Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 63–68

Ю. В. Немировский

ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫЕ ФОРМЫ ИЗГИБАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛОСКИХ ОДНОРОДНЫХ И ГИБРИДНЫХ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН С ЧЕЧЕВИЦЕПОДОБНЫМИ ФОРМАМИ ЗАКРЕПЛЕННЫХ КОНТУРОВ

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. При использовании классических кинематических гипотез Кирхгофа рассмотрены задачи о предельно допустимых состояниях деформирования гибридных полиметаллических пластин в условиях квазистатического нагружения распределенным поперечным давлением. Рассматриваются пластинки с чечевидцеподобными формами закрепленного контура при их защемлениях и шарнирном опирании. Топология расположения фазовых материалов соответствует попарно-симметричным относительно срединной плоскости слоям постоянной толщины. Получено общее разрешающие системы дифференциальных уравнений для различных модификаций контуров и разработаны соответствующие процедуры численного и аналитического решения для двух основных допускаемых состояний предельного деформирования: 1 – предельно-упругого и 2 – состояни предразрушения при различных модификациях форм закрепления контура.

Ключевые слова: гибридные полиметаллические пластины с чечевидцеподобными закреплениями опорных контуров, основные физико-механические характеристики фазовых материалов: модули Юнга, пределы упругости, первая(предельно-упругая) деформация, вторая (деформация предразрушения), пределы прочности, нагрузки и предельно-допустимые перемещения при этих состояниях, критерии сравнения проектов с различными требованиями: вес, стоимость, допустимые нагрузки, максимально-допустимые деформации.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.008

УДК: 539.374

Немировский Юрий Владимирович
`e-mail:` nemiryury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Поступила 10.02.2023

1. Введение Введение. Исследование процессов изгибного деформирования плоских тонкостенных конструкций при воздействии на них внешних квазистатических и динамических нагрузок является одной из важнейших проблем механики твердого деформируемого тела, вызывающих повышенный интерес к новым разработкам в этом направлении. Оно тесно связано со стремлением ускоренного промышленно-технического развития в наиболее важных отраслях хозяйственной деятельности, нацеленных на развитие машиностроения, судостроения, авиа-космических отраслей и новейших отраслей строительной индустрии. Особо важную роль здесь имеют постоянно нарастающие требования к надежной эксплуатации создаваемых объектов в течение длительного времени с жесткими требованиями экономии материальных и экономических ресурсов. В течение последних десятилетий в России и ряде зарубежных стран разработаны промышленно-технологические цепочки создания устройств и изделий, отвечающих современным требованиям, предъявленным при их эксплуатации. В основном это касается плоских и криволинейных тонкостенных конструкций и опорных стержневых конструкций из различных конструктивных материалов и их композиций. Многообразные успешные технологичные разработки позволяют, в принципе, создавать конструкции различных геометрических форм как из однородных конструкционных материалов, так и из любых из композиций.

Разработка расчетных методов исследований деформированного состояния тонкостенных однородных и слоистых плоских конструкций получила успешные результаты, в основном, для прямоугольных, круглых и кольцевых пластин при различных законах распределения давления по поверхности для защемленных и шарнирно-опертых закреплений контуров. Получены также отдельные решения задач для треугольных, ромбовидных и эллиптических пластин, в рамках закономерностей линейно-упругого деформирования. Найти какие-либо решения задач изгибного деформирования пластин с чечевицеподобными контурами в научно-технической литературе не удалось, хотя по своим геометрическим особенностям различные модификации контура могут создавать существенно изменяющиеся поля деформационного изгиба пластины при одинаковых условиях нагружения в случае незначительных трансформаций контура.

Описание чечевицеобразного контура. Классический чечевицеобразный в декартовой плоской системе координат может быть определен как совокупность двух одинаковых парабол (рис. 1), развернутых выпуклостью вдоль оси параболы к началу координат на расстояние b^0(полуширина пояса) и пересекающихся в точках $x = \pm a^0$(рис. 2), где $2a^0$ - полная длина сечения. К классу чечевицеподобных контуров относим также контура с обрезанными вершинами на расстояниях $y = \pm y_0 < b_0$ (рис.3) или одновременно отрезанными поясами (рис. 4). При реализации каждого из вариантов отдельный соответствующий контур является односвязным, и полученное для него решение – решения задачи для пластины с соответствующим односвязным. Если же в рассматриваемой пластине, наряду с внешним односвязным контуром вследствие создания концентратора необходимо будет использовать один из перечисленных вариантов с чечевицеподобным контуром, то решение соответствующей задачи мы будем относить к решению задач с двухконтурными закрепленными контурами.

Однородные пластинки. Деформирование при поперечном изгибе распределенными нагрузками и закреплении контура. Пусть однородная (эталонная) пластинка чечевидной формы из материала с характеристиками ρ_0 (удельная плотность), E_0(модуль упругости), σ_0^0(предел упругости), σ_0^*(предел прочности) имеет параметры чечевидного контура на рис. 1 равные a_0^0 и b_0^0в декартовой системе координат x, y и ось Oz

направлена перпендикулярно к плоскости контура. Будем считать, что внешняя нагрузка, распределенная по пластинке является постоянной и толщина пластинки $2h_0$ одинакова вдоль всей пластины. В зависимости от уровня внешней нагрузки пластина может находиться в двух предельно допустимых состояниях: в предельно упругом, когда в наиболее напряженной точке будет достигнут предел упругости, и в предельном состоянии разрушения, когда в наиболее напряженной точке будет достигнут предел прочности материала рассматриваемой пластины. При этом в пластине могут развиваться различные подобласти упругих и неупругих состояний, которые требуют развития особых процедур численного решения. Мы здесь будем последовательно рассматривать возникающие ситуации и разрабатывать для их решения необходимые методы.

Однородные предельно упругие пластины в декартовой системе координат. Рассмотрим сначала тонкие однородные изотропные пластины. Справедливы кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява при поперечном изгибе. Связи деформаций $\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_{xy}$ и прогибов имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z\kappa_{xx} = -z\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= z\kappa_{yy} = -z\tfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy} &= \tfrac{1}{2}z\kappa_{xy} = -\tfrac{1}{2}z\tfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{aligned} \tag{1}$$

где w – прогиб пластины. Закон упругого деформирования имеет вид

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\varepsilon_{xx}+\nu\varepsilon_{yy}\right) = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left(\kappa_{xx}+\nu\kappa_{yy}\right)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left(\kappa_{yy}+\nu\kappa_{xx}\right)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left[(1-\nu)\,\kappa_{xy}\right]$$

Квадрат интенсивности напряжений на поверхности $z = h_0$ пластины

$$\sigma_u^2\big|_{z=h_0} = \left(\sigma_{xx}^2-\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\sigma_{yy}^2+3\sigma_{xy}^2\right)\big|_{z=h_0} = \left.\frac{E^2h_0^2}{(1-\nu^2)^2}\sigma_u^2\right|_{z=h_0}$$

Изгибающий и крутящий моменты в упругой пластинке равны

$$M_{xx} = \frac{2}{3}\frac{Eh_0^3}{(1-\nu^2)}\left(\kappa_x+\nu\kappa_y\right),$$

$$M_{yy} = \frac{2}{3}\frac{Eh_0^3}{(1-\nu^2)}\left(\kappa_y+\nu\kappa_x\right),$$

$$M_{xy} = \frac{2}{3}\frac{Eh_0^3}{(1-\nu^2)}\left(1-\nu\right)\kappa_{xy},$$

$$D_0 = \frac{2}{3}\frac{Eh_0^3}{(1-\nu^2)}$$

Пусть площадь, необходимая для защиты от внешних воздействий будет равна $S_0 = \alpha_0 a_0 b_0$, где a_0 и b_0 - параметры рассматриваемой пластинки с чечевидным контуром. Удельный объем используемой пластинки равен $V_0 = 2h_0 S_0$, а удельный вес равен $B_0 = \rho_0 V_0$, а стоимость собственно равна $C_0 = c_0\rho_0 B_0$ где c_0 – стоимость единичного объема используемого материала.

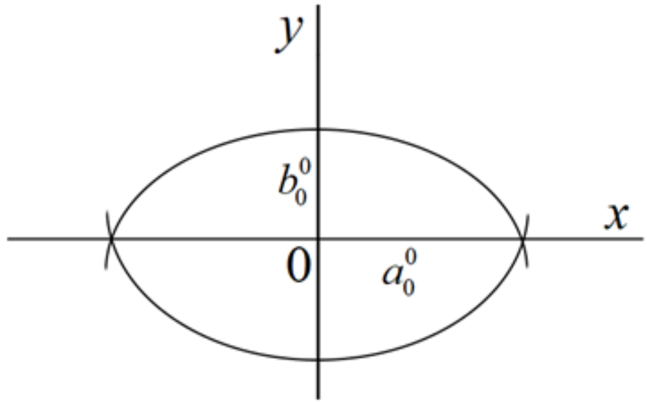

Рис. 1.

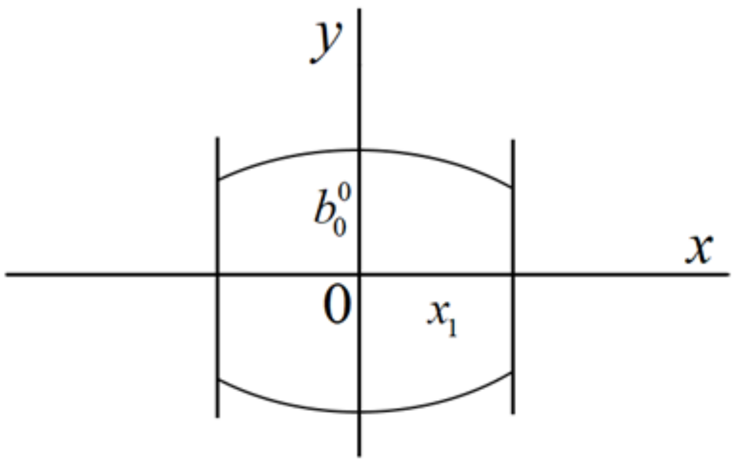

Рис. 2.

Полиметаллические слоистые тонкостенные пластины. При анализе слоистых тонкостенных пластин, ограничимся рассмотрением конструктивно-неоднородных полиметаллических n-слойных фазовых элементов с толщинами Δ_i $(i = 1, 2, ..., n)$, располагающихся попарно симметрично относительно отсчетной (нейтральной) поверхности $z = 0$ (рис. 4)

Все основные характеристики входящих в пакет слоистой пластины считаются известными, а паспортные диаграммы для каждого i-го фазового материала при испытаниях образцов на растяжение и сжатие. Полагаем также, что рассматриваемые слоистые пакеты конструкционных материалов деформируются без поперечных обжатий и взаимных сдвигов или отрывов начала нагружения пластинки и до разрушения.

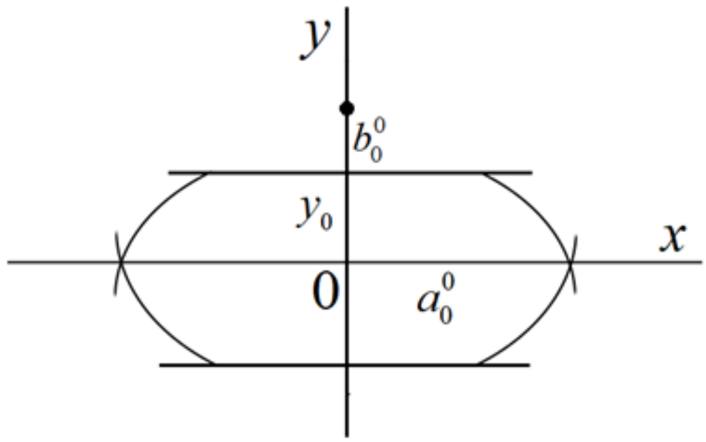

Рис. 3.

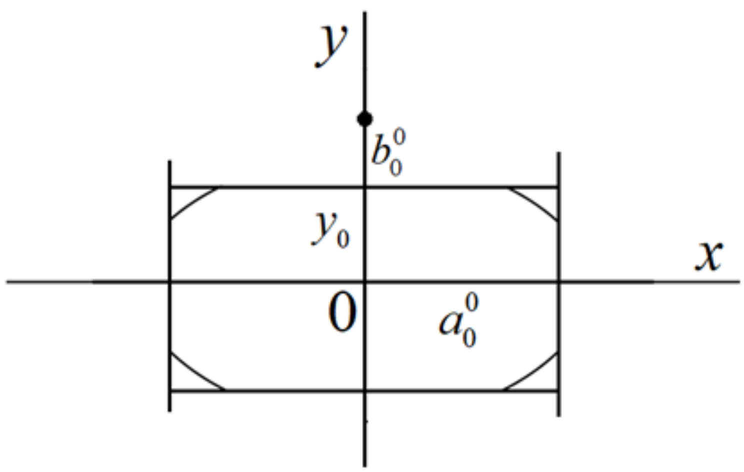

Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Жемочкин Б. Н. Теория упругости. М.: Гостройиздат, 1957. 257 с.
[2] Рудницын М. Н., Артемов П. Я., Любошиц М. И. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Под общ. ред. М.Н. Рудницына. Минск: Высшая школа, 1970. 630 с.
[3] Александров А. В., Потапов В. Д. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высшая школа, 1990. 398 с.
[4] Теребушко О. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Наука, 1984. 319 с.
[5] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37
[6] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

Yu. V. Nemirovskii

MAXIMUM PERMISSIBLE FORMS OF BENDING OF ISOTROPIC FLAT HOMOGENEOUS AND HYBRID POLYMETALLIC PLATES WITH LENTIL-SHAPED FIXED CONTOURS

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Abstract. Using the classical kinematic hypotheses of Kirchhoff, the problems of the maximum permissible states of deformation of hybrid polymetallic plates under conditions of quasi-static loading by distributed transverse pressure are considered. Plates with lenticular forms of a fixed contour are considered when they are pinched and hinged. The topology of the arrangement of phase materials corresponds to layers of constant thickness that are pairwise symmetrical with respect to the median plane. A general resolving system of differential equations for various modifications of contours has been obtained and the corresponding procedures for numerical and analytical solutions have been developed for two main permissible states of limiting deformation: 1 - limiting elastic and 2 - pre-fracture states with various modifications of the forms of fixing the contour.

Keywords: hybrid polymetallic plates with lenticular fastenings of support contours, the main physical and mechanical characteristics of phase materials: Young's moduli, elastic limits, first (ultimate elastic) deformation, second (pre-fracture deformation), strength limits, loads and maximum permissible displacements under these conditions, criteria for comparing projects with different requirements: weight, cost, allowable loads, maximum allowable deformations.

REFERENCES

[1] Vlasov W. Z. Thin-walled spatial systems. Moscow: Gosstroyizdat, 1958. 502 p.
[2] Koshur W. D., Nemirovsky Y. V. Continuous and discrete models of dynamic deformation structural elements. Novosibirsk: Nauka, 1990. 190 p.
[3] Nemirovsky Y. V. Nonlinear Deformation Prediction of Hybrid composite materials // Problems of non-linear mechanics of a deformable solid body. Proceedings of the second international conference. Kazan: Kazan State University, 2009.
[4] Nemirovsky Y. V. Dynamics of plastic laminated fibrous plates // Proceedings of the X All-Russian Conference on Mechanics deformable rigid body. Samara: Samara State Technical University, 2017. P. 106–110.
[5] Nemirovsky Y. V. Second limit state of polymetallic round and ring plates // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University them. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2015. no. 1(23). P. 189–195.
[6] Fletcher K. Numerical methods based on the Galerkin method. Mir: Moscow, 1988. 352 p.
[7] Vygodsky M. Y. Handbook of Higher Mathematics. Eighth edition. Nauka: Moscow, 1966. 870 p.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.