

Р. И. Непершин

ВДАВЛИВАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Аннотация. Приведено моделирование вдавливания эллиптического цилиндра в идеально пластическое полупространство при плоской деформации с учетом контактного трения численным интегрированием уравнений плоского пластического течения с контролем положительности диссипативной функции. Криволинейная свободная граница пластической области вычисляется из условия пластической несжимаемости в зависимости от глубины вдавливания. Моделирование удовлетворяет полной системе уравнений теории плоской деформации при условии пластичности Мизеса. Область применимости модели при увеличении глубины вдавливания ограничена вырождением централизованного веера линий скольжения при уменьшении кривизны границы контакта, или появлением зоны с отрицательными значениями диссипативной функции при увеличении кривизны границы контакта.

Ключевые слова: идеально пластическое полупространство, вдавливание, эллиптический цилиндр, плоская деформация, контактное трение, линии скольжения, годограф скоростей, диссипативная функция

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.009

УДК: 539.374

Введение. Задача идеальной пластичности о поперечном вдавливании жесткого цилиндра в пластическое полупространство имеет актуальное значение для оценки несущей способности полупространства и в технологии пластического деформирования поверхностного слоя в машиностроении. При малой глубине вдавливания жесткого цилиндра граница контакта приближается к плоской с давлением по Прандтлю $q = 2k(1 + \pi/2)$ при отсутствии скольжения на границе контакта с жесткой зоной, не зависящей от контактного трения, где $k = \sigma_Y/\sqrt{3}$, где σ_Y – напряжение текучести [1–3]. В случае гладкого штампа Хилла [1] возможно скольжение по всей границе контакта с давлением q совпадающим с решением Прандтля.

© Непершин Р. И. 2023

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin_ri@rambler.ru, доктор технических наук, профессор кафедры системы пластического деформирования, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 01.02.2023

В [2, 4] приведены решения о начальном пластическом течении полупространства при давлении круглого цилиндра с линиями скольжения, определяемыми прямолинейной границей полупространства. Эти решения дают нижнюю статическую оценку давления на цилиндр, соответствующую граничным условиям для напряжений при прямолинейной границе полупространства вследствие отрицательности диссипативной функции в области однородного напряженного состояния около этой границы [5]. Численное моделирование нестационарного процесса поперечного вдавливания круглого цилиндра в идеальнопластическое полупространство с учетом контактного трения с вычислениями линий скольжения, поля скоростей и криволинейной границы пластической области при положительности диссипативной функции приведено в [5].

В настоящей работе приведено численное моделирование нестационарного процесса поперечного вдавливания жесткого эллиптического цилиндра в идеально пластическое полупространство по уравнениям плоского пластического течения [2, 3]. Линии скольжения и годограф скоростей вычисляются с учетом контактного трения по Прандтлю с криволинейной границей материала, вытесняемого цилиндром, и контролем положительности диссипативной функции. Направления главных осей нормального сечения эллиптического цилиндра совпадают с направлениями осей координат x, y . При вытянутой форме эллиптического сечения параллельно границе полупространства по оси x длина границы контакта быстро возрастает, и при малой глубине вдавливания приближается к решениям Прандтля или Хилла для плоского штампа в зависимости от контактного трения. При вытянутой форме эллиптического сечения по нормали к границе полупространства по оси y решение приближается к задаче о вдавливании клина с выпуклой криволинейной границей и уменьшением кривизны границы контакта при увеличении глубины вдавливания.

Пластическую область и глубину вдавливания цилиндра вычисляем в зависимости от максимального угла наклона касательной α_A к границе контакта с пластической областью в точке A . Границу пластической области находим интегрированием степенной функции для угла наклона касательной к этой границе при заданной глубине вдавливания. Структура линий скольжения в пластической области с сингулярной точкой A на пересечении границы контакта с криволинейной границей пластической области и последовательность решения задач Коши, Гурса и смешанного типа для гиперболических уравнений плоского пластического течения с контролем знака диссипативной функции и численные алгоритмы [6, 7] аналогичны задаче о вдавливании круглого цилиндра [5].

Основные уравнения. На рис.1 показаны линии скольжения в пластической области на плоскости x, y нормального сечения эллиптического цилиндра справа от линии симметрии $x = 0$ при вдавливании по нормали к горизонтальной границе полупространства. Главные оси эллиптического сечения направлены по нормали и параллельно к границе полупространства. Граница контакта и пластическая область зависят от отношения длин полуосей эллипса a/b по осям x, y и увеличиваются от нуля до области, ограниченной границей контакта OA и свободной границей AB . При вычислениях за единицу длины принимаем полудлину b по оси y , сохраняя обозначение a для безразмерной полудлины по оси x . При контактном трении $0 \leq \mu \leq 1/2$ по Прандтлю около линии симметрии образуется жесткая область OEE_1 без скольжения на границе контакта OE_1 . Жесткопластическая граница $BCDE$ смещается по оси y на расстояние $-y_E$.

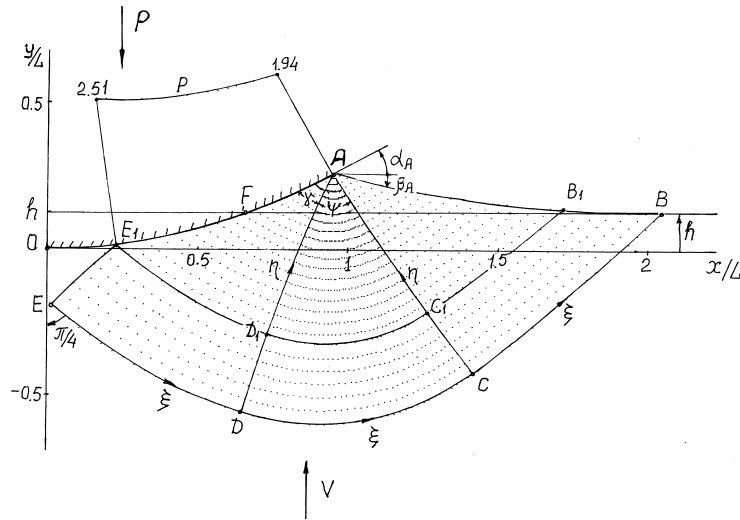


Рис. 1. Линии скольжения и контактное давление при вдавливании эллиптического цилиндра в идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения.

$$a = 0.5, \mu = 0.15, \alpha_A = 0.5$$

Цилиндр принимаем неподвижным, а полупространство перемещающимся со скоростью $V = 1$ по оси y . При выводе на экран монитора линий скольжения за единицу длины принимаем длину L границы контакта OA . Начало координат x, y принимаем в нижней точке контакта O . Каноническое уравнение контактной границы в координатах x, y с центром эллипса в точке $(0,1)$ имеет вид

$$x^2/a^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq a; \quad (1)$$

зависимость $y(x)$ и угол наклона касательной α в точке x, y находим из уравнений

$$y(x) = 1 - \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{a^2(1 - y)}. \quad (2)$$

Длину L дуги контакта

$$L = \int_0^{x_A} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} dx, \quad \text{где } x_A = a^2 \operatorname{tg} \alpha_A (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_A)^{-1/2}, \quad (3)$$

находим численным интегрированием, используя уравнения (2), и зависимости координат x, y от угла α

$$x = a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad y = 1 - (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A. \quad (4)$$

Угол α_A принимаем за параметр, определяющий глубину вдавливания h , которую находим по условию сохранения объема вытесняемого цилиндром материала с образованием "наплыва" над границей полупространства $y = h$.

Угол наклона касательной β к границе пластической области AB задаем степенной функцией с показателем степени m в зависимости от координаты x [5]

$$\beta(x) = \beta_A [\zeta^m - 1], \quad \zeta = (x - x_A)/(x_B - x_A), \quad x_A < x < x_B, \quad (5)$$

где $\beta = -\beta_A$ в точке A и $\beta = 0$ в точке B . Показатель степени m позволяет изменять кривизну границы AB . Уравнение границы AB находим численным интегрированием дифференциального соотношения $dy = \text{tg}\beta dx$. Угол β_A зависит от граничных условий на границе контакта и от глубины вдавливания h . Координата x_B точки B является неизвестным параметром задачи [5].

За единицу напряжения принимаем удвоенную пластическую постоянную $2k = 2\sigma_Y/\sqrt{3}$ по условию пластичности Мизеса, где σ_Y – напряжение текучести. Гиперболические дифференциальные уравнения для напряжений и скоростей перемещений при плоской деформации идеально пластического тела [1–4] приводятся к соотношениям Генки и Гейрингер на линиях скольжения ξ, η для угла наклона касательной φ к линиям скольжения ξ к оси x , среднего напряжения σ , нормального к линиям скольжения, и проекций V_ξ, V_η вектора скорости на линии скольжения ξ и η

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\varphi, \quad \sigma - \varphi = \text{const}, \quad dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \quad \text{для } \xi, \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\text{ctg}\varphi, \quad \sigma + \varphi = \text{const}, \quad dV_\eta - V_\xi d\varphi = 0 \quad \text{для } \eta. \quad (7)$$

Компоненты напряжения в координатах x, y находим по формулам

$$\sigma_x = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi. \quad (8)$$

Проекции вектора скорости в координатах x, y связаны с V_ξ и V_η соотношениями

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi, \quad (9)$$

$$V_\xi = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \quad V_\eta = V_y \cos \varphi - V_x \sin \varphi. \quad (10)$$

Вдоль свободной границы AB по условию пластичности известны главные напряжения $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1$; диссипативная неотрицательна, если скорость деформации $\varepsilon_2 \leq 0$. В регулярных узлах сетки линий скольжения знак диссипативной функции находим численной проверкой неравенства для максимальной скорости сдвига вдоль линий скольжения

$$\Gamma = \frac{\partial V_\xi}{\partial \eta} - V_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\eta}{\partial \xi} + V_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \geq 0. \quad (11)$$

Граничные условия. На границе скольжения E_1A принимаем касательное напряжение трения μ по Прандтлю, и из третьего уравнения (8) находим угол наклона η линии скольжения $\gamma = \frac{1}{2} \arccos(2\mu)$ к касательной контактной границы при $\tau_{x_1y_1} = -\mu$ в координатах x_1, y_1 , направленных по касательной и нормали. В точках пересечения границы E_1A с линиями скольжения находим угол наклона касательной φ к линиям скольжения ξ

$$\varphi = \gamma(\mu) + \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \mu < \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Уравнение границы AB находим численным интегрированием дифференциального соотношения $dy = \text{tg}\beta(x)dx$ при известной функции $\beta(x)$ в (5), и из условия одноосного сжатия $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1$ находим значения σ и φ на AB

$$\sigma = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \beta(x) + \frac{\pi}{4}. \quad (13)$$

Точка A является вырожденной ξ линией скольжения с веером η линий скольжения с углом ψ в точке A

$$\psi = \frac{3\pi}{4} - (\alpha_A + \beta_A + \gamma). \quad (14)$$

Значения σ и φ , изменяющиеся в точке A от границы AB до границы E_1A , находим из соотношения Генки (6)

$$\sigma = -(1/2 + \theta), \quad \varphi = \beta_A + \pi/4 - \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \psi. \quad (15)$$

В области ABC решаем задачу Коши для уравнений (6) и (7) с соотношениями Генки и граничными условиями (13). В области ACD решаем задачу Гурса по известным значениям σ и φ на η линии скольжения AC и (15) в сингулярной точке A . В области AD_1E_1 решаем задачу смешанного типа по значениям σ и φ на η линии скольжения AD_1 и граничным условиям (12). В области EE_1D_1D решаем задачу Гурса по известным значениям σ и φ на линиях скольжения E_1D_1 и DD_1 . В точке E при $\tau_{xy} = 0$ должны выполняться два условия на линии симметрии.

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad x = 0. \quad (16)$$

Координаты x_{B_1} и x_B точек B_1 и B границы AB принимаем за неизвестные параметры при вычислениях линий скольжения в полосе BE_1B_1 , которые определяют угол φ и координаты x, y точки E и должны удовлетворять двум условиям (16). При $\mu > 0$ координаты точки E_1 на границе контакта находим вычислениями линий скольжения в области AB_1E_1 с неизвестным углом ψ веера линий скольжения в точке A , который принимаем третьим параметром задачи. Угол β_A в точке A свободной границы AB находим из уравнения (14) при известных значениях ψ, α_A и γ . При отсутствии трения ($\mu = 0, \gamma = \pi/4$) условия (16) выполняются в точке O на границе контакта при $\alpha = 0$ в граничном условии (12). Жесткая область на границе контакта стягивается в точку O ; точки B_1 и B совпадают. Граница скольжения E_1A совпадает со всей границей контакта OA . В этом случае линии скольжения определяются двумя параметрами ψ и x_B .

По условию пластической несжимаемости при плоской деформации площадь S_1 полусегмента эллипса при глубине вдавливания h равна площади S_2 криволинейного треугольника ABF пластического материала над горизонтальной границей полупространства. Координату x_F точки F , разделяющую площади S_1 и S_2 , находим из первого уравнения (2) при $y_F = y_B = h$

$$x_F = a\sqrt{h(2-h)}, \quad (17)$$

где координата y_B точки B известна после вычисления границы AB .

Площадь $S_1 = hx_F - \int_0^{x_F} y(x)dx$, где функция $y(x)$ определяется первым уравнением (2), находим по формуле

$$S_1 = (h-1)x_F + \frac{1}{2a} \left[x_F \sqrt{a^2 - x_F^2} + a^2 \arcsin(x_F/a) \right]. \quad (18)$$

Площадь $S_2 = \int_{x_F}^{x_A} y(x)dx + \int_{x_A}^{x_B} y(x)dx - h(x_B - x_F)$, где зависимость $y(x)$ в первом интеграле определяется первым уравнением (2), а во втором интеграле – уравнением свободной границы AB . Второй интеграл находим численным методом, и формула для площади S_2 имеет вид

$$\begin{aligned} S_2 &= (h-1)(x_F - x_A) - h(x_B - x_A) + I_1 + \int_{x_A}^{x_B} y(x)dx, \\ I_1 &= -\frac{1}{2a} \left[x_A \sqrt{a^2 - x_A^2} - x_F \sqrt{a^2 - x_F^2} + a^2 (\arcsin(x_A/a) - \arcsin(x_F/a)) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где координата x_A точки A определяется первой формулой (4) по заданному углу контакта α_A , и координата x_B точки B – заданный параметр задачи.

Два условия (16) и равенство $S_1 = S_2$ используем для вычисления трех параметров ψ , x_{B_1} и x_B , определяющих линии скольжения с жесткой зоной OEE_1 , зависящей от контактного трения μ . В случае $\mu = 0$ параметры ψ и x_B находим по условиям $S_1 = S_2$ и $x = 0$ в точке O на жесткопластической границе $O - B$.

Скорости перемещений находим решением уравнений Гейрингер в (6) и (7) по граничным условиям на жесткопластических границах $B - E$, EE_1 и на границе скольжения E_1A . При движении жесткой области полупространства относительно неподвижной жесткой зоны OEE_1 в точке E имеют место разрывы скорости $[V]_\xi = [V]_\eta = 1/\sqrt{2}$ вдоль линий скольжения $B - E$ и EE_1 , и из условия непрерывности нормальной скорости к линиям скольжения при $\mu > 0$ находим граничные условия

$$V_\xi = \sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad V_\eta = \cos \varphi \quad \text{на } B - E \quad (20)$$

$$V_\xi = 0, \quad V_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{на } EE_1. \quad (21)$$

Равенство нулю нормальной скорости на границе скольжения E_1A приводит к условию

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \gamma \quad \text{на } E_1A. \quad (22)$$

Разрыв скорости $[V]_\eta = 1/\sqrt{2}$ вдоль η линии скольжения EE_1 вследствие условия (22) приводит к разрыву скорости $[V]_\xi = 1/\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$ в точке E_1 вдоль ξ линии скольжения $E_1 - B_1$. При пересечении этой линии нормальные скорости V_η непрерывны, а скорости V_ξ изменяются скачком

$$V_\xi^+ = V_\eta^- + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \gamma \quad \text{на } E_1 - B_1, \quad (23)$$

где V_ξ^- и V_ξ^+ – скорости V_ξ ниже и выше линии скольжения $E_1 - B_1$. В случае $\mu = 0$ имеет место один разрыв скорости в точке O , равный $\sqrt{2}$, который остается постоянным на $O - B$, и граничные условия (20) принимают вид

$$V_\xi = \sin \varphi + \sqrt{2}, \quad V_\eta = \cos \varphi \quad \text{на } O - B; \quad (24)$$

и на OA , вследствие $\gamma = \pi/4$ в граничном условии (22) имеет место равенство $V_\xi = V_\eta$.

Численное решение. Решение системы уравнений (6) и (7) с приведенными граничными условиями находим численным интегрированием. Для вычислений написана

ФОРТРАН – программа с использованием циклических процедур решения задач Коши, Гурса и смешанного типа, и конечно-разностной аппроксимации уравнений теории плоской деформации, приведенными в [6,7] для регулярных узлов сетки линий скольжения. Значения $x, y, \sigma, \varphi, V_\xi, V_\eta$, необходимые для решения текущих краевых задач, сохраняются на линиях скольжения ξ и η с целью уменьшения оперативной памяти компьютера, и выводятся на экран монитора с использованием графических программ ФОРТРАНа.

При решении задачи смешанного типа в области E_1AD_1 используем конечно-разностную аппроксимацию дифференциального уравнения для ξ линий скольжения в (6) и условие (12) для угла φ на границе E_1A при $\mu > 0$, или на границе OA при $\mu = 0$

$$y = y_1 + (x - x_1) \operatorname{tg} \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi), \quad \varphi = \gamma + \alpha - \pi/2, \quad (25)$$

где нижним индексом 1 обозначены известные значения переменных в ближайшем к границе скольжения узле ξ линии скольжения. Подстановка в (25) координаты y из второго уравнения (2) на границе контакта при заданном в первом приближении значении угла $\varphi = \varphi_1 = \tilde{\varphi}$ на этой границе приводит к квадратному уравнению для координаты x на границе контакта в виде

$$(\operatorname{tg}^2 \tilde{\varphi} + 1/a^2)x^2 - 2\operatorname{tg} \tilde{\varphi}(y_1 - 1 - x_1 \operatorname{tg} \tilde{\varphi})x + (y_1 - 1 - x_1 \operatorname{tg} \tilde{\varphi})^2 - 1 = 0. \quad (26)$$

Из уравнения (26) находим значение x в первом приближении, затем из второго уравнения (2) находим угол α на границе контакта, второе приближение для угла φ в (25), координаты x, y из уравнения (26) и второго уравнения (2). По соотношению Генки вдоль ξ линии скольжения находим $\sigma = \sigma_1 + \varphi - \varphi_1$ и давление $p = -\sigma + \frac{1}{2} \sin 2\gamma$ на границе контакта, где σ_1 – значение σ в точке 1 на ξ линии скольжения. Среднее давление q на проекцию площади контакта на границу полупространства и погонную силу P по длине оси цилиндра находим численным интегрированием распределения нормального σ и касательного $\tau = 1/2$ напряжений на жесткопластической границе $B-E$

$$q = -\frac{1}{x_A} \int_E^B (\sigma \cos \varphi + 1/2 \sin \varphi) ds, \quad P = 2qx_A. \quad (27)$$

Входными данными вычислительной программы являются относительная полудлина a горизонтальной оси эллипса, контактное трение μ , угол наклона касательной α_A к контактной границе в точке A , угловой шаг $\Delta\varphi$ веера линий скольжения в точке A , число точек N на свободной границе AB и начальные значения параметров ψ, x_{B1}, x_B . Граничные условия (16) выполняются с точностью 10^{-3} варьированием параметров x_{B1}, x_B . Интегральное условие пластической несжимаемости $S_1 = S_2$ при глубине вдавливания h в уравнениях (17)–(19) выполняется с точностью 10^{-6} при варьировании угла ψ и определяет угол наклона касательной β_A к свободной границе в точке A в зависимости от параметров задачи μ и α_A .

Поле скоростей перемещений находим численным интегрированием уравнений Гейрингер с граничными условиями (20)–(24) с использованием значений x, y, σ, φ на жесткопластических границах $E - B$ и EE_1 и на границе скольжения E_1A . По этим

данным вычисляем сетку линий скольжения и скорости перемещений в обратном направлении от жесткопластических границ к свободной границе AB с проверкой неравенства (11) для диссипативной функции в регулярных узлах сетки линий скольжения и неравенства $\varepsilon_2 \leq 0$ на границе AB . Скорости отображаются на экране монитора в виде годографа на плоскости V_x, V_y с использованием уравнений (9). Алгоритм вычислений поля скоростей с контролем неравенства (11) для диссипативной функции приведен в [5].

Численные результаты. Ниже приведены результаты расчета вдавливания цилиндра с относительными длинами главных полуосей эллиптического сечения $a = 0.5$ и $a = 2$ при контактном трении $\mu = 0.15$ в зависимости от угла наклона касательной α_A в точке A на границе контакта. За единицу длины принята полуось главной оси эллипса b по нормали к границе полупространства. Линии скольжения и годографы скоростей вычислены при $m = 0.8$ в уравнении (5), определяющем форму свободной границы пластической области AB . Сетки линий скольжения вычислены с числом точек $N = 26$ на границе AB и угловым шагом $\delta\varphi = 0.025$ веера η линий скольжения в точке A .

На рис.1 показаны линии скольжения и распределение контактного давления p на границе скольжения для $a = 0.5$ при $\alpha_A = 0.5$ и длине контактной границы $L = 0.138$. Параметры $\psi = 0.966$, $x_B/L = 2.05$ и $x_{B_1}/L = 1.72$ удовлетворяют условиям (16) на линии симметрии $x = 0$ и равенству площадей S_1 и S_2 в уравнениях (17)–(19). Эти параметры определяют границу AB с углом наклона $\beta_A = -0.258$ в точке A , среднее давление $q = 2.298$, погонную силу $P = 0.606$ по длине оси цилиндра и глубину вдавливания $h = 0.0179$. На оси симметрии образуется жесткая зона EE_1O при малой кривизне линии скольжения EE_1 . Контактное давление p на границе скольжения E_1A увеличивается от 1.943 в точке A до 2.508 в точке E_1 , приближаясь к предельному значению $1 + \pi/2$ при уменьшении контактного трения и стягивании жесткой зоны EE_1O в точку O .

На рис. 2 показан годограф скоростей для сетки линий скольжения, приведенной на рис.1. Жесткопластические границы $BCDE$ и EE_1 отображаются на годографе окружностями с центрами $(0,1)$ и $(0,0)$ с центральными углами $\pi/2$ и $\pi/4 + \varphi_{E_1}$ и радиусами равными разрыву скорости $1/\sqrt{2}$. Скорости в области EE_1B_1B (рис 1) определяются граничными условиями (20), (21) и отображается на годографе криволинейной полосой с теми же обозначениями до разрыва скорости на ξ линии скольжения $B_1C_1D_1E_1$. В области BB_1C_1C скорости меняются незначительно вследствие малой кривизны линий скольжения. Разрыв скорости $1/\sqrt{2}\text{tg}\gamma$ вдоль ξ линии скольжения E_1-B_1 приводит к смещению по нормали точек этой линии на годографе скоростей. Область AE_1D_1 отображается на годографе узким криволинейным треугольником вследствие малой кривизны и малого изменения скоростей на η линиях скольжения. В области AC_1D_1 происходит наибольшее изменение скоростей вдоль ξ линий скольжения с сингулярной точкой A . В области AB_1C_1 скорости изменяются незначительно вследствие малой кривизны свободной границы AB и линий скольжения ξ и η . В регулярных узлах сетки линий скольжения и на линиях разрыва скоростей скорость сдвига Γ положительна. На границе AB , где $\sigma_2 = -1$, скорость деформации ε_2 отрицательна. Диссипативная функция положительна во всей пластической области.

На рис. 3 показаны линии скольжения с распределением контактного давления на границе скольжения при $a = 0.5, \mu = 0.15, \alpha_A = 0.2$, длине $L = 0.0508$ контактной границы и глубине вдавливания $h = 0.0028$. Жесткая область на границе контакта

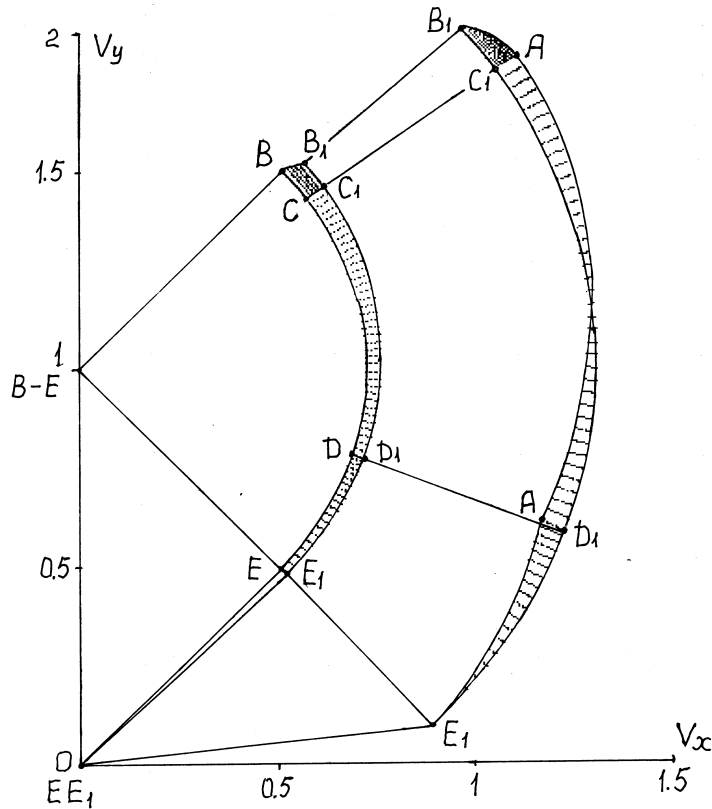


Рис. 2. Годограф скоростей для линий скольжения на рис. 1

увеличивается; граница EE_1 жесткой области и линия скольжения $B_1C_1D_1E_1$ с разрывом скорости приближаются к точке A . Граница AB пластической области с углом наклона касательной $\beta_A = -0.063$ в точке A приближается к горизонтальной прямой. Среднее давление $q = 2.514$ и сила вдавливания $P = 0.254$; контактное давление p увеличивается от 2.427 в точке A до 2.528 в точке E_1 . Угол $\psi = 1.46$ и координата $x_B/L = 2.587$ приближаются к предельным значениям $\pi/2$ и 3 для плоского штампа Прандтля.

На рис. 4 показан годограф скоростей для линий скольжения, приведенных на рис. 3. Узкая полоса, отображающая поле скоростей в области BB_1E_1EB на рис. 4 с разрывом скорости $1/\sqrt{2}$ на границе $B-E$, стягивается в дугу окружности по Прандтлю, а в области выше линии разрыва скорости на линии скольжения $B_1C_1D_1E_1$ – в дугу окружности по Хиллу с однородными полями скоростей в областях AB_1C_1 и BCC_1B_1 в соответствии с линиями скольжения для плоского штампа по Прагеру [8] с переменной длиной жесткой области на границе контакта.

На рис. 5 и 6 показаны линии скольжения с распределением контактного давления и годограф скоростей при $a = 0.5, \mu = 0.15$ для угла контакта $\alpha_A = 0.9$. При увеличении угла контакта α_A уменьшается угол веера η линий скольжения в точке A до $\psi = 0.1815$, увеличивается по модулю угол $\beta_A = -0.642$ и кривизна свободной границы AB , увеличивается длина границы скольжения AE_1 при уменьшении жесткой зоны на

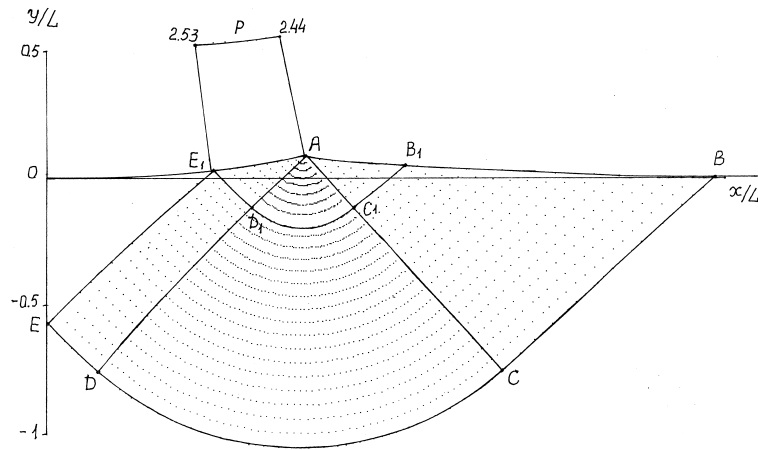


Рис. 3. Линии скольжения и контактное давление при $a = 0.5$, $\mu = 0.15$, $\alpha_A = 0.2$

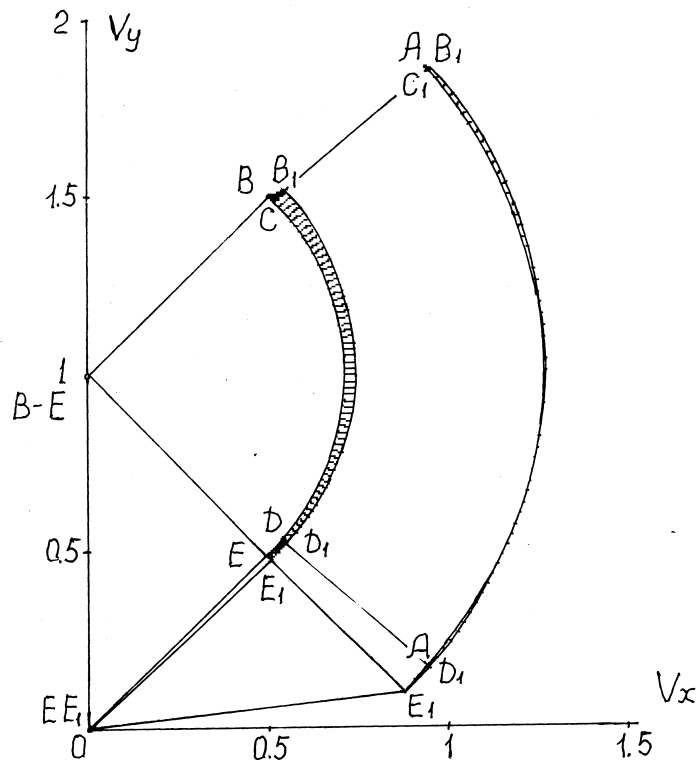


Рис. 4. Годограф скоростей для линий скольжения на рис. 3

оси симметрии (рис. 5). Увеличивается неравномерность распределения контактного давления p от 1.158 в точке A до 2.515 в точке E_1 , среднее давление q снижается до 2.033 при длине дуги контакта $L = 0.318$ и увеличении силы и глубины вдавливания до значений $P = 1.084$, $h = 0.0742$. На годографе скоростей (рис. 6) область BB_1E_1EB с

разрывом скорости $1/\sqrt{2}$ изображается узкой полосой. После разрыва скорости вдоль линии скольжения $B_1C_1D_1E_1$ скорости в области AD_1E_1 с границей скольжения AE_1 , в области центрированного веера AC_1D_1 и в области AC_1B_1 со свободной границей AB_1 изменяются в широком диапазоне.

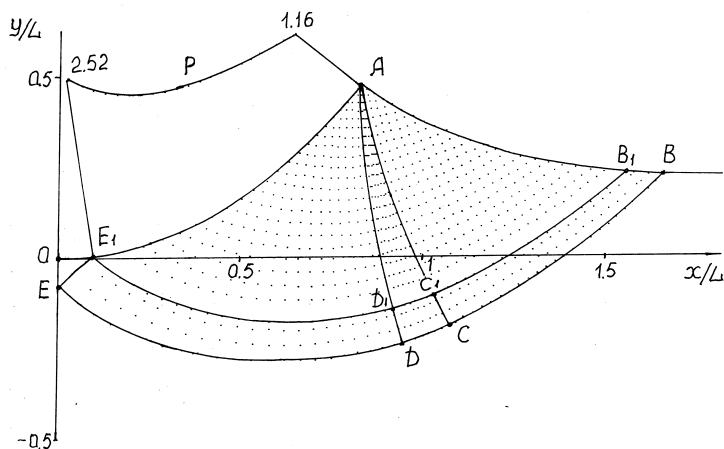


Рис. 5. Линии скольжения и контактное давление при $a = 0.5, \mu = 0.15, \alpha_A = 0.9$

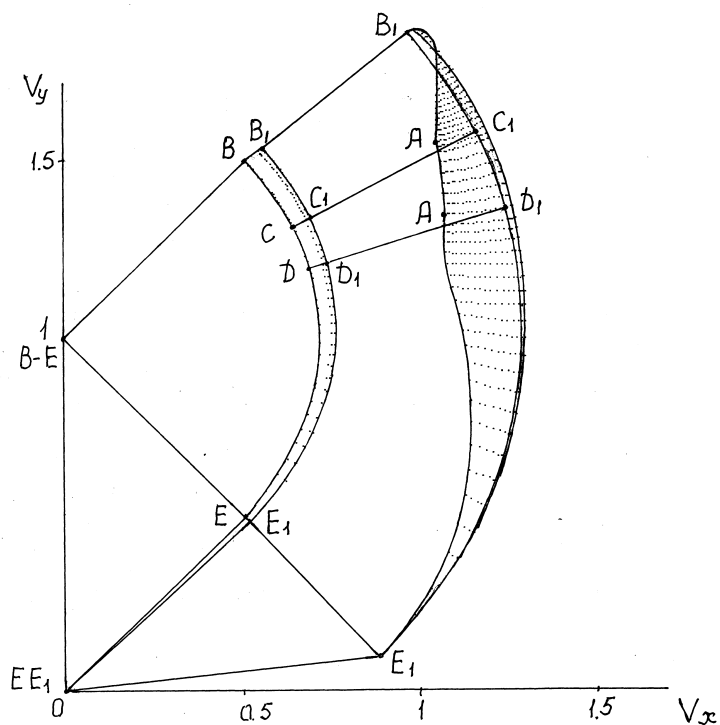


Рис. 6. Годограф скоростей для линий скольжения на рис. 5

Таблица 1. Вдавливание эллиптического цилиндра в идеальнопластическое полупространство. $a = 0.5$, $\mu = 0.15$

α_A	ψ	$-\beta_A$	L	x_A	y_A	x_B	$h \times 10$	q	P
0.1	1.572	0.051	0.025	0.025	0.001	0.071	0.002	2.547	0.128
0.2	1.460	0.063	0.051	0.050	0.005	0.131	0.028	2.514	0.254
0.3	1.312	0.111	0.078	0.076	0.012	0.184	0.066	2.476	0.378
0.4	1.151	0.172	0.106	0.103	0.022	0.235	0.140	2.450	0.508
0.5	0.966	0.258	0.138	0.132	0.035	0.283	0.179	2.298	0.606
0.6	0.792	0.331	0.173	0.162	0.054	0.340	0.271	2.267	0.734
0.7	0.596	0.427	0.214	0.194	0.078	0.398	0.388	2.184	0.848
0.8	0.390	0.533	0.261	0.229	0.111	0.457	0.542	2.096	0.960
0.9	0.182	0.642	0.318	0.266	0.154	0.528	0.742	2.033	1.084

В табл. 1 приведены основные параметры линий скольжения – углы ψ , β_A , длина дуги контакта L , координаты точек A и B , глубина вдавливания h , среднее давление q и сила P , вычисленные для вдавливания эллиптического цилиндра при $a = 0.5$, $\mu = 0.15$ и изменении угла α_A в точке A от 0.1 до 0.9. Линии скольжения и поля скоростей удовлетворяют условию неотрицательности диссипативной функции пластического течения. При $\alpha_A \rightarrow 1$ угол вера линий скольжения $\psi \rightarrow 0$. С увеличением угла контакта α_A угол ψ и давление q уменьшаются; модуль угла наклона β_A касательной в точке A к границе AB и кривизна этой границы увеличиваются; сила P возрастает вследствие увеличения L и h , при снижении производной dP/dh вследствие снижения среднего давления q .

Ниже приведены результаты расчета вдавливания цилиндра при $a = 2$ и $\mu = 0.15$ с эллиптическим сечением, вытянутым в направлении горизонтальной границы полупространства, при увеличении угла контакта α_A в точке A от 0.1 до 0.7. В этом случае кривизна границы контакта увеличивается при увеличении угла α_A , в отличие от уменьшения кривизны границы контакта при $a = 0.5$ и $\mu = 0.15$, в приведенных выше результатах расчета, что приводит к существенному изменению напряжений и скоростей перемещений в пластической области. Предельный угол контакта $\alpha_A \approx 0.7$ уменьшается по сравнению со случаем $a = 0.5$, вследствие появления и роста зон с отрицательной диссипативной функцией в области со свободной границей около сингулярной точки A при $\alpha_A > 0.7$. При малых углах $\alpha_A < 0.1 \div 0.2$ линии скольжения и годограф скоростей приближаются к штампу Прандтля с жесткой областью по всей границе контакта, также как и при $a = 0.5$, $\mu = 0.15$, но при большей длине границы контакта и большей силе вдавливания.

На рис. 7 показаны линии скольжения с распределением контактного давления p на границе скольжения AE_1 при $a = 2$, $\mu = 0.15$, $\alpha_A = 0.4$. Линии скольжения определяются параметрами $\psi = 1.1735$, $x_B/L = 2.265$ и $x_{B_1}/L = 1.658$ при $L = 1.321$, удовлетворяющими граничным условиям (16) и равенству площадей S_1 и S_2 в уравнениях (17)–(19). Получены значения угла наклона касательной $\beta_A = -0.258$ к свободной границе в точке A , координат $x_A = 1.291$, $y_A = 0.236$, $x_B = 2.922$ точек A и B , глубины вдавливания $h = 0.123$, среднего давления и силы вдавливания $q = 2.425$, $P = 6.264$. При увеличении угла контакта α_A жесткая область OEE_1 уменьшается, а длина границы контактного скольжения увеличивается. Давление p на этой границе увеличивается

от 2.15 в точке A до 2.518 в точке E_1 . Соответствующий годограф скоростей, показанный на рис. 8, определяется двумя разрывами скоростей на жесткопластических границах $BCDE$ и EE_1 и в пластической области на линии скольжения $B_1C_1D_1E_1$. Скорости в пластических зонах ниже и выше линии скольжения $B_1C_1D_1E_1$ отображаются на годографе узкими полосами при малом изменении скоростей в области ABC с разрывом скорости на свободной границе в точке B_1 . Диссипативная функция во всей пластической области положительна.

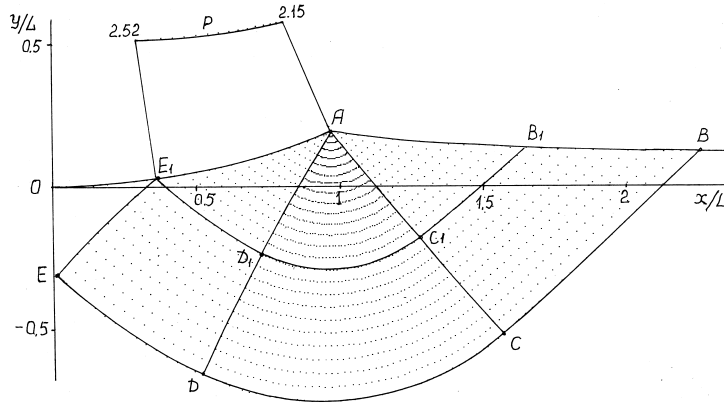


Рис. 7. Линии скольжения и контактное давление при $a = 2, \mu = 0.15, \alpha_A = 0.4$

На рис. 9 и 10 показаны линии скольжения и годограф скоростей при $a = 2, \mu = 0.15$ для угла контакта $\alpha_A = 0.7$, при котором диссипативная функция остается положительной в пластической области. Параметры $\psi = 0.744, x_B/L = 2.048$ и $x_{B_1}/L = 1.69$ при $L = 1.821$ определяют линии скольжения (рис.9) при уменьшении жесткой области OEE_1 , где линии скольжения практически прямолинейны. Контактное давление p на границе скольжения изменяется от 1.721 в точке A до 2.51 в точке E_1 при среднем давлении $q = 2.302$, силе $P = 7.910$ и глубине вдавливания $h = 0.237$. Неоднородность скоростей в пластической области выше границы разрыва скорости на линии скольжения $B_1C_1D_1E_1$ увеличивается (рис. 10).

В табл. 2 приведены основные параметры линий скольжения, среднего давления q и силы P , вычисленные при вдавливании цилиндра с эллиптическим сечением при $a = 2, \mu = 0.15$ и увеличении угла контакта до $\alpha_A = 0.7$. По сравнению с вдавливанием цилиндра с большей длиной главной оси по нормали к границе полупространства (табл.1), в рассматриваемом случае увеличиваются значения угла веера ψ , длины контакта L , глубины h , давления q и силы вдавливания P ; модуль угла наклона β_A касательной к границе AB в точке A и кривизна этой границы уменьшаются.

При $\alpha_A > 0.7$ вектор скорости пластической границы в точке A приближается к касательной с углом наклона α_A , вследствие быстрого увеличения кривизны границы контакта. На границе AB пластической области вблизи точки A появляется увеличивающаяся зона с возрастающей по модулю отрицательной диссипативной функцией, что является признаком начала пластической разгрузки и образования жесткой зоны над пластической границей при потере контакта с границей цилиндра. Изменение формы пластической области при большой глубине вдавливания жесткого цилиндра в идеально пластическое полупространство остается открытой проблемой.

При длинной оси эллипса параллельной границе полупространства кривизна границы контакта и глубина вдавливания увеличиваются. В этом случае моделирование ограничено появлением зон с отрицательной диссипативной функцией около сингулярной точки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехиздат, 1956.
- [2] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
- [4] Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. М.: Металлургия, 1972. 408 с.
- [5] Непершин Р. И. О вдавливании цилиндра в идеально-пластическое полупространство с учетом контактного трения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. Т. 4, № 38. С. 102–119.
- [6] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU "STANKIN", 2016. 310 p.
- [7] Druyanov V. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 406 p.
- [8] Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 402 с.

R. I. Nepershin

IDEAL PLASTIC HALF-SPACE INDENTATION BY THE ELLIPTICAL CYLINDER

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Numerical simulation of the plane strain ideal plastic half-space indentation by the rigid elliptical cylinder with Prandtl's contact friction consideration is presented. The slip lines and velocities on the hodograph plane with positive plastic dissipative function are defined by numerical calculation of differential equations of the plane strain plastic flow theory. Curved form of the stress free boundary of the plastic region, which is function of the cylinder indentation depth, is defined by the plastic incompressibility condition. The numerical simulation satisfies the full equations system of the plane strain ideal plastic theory with Mises yield criterion and positive dissipative function in the plastic region. The simulation is constrained by the limit indentation depth, when in the case of the contact boundary curvature decreasing the centered fan slip lines region is degenerated, or in the case of the contact boundary curvature increasing by nucleation of small regions with negative plastic dissipative function, with indentation depth increase.

Keywords: ideal plastic half-space, indentation, rigid elliptical cylinder, plane strain theory, contact friction, slip lines, velocities hodograph, plastic dissipative function.

REFERENCES

- [1] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, 1985. 366 p.
- [2] Sokolovskii V. V. The Theory of Plasticity. Vyshaya shkola: Moscow, 1969. 608 c.
- [3] Ishlinskii A. Yu., Ivlev D. D. Mathematical Theory of Plasticity. Fizmatlit: Moscow, 2001. 704 c.
- [4] Tomlenov A. D. Theory of the Metals Plastic Deformation. Metallurgia: Moscow, 1972. 408 c.
- [5] Nepershin R. I. On the ideal plastic half-space indentation by the cylinder with contact consideration // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2018. № 4 (34). С. 102–119.
- [6] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. MSTU "STANKIN": Moscow, 2016. 310 c.
- [7] Druyanov B. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Elsevier: Amsterdam, 1994. 406 c.
- [8] Prager W., Hodge P. Theory of Perfectly Plastic Solids. Dover: New York, 1968. 264 p.

Nepershin Rostislav Ivanovich, Doctor of technical sciences, Professor of the Plastic Deformation Systems Dep., Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.