

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПРЕДЕЛЬНО-УПРУГИХ БЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

² *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

³ *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. В данной работе рассматривается задача изгиба многослойного стержня поперечными нагрузками при наличии зон упругого и нелинейно-неупругого деформирования, получены соотношения для определения границы раздела упругой и нелинейно-неупругой областей деформирования стержня. Рассмотрены различные случаи положения указанной границы раздела областей в зависимости от внешних нагрузок. Приведены выражения предельных нагрузок для каждого из характерных случаев расположения указанных границ: первой (деформация достигает значения предельной неупругой) и второй (деформация достигает значения деформации предразрушения).

Ключевые слова: бетонные стержни, аналитические решения, физическая нелинейность, упругость, поперечные нагрузки

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.0010

УДК: 539.374

Ввиду простоты изготовления и доступности при достаточно хороших эксплуатационных характеристиках, изделия из бетона завоевали широкую популярность в строительстве. При этом расчеты в научной литературе в основном посвящены упругим решениям и не учитывают существенную нелинейность диаграмм растяжения и сжатия бетонов [1–4]. Одними из основных элементов в многоэтажных зданиях связевого

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2023

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.01.2023

каркаса являются колонны и ригели [5]. Бетонные стержни в таких сооружениях испытывают продольные и поперечные нагрузки. В случае поперечного изгиба стержня, в зависимости от положения нейтральной линии, участки стержня в сечении испытывают различные деформации и за счет использования многослойных бетонных конструкций и подбора материалов соответствующих слоев можно существенно повысить несущую способность конструкции при сопоставимом весе или стоимости материалов. Примеры таких расчетов стержней численными методами приведены в работах [1, 6, 7], а многослойных бетонных плит в работе [8]. Аналитические решения задачи центрального растяжения и сжатия физически нелинейных бетонных стержней, где отдельные участки деформируются упруго, а остальные нелинейно-неупруго, приведены в работе [9]. В данной работе рассматривается задача изгиба многослойного стержня поперечными нагрузками при наличии зон упругого и нелинейно-неупругого деформирования, получены соотношения для определения границы раздела упругой и нелинейной-неупругой областей стержня.

Рассмотрим бетонный стержень с поперечным сечением и с параметрами, аналогично рассмотренными в работе [10] (рис. 1).

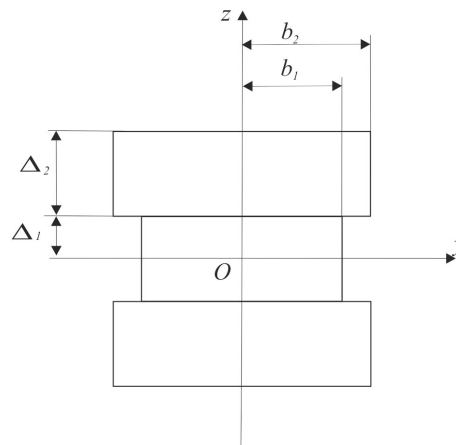


Рис. 1. Поперечное сечение стержня

Примем, что связь между напряжениями и деформациями в стержне в i -ом слое определяется зависимостями при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{0i}^+$

$$\sigma_i^e = E_i \varepsilon, \quad (1)$$

а при $\varepsilon_{0i}^+ \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}^+$, равной [11–13],

$$\sigma_i^n = A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2. \quad (2)$$

В последующих расчетах перейдем к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{l} = 1, \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{l}, \quad \tilde{\Delta}_i = \frac{\Delta_i}{l}, \\ \tilde{q} &= q \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{Q} = Q \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{N} = N \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{M} = M \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{l}, \end{aligned} \quad (3)$$

где обезразмеривающие величины такие: σ_{1*}^- – предел прочности при сжатии бетона марки В10, l – длина стержня, q – величина распределенной нагрузки, Q – величина перерезывающей силы, M – величина изгибающего момента, N – продольного усилия, w – величина прогиба стержня.

Для простоты обозначений индекс « \sim » опустим.

Положим, что на стержень действует равномерная нагрузка q (рис. 2).

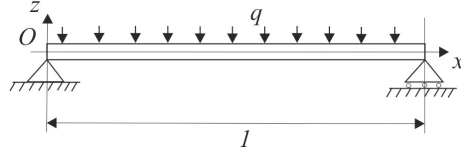


Рис. 2. Шарнирно опертый стержень

Примем справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява

$$\varepsilon(x, z) = -z\kappa_z(x), \quad \kappa_z(x) = \frac{d^2w_0(x)}{dx^2}, \quad (4)$$

где $\kappa_z(y)$ – кривизна осевой линии стержня, $w(x)$ – величина прогиба стержня.

Для случая прямого изгиба уравнения равновесия примут вид

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = q(x), \quad Q = \frac{dM_y}{dx}, \quad (5)$$

где $M_y(x)$ – проекция вектора изгибающего момента на ось Oy , Q – величина перерезывающей силы. Из условия закрепления стержня имеем

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 0, \quad M_y(0) = 0, \quad M_y(1) = 0. \quad (6)$$

Из соотношений (5), (6) можно получить выражение для изгибающего момента

$$M_y = q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right). \quad (7)$$

В зависимости от параметров стержня, вида марок бетонов слоев и действующих нагрузок, возможны случаи сочетания областей упругого и нелинейного деформирования бетона на разных участках стержня (рис. 3), где заштрихованной линией обозначена область нелинейно-неупругого деформирования стержня. Здесь мы учли тот факт, что при $z = 0$ деформация равна нулю и, следовательно, область нелинейно-неупругого деформирования там не может быть достигнута при любых нагрузках.

В данной работе будем ограничиваться случаем, когда область нелинейно-неупругого деформирования возникает только в области растяжения стержня.

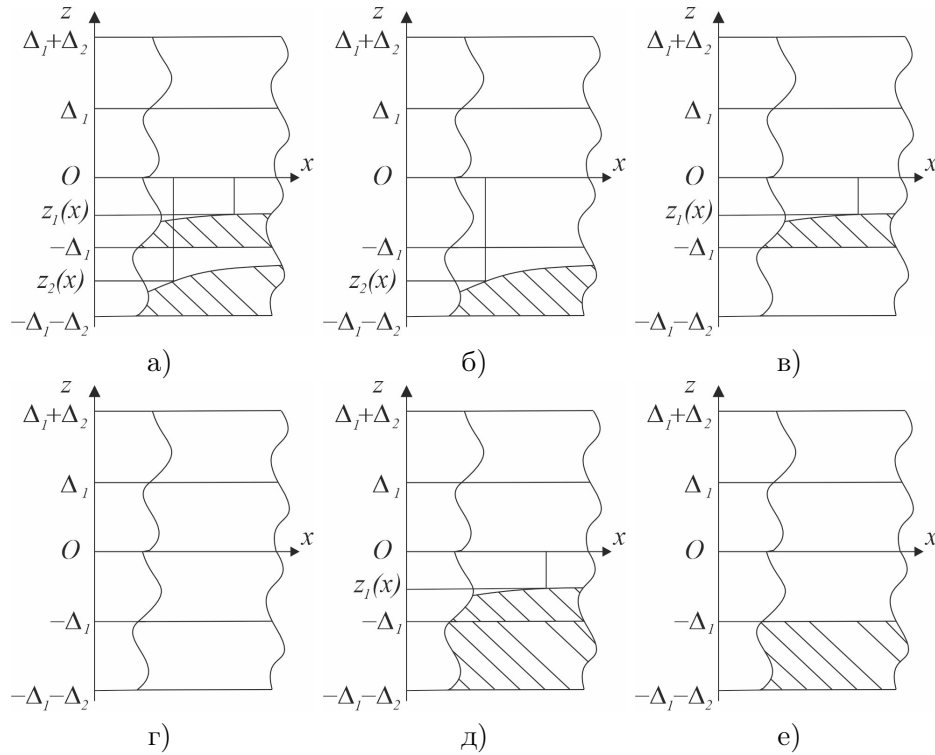


Рис. 3. Возможные случаи взаимного расположения областей упругого и нелинейного неупругого деформирования в слоях стержня

В случае наличия только области упругого деформирования (рис. 3г) значение изгибающего момента определяется из соотношений

$$\begin{aligned}
 M_y(x) &= -4 \left(\int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} z \sigma_1^e dy + \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} z \sigma_2^e dy \right) = \\
 &= 4 \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \left(E_1 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} z^2 dy + E_2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} z^2 dy \right) = \\
 &= \frac{4}{3} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \left(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \left((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3 \right) \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Из соотношений (7), (8) можно получить дифференциальное уравнение для определения прогиба

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \left(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \left((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3 \right) \right) = \frac{3}{8} q (x^2 - x). \tag{9}$$

В случае участка, изображенного на рис. 3б, будем иметь

$$\begin{aligned}
M_y(x) = & -4 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - 2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - \\
& -2 \int_{-\Delta_1 - \Delta_2}^{z_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n z dy = \frac{1}{2} A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - z_2^4(x)) \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 + \\
& + \frac{2}{3} (2E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + b_2 E_2 (-\Delta_1^3 - z_2^3) + \\
& + b_2 A_{12} (z_2^3 + (\Delta_1 + \Delta_2)^3)) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Приравнивая выражение момента (7), (10), получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - z_2^4) + \\
& + \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0}{dx^2} (E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + 2E_1 b_1 \Delta_1^3 + \\
& + (A_{12} b_2 - E_2 b_2) z_2^3) - q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) = 0, \tag{11}
\end{aligned}$$

которое можно переписать в виде

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + \frac{f_{1,1} + f_{1,2} z_2^3}{f_{1,3} - f_{1,4} z_2^4} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{3q(x - x^2)}{f_{1,3} - f_{1,4} z_2^4} = 0, \tag{12}$$

где коэффициенты $f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{1,3}$, $f_{1,4}$ определяются из соотношений

$$\begin{aligned}
f_{1,1} &= 4 (E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + 2E_1 b_1 \Delta_1^3), \\
f_{1,2} &= 4b_2 (A_{12} - E_2), \quad f_{1,3} = 3A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4, \quad f_{1,4} = 3A_{22} b_2.
\end{aligned}$$

Неизвестная граница $z_2(x)$ определяется из равенства

$$-z_2(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \varepsilon_{02}^+$$

и уравнения (12), откуда получим

$$\left(-\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2(x)} \right)^2 + \frac{f_{1,1} + f_{1,2} z_2^3}{f_{1,3} - f_{1,4} z_2^4} \left(-\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2(x)} \right) + \frac{3q(x - x^2)}{f_{1,3} - f_{1,4} z_2^4} = 0$$

и преобразуем его к виду

$$((\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,4} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,2}) z_2^4(x) + 3q(x^2 - x) z_2^2(x) + \varepsilon_{02}^+ f_{1,1} z_2(x) - (\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,3} = 0. \tag{13}$$

Соотношение (13) перепишем

$$z_2^4(x) + b_1(x) z_2^2(x) + c_1 z_2(x) + d_1 = 0, \tag{14}$$

где

$$b_1(x) = \frac{3q(x^2 - x)}{(\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,4} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,2}}, \quad c_1 = \frac{\varepsilon_{02}^+ f_{1,1}}{(\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,4} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,2}}, \quad d_1 = -\frac{(\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,3}}{(\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,4} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,2}}.$$

Для решения уравнения четвертой степени (14) составим характеристическое уравнение

$$\xi^3(x) - b_1(x) \xi^2(x) - 4d_1 \xi(x) + 4b_1(x) d - c_1^2 = 0. \tag{15}$$

Следуя формуле Кардано [14], воспользуемся заменой

$$\xi(x) = \mu(x) + b_1(x)/3, \quad (16)$$

откуда из (15), (16) получим

$$\mu^3(x) - \frac{12d_1 + b_1^2(x)}{3}\mu(x) + \frac{72b_1(x)d_1 - 2b_1^3(x) - 27c_1^2}{27} = 0. \quad (17)$$

С учетом обозначения

$$f_{1,5}(x) = -\left(\frac{12d_1 + b_1^2(x)}{9}\right)^3 + \left(\frac{72b_1(x)d_1 - 2b_1^3(x) - 27c_1^2}{54}\right)^2,$$

уравнение (17) будет иметь три решения

$$\mu_1(x) = \alpha(x) + \beta(x), \quad \mu_{2,3}(x) = -\frac{\alpha(x) + \beta(x)}{2} \pm i\frac{\alpha(x) - \beta(x)}{2}\sqrt{3}, \quad (18)$$

где

$$\alpha(x) = \sqrt[3]{-\frac{72b_1(x)d_1 - 2b_1^3(x) - 27c_1^2}{54} + \sqrt{f_{1,5}(x)}},$$

$$\beta(x) = \sqrt[3]{-\frac{72b_1(x)d_1 - 2b_1^3(x) - 27c_1^2}{54} - \sqrt{f_{1,5}(x)}},$$

причем $\alpha(x)$, $\beta(x)$ берутся удовлетворяющими условию

$$\alpha(x)\beta(x) = \frac{12d_1 + b_1^2(x)}{9}.$$

Если среди найденных решений $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ взять любое действительное решение $\mu_i(x)$, тогда по формуле (16) получим действительное решение $\xi_i(x)$ уравнения (15). Тогда, согласно методу Феррари, уравнение (14) будет иметь 4 корня, которые являются корнями уравнения

$$z_2^2(x) + \frac{\xi_1(x)}{2} = \pm\sqrt{(-b_1(x) + \xi_1(x))z_2^2(x) - c_1z_2(x) + \frac{\xi_1(x)^2}{4} - d_1},$$

которое можно преобразовать к виду

$$z_2^2(x) \pm \sqrt{\xi_i(x) - b_1(x)}z_2(x) + \frac{\xi_i(x)}{2} \pm \frac{-c_1}{2\sqrt{\xi_i(x) - b_1(x)}} = 0,$$

где знаки плюс-минус должны быть выбраны одинаково.

Окончательно решение примет вид

$$z_2(x) = \pm_* \frac{1}{2} \sqrt{\xi_i(x) - b_1(x)} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\xi_i(x) - b_1(x) - 2\xi_i(x) \pm_* \frac{-2c_1}{\sqrt{\xi_i(x) - b_1(x)}}}. \quad (19)$$

Рассмотрим случай, соответствующий рис. 3в. В этом случае выражение для момента будет иметь вид

$$\begin{aligned}
M_y(x) = & -2 \int_{z_1}^0 dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{-\Delta_1}^{z_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^n z dy - 2 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - \\
& -4 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy = \frac{1}{2} A_{21} b_1 (\Delta_1^4 - z_1^4(x)) \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 + \\
& + \frac{2}{3} (-2E_1 b_1 z_1^3(x) + A_{11} b_1 (\Delta_1^3 + z_1^3(x)) + E_1 b_1 (\Delta_1^3 + z_1^3(x)) + \\
& + 2E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3)) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \tag{20}
\end{aligned}$$

из которого, с учетом выражения для момента, получим выражение для прогиба конструкции

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 A_{21} b_1 (\Delta_1^4 - z_1^4) + \\
& + \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0}{dx^2} (2E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + A_{11} b_1 \Delta_1^3 + E_1 b_1 \Delta_1^3 + \\
& + (A_{11} b_1 - E_1 b_1) z_1^3) - q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) = 0. \tag{21}
\end{aligned}$$

Уравнение (21) перепишем в виде

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + \frac{f_{2,1} + f_{2,2} z_1^3}{f_{2,3} - f_{2,4} z_1^4} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{3q(x - x^2)}{f_{2,3} - f_{2,4} z_1^4} = 0, \tag{22}$$

где величины $f_{2,1}$, $f_{2,2}$, $f_{2,3}$, $f_{2,4}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
f_{2,1} = 8E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 4A_{11} b_1 \Delta_1^3 + 4E_1 b_1 \Delta_1^3, \quad f_{2,2} = 4b_1 (A_{11} - E_1), \\
f_{2,3} = 3A_{21} b_1 \Delta_1^4, \quad f_{2,4} = 3A_{21} b_1.
\end{aligned}$$

Границу $z_1(x)$ для указанного случая можно получить из уравнений (12)-(19) с помощью замены ε_{01}^+ на ε_{01}^+ , $z_2(x)$ на $z_1(x)$, $f_{1,5}(x)$ на $f_{2,5}(x)$, $f_{1,1}$ на $f_{2,1}$, $f_{1,2}$ на $f_{2,2}$, $f_{1,3}$ на $f_{2,3}$, $f_{1,4}$ на $f_{2,4}$.

Для случая, соответствующего рис. 3а, имеем две неизвестные границы $z_1(x)$, $z_2(x)$. Тогда выражение для определения момента примет вид

$$\begin{aligned}
M_y(x) = & -2 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - \\
& -2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - \\
& -2 \int_{z_1}^0 dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{-\Delta_1}^{z_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^n z dy - \\
& -2 \int_{-\Delta_1-\Delta_2}^{z_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n z dy = \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \{ E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + \\
& + A_{11} b_1 \Delta_1^3 + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + z_1^3 (A_{11} b_1 - E_1 b_1) + z_2^3 (A_{12} b_2 - E_2 b_2) \} + \tag{23}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 \{ A_{21} b_1 \Delta_1^4 + A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4 - A_{21} b_1 z_1^4 - A_{22} b_2 z_2^4 \}.$$

Неизвестные границы $z_1(x)$, $z_2(x)$ можно определить, учитывая, что деформация равна в этих точках предельной упругой для соответствующего материала слоя

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{01}^+}{z_1(x)}, \quad \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2(x)}. \quad (24)$$

Из уравнений (24) можно получить соотношения между z_1 и z_2

$$z_1(x) = \frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} z_2(x), \quad (25)$$

тогда выражение для момента (23) примет вид

$$\begin{aligned} M_y(x) = & \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \{ E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + \\ & + A_{11} b_1 \Delta_1^3 + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + \\ & + z_2^3 \left(\left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} \right)^3 (A_{11} b_1 - E_1 b_1) + (A_{12} b_2 - E_2 b_2) \right) \} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 \left\{ A_{21} b_1 \Delta_1^4 + A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \left(A_{21} b_1 \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} \right)^4 + A_{22} b_2 \right) z_2^4 \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (26) получим

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + \frac{f_{6,1} + f_{6,2} z_2^3}{f_{6,3} - f_{6,4} z_2^4} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{3q(x-x^2)}{f_{6,3} - f_{6,4} z_2^4} = 0, \quad (27)$$

где величины $f_{6,1}$, $f_{6,2}$, $f_{6,3}$, $f_{6,4}$ определяются соотношениями

$$f_{6,1} = 4E_1 b_1 \Delta_1^3 + 4E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + 4A_{11} b_1 \Delta_1^3 + 4A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3,$$

$$f_{6,2} = 4 \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} \right)^3 (A_{11} b_1 - E_1 b_1) + 4(A_{12} b_2 - E_2 b_2),$$

$$f_{6,3} = 3A_{21} b_1 \Delta_1^4 + 3A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4, \quad f_{6,4} = 3A_{21} b_1 \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} \right)^4 + 3A_{22} b_2.$$

Границу $z_2(x)$ для указанного случая можно получить из уравнений (12)-(19) с помощью замены $f_{1,5}(x)$ на $f_{6,5}(x)$, $f_{1,1}$ на $f_{6,1}$, $f_{1,2}$ на $f_{6,2}$, $f_{1,3}$ на $f_{6,3}$, $f_{1,4}$ на $f_{6,4}$, граница $z_1(x)$ определяется из уравнения (25) из найденной на предыдущем шаге $z_2(x)$.

Рассмотрим случай, соответствующий рис. 3д. Тогда для изгибающего момента справедливо

$$\begin{aligned}
M_y(x) &= -2 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - 2 \int_{z_1}^0 dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - \\
&\quad - 2 \int_{-\Delta_1-\Delta_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n z dy - 2 \int_{-\Delta_1}^{z_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^n z dy = \\
&= \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \{ E_1 b_1 (\Delta_1^3 - z_1^3) + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + A_{12} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + \\
&\quad + A_{11} b_1 (\Delta_1^3 - z_1^3) \} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 \{ A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4) + \\
&\quad + A_{21} b_1 (\Delta_1^4 - z_1^4) \}. \tag{28}
\end{aligned}$$

Из (7), (28) получим

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + \frac{f_{3,1} + f_{3,2} z_1^3}{f_{3,3} - f_{3,4} z_1^4} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{3q(x-x^2)}{f_{3,3} - f_{3,4} z_1^4} = 0, \tag{29}$$

где величины $f_{3,1}$, $f_{3,2}$, $f_{3,3}$, $f_{3,4}$ определяются соотношениями

$$f_{3,1} = 4E_1 b_1 \Delta_1^3 + 4E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 4A_{12} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 4A_{11} b_1 \Delta_1^3,$$

$$f_{3,2} = 4b_1 (A_{11} - E_1), \quad f_{3,3} = 3A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4) + 3A_{21} b_1 \Delta_1^4, \quad f_{3,4} = 3A_{21} b_1.$$

Границу $z_1(x)$ для указанного случая можно получить из уравнений (12)-(19) с помощью замены ε_{02}^+ на ε_{01}^+ , $z_2(x)$ на $z_1(x)$, $f_{1,5}(x)$ на $f_{3,5}(x)$, $f_{1,1}$ на $f_{3,1}$, $f_{1,2}$ на $f_{3,2}$, $f_{1,3}$ на $f_{3,3}$, $f_{1,4}$ на $f_{3,4}$.

Для случая, соответствующего рис. 3е, имеем соотношение для момента

$$\begin{aligned}
M_y(x) &= -4 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{-\Delta_1-\Delta_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n z dy - \\
&\quad - 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy = \frac{1}{2} A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4) \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{2}{3} \left(A_{12} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 2E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) \right) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \tag{30}
\end{aligned}$$

тогда из (7), (30) получим

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + \frac{f_{5,1}}{f_{5,2}} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{3q(x-x^2)}{f_{5,2}} = 0, \tag{31}$$

где

$$f_{5,1} = 4 \left(A_{12} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 2E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) \right),$$

$$f_{5,2} = 3A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4).$$

Исходя из соображений симметрии, решение достаточно рассматривать на участке $[0; 0, 5]$, решение на участке $[0, 5; 1]$ будет получаться из $[0; 0, 5]$ путем замены x на $(1-x)$.

Рассмотрим случай, когда весь стержень деформируется упруго, то есть имеет место случай, изображенный на рис. 3г, по всей длине стержня. В этом случае имеем из условия закрепления на концах стержня

$$\left. \frac{dw_0(x)}{dx} \right|_{x=0,5} = 0, \quad w_0(0) = 0. \quad (32)$$

Из (9), (32) получим

$$w(x) = \frac{q}{32 (3E_2b_2\Delta_1^2\Delta_2 + 3E_2b_2\Delta_1\Delta_2^2 + E_2b_2\Delta_2^3 + E_1b_1\Delta_1^3)} (x^4 - 2x^3 + x). \quad (33)$$

Значение нагрузки, при которой справедливо для прогиба решение (32), будет зависеть от формы поперечного сечения и состава фазовых материалов стержня. Предельная упругая деформация с повышением нагрузки впервые будет возникать в первом слое стержня при параметрах, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} < \frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1 + \Delta_2}, \quad (34)$$

причем величина предельной упругой нагрузки в этом случае будет равна

$$q_{1,1} = -\frac{32}{3} (b_1E_1\Delta_1^3 + b_2E_2\Delta_2^3 + 3E_2b_2\Delta_1^2\Delta_2 + 3E_2b_2\Delta_1\Delta_2^2) \frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1}. \quad (35)$$

Из неравенства (34) следует, что оптимальным (все слои начинают «работать» вместе, и область нелинейного деформирования будет появляться сразу в двух слоях при одной и той же нагрузке) будет распределение толщины слоев и фазовых материалов, удовлетворяющее равенству

$$\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.$$

В случае нарушения неравенства (34) область нелинейного деформирования будет возникать во втором слое стержня. Тогда предельная нагрузка будет определяться выражением

$$q_{1,2} = -\frac{32}{3} (b_1E_1\Delta_1^3 + b_2E_2\Delta_2^3 + 3E_2b_2\Delta_1^2\Delta_2 + 3E_2b_2\Delta_1\Delta_2^2) \frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1 + \Delta_2}. \quad (36)$$

Значение нагрузки $q = q_{1,1n}$ при котором в первом слое появляется область нелинейного деформирования, а второй слой полностью в области нелинейного деформирования определяется равенством

$$q_{1,1n} = -\frac{16}{3} \frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} ((A_{12}b_2 + E_2b_2) ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 2E_1b_1\Delta_1^3) - \quad (37)$$

$$-4 \left(\frac{\varepsilon_{1*}}{\Delta_1} \right)^2 A_{22}b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4). \quad (38)$$

Упругое решение (33) будет справедливо при

$$0 < |q| < \min\{|q_{1,1}|, |q_{1,2}|\}.$$

В случае же, если нагрузка превышает предельную упругую, т.е. при

$$|q| \geq \min\{|q_{1,1}|, |q_{1,2}|\},$$

в стержне в середине пролета будет область нелинейно-неупругого деформирования. Область нелинейно-неупругого деформирования может возникнуть как полностью во всем слое на некоторых участках стержня, так и быть разделенной функциями $z_1(x)$ или $z_2(x)$ в зависимости от слоя, в котором она возникла.

Рассмотрим случай, когда $z_2(x)$ достигнет границы разделяющей первый и второй слою. Значение нагрузки $q = q_{1,3}$, при которой $z_2(x)$ достигнет границы первого слоя в середине пролета, можно определить из уравнения

$$z_2(0,5) = -\Delta_1. \quad (39)$$

Тогда, решая совместно (13) и (39), можно определить значение предельной нагрузки $q_{1,3}$

$$q_{1,3} = -4 \left(\frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1} \right)^2 A_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4) - \frac{16 \varepsilon_{02}^+}{3 \Delta_1} ((E_2 b_2 + A_{12} b_2) ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 2\Delta_1^3 E_1 b_1). \quad (40)$$

В случае, если нагрузка q и параметры стержня таковы, что $|q_{1,2}| \leq |q| < \min\{|q_{1,1}|, |q_{1,3}|\}$, тогда будем иметь случай, изображенный на рис. 3б, для случая $|q_{1,1}| \leq |q| < |q_{1,2}|$ имеем расположение границы, изображенное на рис. 3а.

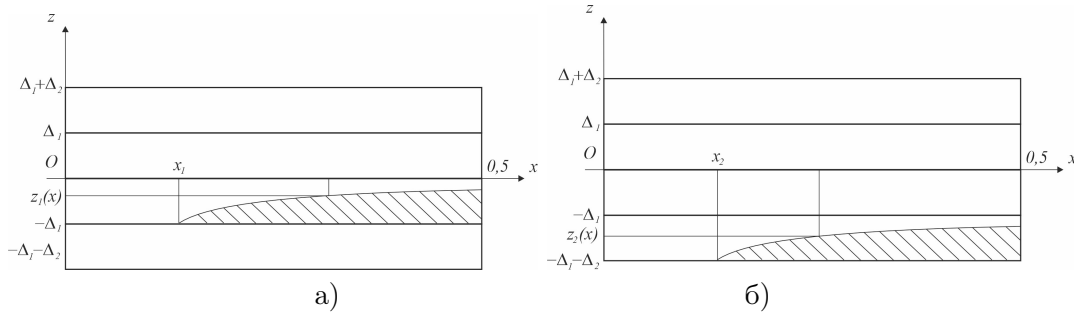


Рис. 4. Расположение зон упругого и нелинейного деформирования при а) $|q_{1,1}| \leq |q| < |q_{1,2}|$ и б) $|q_{1,2}| \leq |q| < \min\{|q_{1,1}|, |q_{1,3}|\}$

В случае наличия границы нелинейно-неупругого деформирования в первом слое стержня (рис. 3а) на участке $[0, x_1]$ будет справедливо упругое деформирование (случай 3г), определяемое выражениями (9), а на участке $[x_1, 1/2]$ упругое и нелинейно-неупругое, определяемое выражениями (22), соответствующее случаю 3в.

Значения x_1 и x_2 определяются из равенства деформации значению предельной упругой на соответствующих границах, тогда получим соотношения

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{q_{11}}{q}}, \quad (41)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{q_{12}}{q}}. \quad (42)$$

Для определения прогиба конструкции справедливы условия на концах стержня

$$w(0) = 0, \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=1/2} = 0, \quad (43)$$

а также условия непрерывности прогиба и производной прогиба для упругой ($0 < x < x_1$) и нелинейной областей $x_1 < x < 1/2$.

$$w(x)|_{x=x_1-0} = w(x)|_{x=x_1+0}, \quad \left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_{x=x_1-0} = \left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_{x=x_1+0}. \quad (44)$$

Для случая, изображенного на рис. 4б, будем иметь на участке $[0, x_2]$ упругое деформирование (рис. 4г), а на участке $[x_2, 1/2]$ упругое и нелинейное (рис. 4б), определяемое выражениями (19).

В случае, если $\max\{|q_{1,1}|, |q_{1,2}|\} < |q| < |q_{1,3}|$, тогда будут справедливыми случаи, изображенные на рис. 5. При этом случай рис. 5а будет иметь место при $x_1 < x_{2n}$, а случай рис. 5б при $x_2 < x_{1n}$.

Значение x_{1n} (случай 5б) можно определить из уравнений (25), (27) и соотношений для прогиба и границы

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1}, \quad z_1(x_1) = -\Delta_1,$$

тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} \right) \{ 2E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + \\ & + z_2^3 (A_{12} b_2 - E_2 b_2) \} + \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} \right)^2 \{ A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4 - A_{22} b_2 z_2^4 \} - q \left(\frac{x_{1n}^2}{2} - \frac{x_{1n}}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

и соотношения для второй границы z_2

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2}, \quad z_1(x_1) = -\Delta_1,$$

тогда из (25), (27) получим

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left(-\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2} \right) \{ 2E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + \\ & + z_2^3 (A_{12} b_2 - E_2 b_2) \} + \left(\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2} \right)^2 \{ A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4 - A_{22} b_2 z_2^4 \} - q \left(\frac{x_{1n}^2}{2} - \frac{x_{1n}}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Решая совместно уравнения (45), (46) относительно z_1, x_{1n} , получим искомую границу x_{1n} .

Если окажется, что нагрузка больше $|q| > |q_{1,3}|$, то тогда возможны случаи образования нелинейно-неупругой области в первом слое (рис. 6) при нагрузках и параметрах стержня, удовлетворяющих условию $\max\{|q_{1,3}|, |q_{1,1n}|\} < |q|$, или отсутствия нелинейно-неупругой области в первом слое (рис. 7) при выполнении условия $|q_{1,3}| < |q| < |q_{1,1n}|$. Граница x_{1n*} определяется в этом случае из соотношения

$$x_{1n*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{q_{1,1n}}{q}}. \quad (47)$$

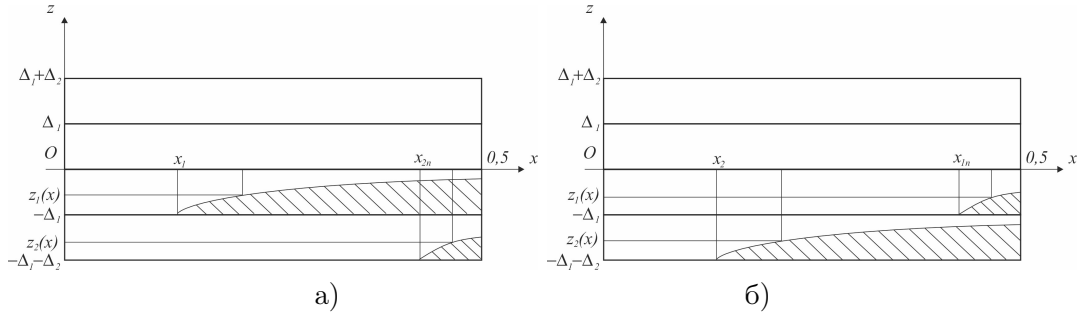


Рис. 5. Расположение зон упругого и нелинейного деформирования при $\max\{|q_{1,1}|, |q_{1,2}|\} < |q| < |q_{1,3}|$

Для случая изображенном на рис. 7 значение границы $x_{2,2}$ определяется выражением

$$x_{22} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{q_{1,3}}{q}}. \quad (48)$$

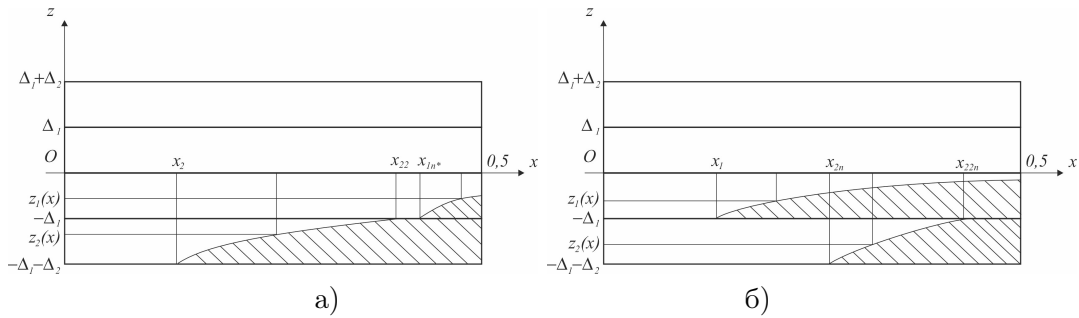


Рис. 6. Расположение зон упругого и нелинейного деформирования при $\max\{|q_{1,1n}|, |q_{1,3}|\} < |q|$

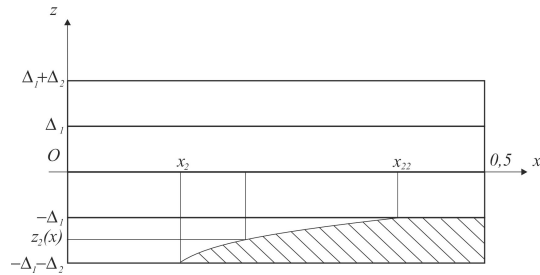


Рис. 7. Расположение зон упругого и нелинейного деформирования при $|q_{1,3}| < |q| < |q_{1,1n}|$

Указанные решения будут справедливыми до достижения деформацией предельного значения предразрушения в первом ($\varepsilon = \varepsilon_{*1}^+$) или втором ($\varepsilon = \varepsilon_{*2}^+$) слое. Очевидно,

что указанное значение будет достигнуто в середине пролета стержня на верхней контактной границе соответствующего слоя.

Сечение, соответствующее достижению деформацией предельного значения предразрушения, может возникнуть для случая, изображенного на рис. 3д. Тогда из соотношений (4), (21) получим выражение для соответствующих предельных нагрузок

$$q_{2,1} = -\frac{4}{3} \left((f_{3,3} - f_{3,4}z_1^4) \left(\frac{\varepsilon_{*1}^+}{\Delta_1} \right)^2 + (f_{3,1} + f_{3,2}z_1^3) \frac{\varepsilon_{*1}^+}{\Delta_1} \right),$$

$$q_{2,2} = -\frac{4}{3} \left((f_{3,3} - f_{3,4}z_1^4) \left(\frac{\varepsilon_{*2}^+}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)^2 + (f_{3,1} + f_{3,2}z_1^3) \frac{\varepsilon_{*2}^+}{\Delta_1 + \Delta_2} \right),$$

где z_1 определяется из уравнения, которое можно получить из (13) путём замены коэффициентов $f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, f_{1,4}$ на $f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, f_{3,4}$, предельной деформации ε_{02}^+ на ε_{01}^+ , границы $z_2(x)$ на $z_1(x)$.

Все полученные решения будут справедливы при нагрузке $|q| < \min\{|q_{2,1}|, |q_{2,2}|\}$. При этом при $|q_{2,1}| < |q_{2,2}|$ предельная деформация предразрушения будет достигнута в первом слое, в противном случае – во втором.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность многослойных бетонных стержней. Чебоксары: Изд-во Чуваш-го ун-та, 2022. 180 с.
- [2] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [3] Мищенко А. В., Немировский Ю. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.
- [4] Немировский Ю. В., Батурин А. А. Метод расчета деформативности и прочности одноставровых и двуставровых железобетонных стержней // Известия вузов. Строительство. 2015. № 10. С. 82–93.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение несущей способности многоэтажных зданий из физически нелинейных бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 19–35.
- [6] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.
- [7] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // Известия Алтайского государственного университета. 2021. № 1(117). С. 40–46.
- [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Deformation of multilayered physically nonlinear concrete slabs by quasi-static loads // E3S Web of Conferences. 2023. Vol. 365. p. 02011.
- [9] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность физически-нелинейного композитного бетонного стержня при центральном растяжении // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении: материалы VI Дальне-восточной конференции с международным участием, Комсомольск-на-Амуре, 5-7 октября 2022 г. ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2022. С. 192–199.
- [10] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельно упругий изгиб многослойных бетонных и железобетонных многослойных стержней при квазистатических нагрузениях // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 95–107.

- [11] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 133–146.
- [12] Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188.
- [13] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polycrystalline disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [14] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 720 с.

Yu. V. Nemirovskii^{1,2}, S. V. Tikhonov³

DETERMINATION OF LIMIT LOADS AT TRANSVERSE BENDING OF MULTILAYER ULTIMATE ELASTIC CONCRETE RODS

¹*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

³*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. In this paper, the problem of bending of a multilayered rod by transverse loads in the presence of zones of elastic and nonlinear-inelastic deformation is considered, the relations are obtained to determine the boundary between the elastic and nonlinear-inelastic areas of deformation of the rod. Various cases of the position of the specified boundary between areas are considered, depending on external loads. The expressions for ultimate loads are given for each of the characteristic cases of the location of these boundaries: the first (deformation reaches the limit elastic value) and the second (deformation reaches the value of pre-fracture deformation).

Keywords: concrete rods, analytical solutions, physical nonlinearity, elasticity, transverse loads

REFERENCES

- [1] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Bearing capacity of multilayer concrete bars. Cheboksary: Publishing house of the Chuvash University, 2022. 180 p.
- [2] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // Bulletin of the Belgorod State Technological University. V.G. Shukhov. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [3] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V., Vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered bar systems. Novosibirsk: NGASU, 2004. 488 p.
- [4] Nemirovsky Y. V., Baturin A. A. Method for calculating the deformability and strength of single-tee and double-tee reinforced concrete bars // News of universities. Construction. 2015. no. 10. P. 82–93.
- [5] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Determination of the bearing capacity of multi-storey buildings from physically non-linear concrete bars // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2022. no. 2(52). P. 19–35.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Professor, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.
Tikhonov Sergey Vladimirovich, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

-
- [6] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimate state of concrete and reinforced concrete bars under complex and longitudinal-transverse bending // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2020. no. 1. P. 60–73.
- [7] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete and steel-fiber-reinforced concrete bars // News of the Altai State University. 2021. no. 1(117). P. 40–46.
- [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Deformation of multilayered physically nonlinear concrete slabs by quasi-static loads // E3S Web of Conferences. 2023. Vol. 365. p. 02011.
- [9] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Bearing capacity of a physically non-linear composite concrete bar under central tension // Fundamental and Applied Problems of Deformable Solid Mechanics and Advanced Technologies in Metallurgy and Mechanical Engineering: Proceedings of the VI Far East Conference with International Participation, Komsomolsk-on-Amur, October 5-7, 2022. FGBOU VO «KnAGU», 2022. P. 192–199.
- [10] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimately elastic bending of multilayer concrete and reinforced concrete multilayer bars under quasi-static loads // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2022. no. 4(54). P. 95–107.
- [11] Mishchenko A. V., Nemirovskiy Y. V. Nonlinear deformation of concrete elements during longitudinal-transverse bending // News of universities. Construction. 2013. no. 4. P. 133–146.
- [12] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered bars taking into account physical nonlinearity // Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and plasticity: Proceedings of the XIX All-Russian Conference, Biysk, August 28-31, 2005. Parallel, 2005. P. 184–188.
- [13] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polycrystalline disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [14] Korn G., Korn T. Handbook of mathematics (for scientists and engineers). M.: Science, 1973. 720 p.