF INITIAL DATA AND ANALYTICAL APPROXIMATE SOLUTION OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER IN THE REAL DOMAIN

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. The paper presents a continuation of the previously obtained author's results. The dependence of the analytical approximate solution of one class of nonlinear differential equations on the perturbation of the initial data is established. A numerical experiment was carried out, confirming the theoretical results, and a variant of optimizing a priori estimates using a posteriori ones was also given. The presented results are the final stage in the substantiation of an analytical approximate solution for nonlinear differential equations that are generally not solvable in quadratures.

Keywords: Perturbation of initial data, analytical approximate solution, nonlinear differential equation, a priori and a posteriori estimates.

REFERENCES

[1] Dyshko A. L., Konyukhova A. I., Sukov N. B. On a singular problem for a non-linear third-order ordinary differential equation arising in hydrodynamics // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47, no. 7. p. 1158–1178.
[2] Privalov V. A., Samsonov V. A. Comparison of stability properties of two autorotation modes // Izv. RAN. PMM. 1994. Vol. 58. p. 37–48.
[3] Samodurov A. A. A simple way to determine the delay time of a superradiant bosonic avalanche // Report. Academy of Sciences of the BSSR. 1985. no. 1. p. 9–10.
[4] Orlov V. N., Kovalchuk O. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. p. 012127.
[5] Hill J. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat. J. Solids Structures. 1977. Vol. 13. p. 93–104.
[6] Ockendon J. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / Ed. by D. Wilson, A. Solomon, P. Boggs. New York: 1978. p. 129–145.
[7] Axford R. The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization. 1974.
[8] Axford R. Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // // Los Alamos Report. LA, 1970. Vol. 4514. P. –34.
[9] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.
[10] Conte R., Musette M. The Painlevé Handbook. 3300 AA Dordrecht, The Netherlands.2008: Published by Springer Science+Business Media B.V. P.O. Box17.
[11] Filipuk G., Chichurin A. The Properties of Certain Linear and Nonlinear Differential Equations // Advances in Mechanics and Mathematics. 2019. Vol. 41. p. 193–200.
[12] Chichurin A., Shvychkina H. Computer simulation of two chemostat models for one nutrient resource // Mathematical Biosciences. 2016. Vol. 278. p. 30–36.
[13] Evtushenko S. A Nonlinear System of Differential Equations in Supercritical Flow Spread Problem and Its Solution Technique // Axioms. 2023. URL: https://doi.org/10.3390/axioms12010011.

Viktor Nikolaevich Orlov, Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Aleksandr Minchev Barzini, Undergraduate, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

[14] Dukhnovskii S. Global existence theorems of a solution of the Cauchy problem for systems of the kinetic Carleman and Godunov–Sultangazin equations // Eurasian Math. J. 2021. Vol. 12, no. 1. p. 97–102.

[15] Dukhnovsky A. A self–similar solution and the tanh–function method for the kinetic Carleman system // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. mold. Mat. 2022. no. 1. p. 99–110.

[16] Dukhnovsky S. New exact solutions for the time fractional Broadwell system // Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal. 2022. Vol. 15, no. 1. p. 53–66.

[17] Orlov V., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. Vol. 1425. p. 012129.

[18] Orlov V., Gasanov M. Analytic Approximate Solution in the Neighborhood of a Moving Singular Point of a Class of Nonlinear Equations // Axioms. 2022. Vol. 11. p. 637.

[19] Orlov V., Gasanov M. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // Mathematics. 2022. Vol. 10. p. 3984.

[20] Orlov V., Chichurin A. About Analytical Approximate Solutions of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // Fractal Fract. 2023. Vol. 7. p. 228.

[21] Orlov V., Gasanov M. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // Mathematics. 2022. Vol. 10. p. 3984.

[22] Orlov V. N., Razakova R. V. Approximate solution of one class of non-linear differential equations of the third order in the domain of analyticity // I. Ya Yakovlev Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of the limit state. 2020. no. 1(43). p. 92–99.