Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 102–109

Е. В. Мурашкин, Т. К. Нестеров, Н. Э. Стадник

УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ В МОДЕЛЯХ ПОЛУИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе обсуждаются условия совместности на поверхностях слабых и сильных разрывов, распространяющихся в сплошных полуизотропных термоупругих средах. Для вывода таких граничных условий примняется хорошо известная теория Югонио–Адамара, существенно развитая Г. И. Быковцевым, обобщенная на случай псевдотензорных физических полей. Рассматриваются вопросы дифференцирования по псевдоскалярному времени и его преобразования при зеркальных отражениях и инверсиях пространства. Получены геометрические и кинематические условия совместности первого порядка в терминах псевдотензоров. Выведены условия совместности для слабых разрывов перемещений и микровращений в полуизотропном микрополярном континууме. Получены условия совместности на сильных разрывах в полуизотропном термоупругом континууме.

Ключевые слова: поверхность разрыва, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, псевдоскалярное время, условие совместности, микрополярная упругость, перемещение, микровращение

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.011

УДК: 539.374

1. Введение. Для моделирования поведения континуумов, которые не обладают инвариантностью к зеркальным отражениям и инверсиям пространства, необходимо использовать алгебру псевдотензоров. Это особенно актуально для таких материалов, как метаматериалы и биоматериалы. В таких средах динамические процессы,

---

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Нестеров Тимофей Константинович
`e-mail:` nesterovtim4@gmail.com, аспирант, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Стадник Никита Эдуардович
`e-mail:` nik-122@mail.ru, младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

Поступила 20.02.2023

например, процессы аддитивных технологий, связаны с распространением поверхностей уровня псевдоскалярных физических полей. Работы [1-3] посвящены разработке соответствующего математического аппарата.

В механике континуума существует проблема постановки двусторонних граничных условий на поверхностях разрывов физических полей. Эта задача является нетривиальной и требует использования специального математического аппарата, который был разработан в работах [5,6] по вариационному исчислению. Условия совместности на ударных волнах в газе были получены Ренкиным и Югонио [7,8]. В монографии [9] изложена теория геометрических и кинематических условий совместности первого и второго порядка, которые используются для решения задач, связанных с распространением волн в сплошных средах.

Для моделирования процессов распространения поверхностей разрывов в необратимо деформируемых средах был разработан лучевой метод решения динамических задач Г.,И. Быковцевым [10-12]. Он основан на специальном выборе "внутренней"параметризации поверхности разрыва и представляет собой эффективный подход к решению данной проблемы (см. также дополнительные главы в монографиях по механике континуума [13,14]). Во всех вышеуказанных публикациях [5–14] для описания динамических процессов использовались абсолютные тензоры.

2. Геометрические условия совместности первого порядка. Допустим теперь, что поверхность уровня $\overset{[W]}{\Sigma}$ псевдоскалярного поля $\overset{[W]}{f}(x^i)$, задается внутренней Гауссовой параметризацией u^α $(\alpha = 1, 2)$

$$x^k = x^k(u^1, u^2, t). \tag{1}$$

В формуле (1) x^k являются пространственными “внешними” координатами для $\overset{[W]}{\Sigma}$, а u^α — “внутренними”. В работах Г. И. Быковцева показано, что использование специальной Гауссовой параметризации [13, с. 224], при которой псевдовектор $\overset{[-W]}{\partial.}\, x^i$ направлен вдоль псевдовектора нормали $\overset{[W]}{n}{}^i$ к поверхности $\overset{[W]}{\Sigma}$ приводит к соотношению

$$\overset{[-W]}{\partial.}\, x^i = e^W \overset{[-W]}{G} \overset{[W]}{n}{}^i. \tag{2}$$

Г.И. Быковцев систематически использовал уравнение (29) в работах по механике деформируемого твердого тела [10–12].

Пусть задано физическое контравариантное псевдовекторное поле $\overset{[P]}{\varphi}{}^k(x^s, t)$ веса P.[1] Предположим, что $\overset{[P]}{\varphi}{}^k$ непрерывно и дифференцируемо на каждой стороне поверхности $\overset{[W]}{\Sigma}$. Величину разрыва $[\overset{[P]}{\varphi}{}^k]$ поля $\overset{[P]}{\varphi}{}^k$ определим равенством

$$[\overset{[P]}{\varphi}{}^k] = \underset{+}{\overset{[P]}{\varphi}}{}^k - \underset{-}{\overset{[P]}{\varphi}}{}^k, \tag{3}$$

[1]Поясним, что контравариантный псевдовектор $\overset{[P]}{\varphi}{}^k$ используется как “модель”, т.е. вместо него можно использовать любое псевдотензорное поле.

где $+$ и $-$ относятся к соответствующим сторонам $\overset{[W]}{\underset{+}{\Sigma}}$ и $\overset{[W]}{\underset{-}{\Sigma}}$ поверхности $\overset{[W]}{\Sigma}$. Аналогичным образом определяются разрывы производных ∂_i поля $\overset{[P]}{\varphi}{}^k$ по пространственным координатам x^i. Введем следующие обозначения

$$[\overset{[P]}{\varphi}{}^k] = \overset{[P]}{A}{}^k, \quad [\partial_i \overset{[P]}{\varphi}{}^k] = \overset{[P-W]}{B}{}^k \overset{[W]}{n}_i, \quad [\partial_i \partial_j \overset{[P]}{\varphi}{}^k] = \overset{[P-2W]}{C}{}^k \overset{[W]}{n}_i \overset{[W]}{n}_j, \tag{4}$$

где $\overset{[W]}{n}_j$ — единичный псевдовектор нормали к поверхности $\overset{[W]}{\Sigma}$, направленный в сторону от $\overset{[W]}{\underset{-}{\Sigma}}$ к $\overset{[W]}{\underset{+}{\Sigma}}$. Здесь, с особой осторожностью, следует учитывать четность (не четность) веса W псевдовекторного поля $\overset{[P]}{\varphi}{}^k$, т.к. при преобразованиях инверсии пространства и зеркальных отражениях направление псевдовектора нормали $\overset{[W]}{n}_j$ может измениться.

Легко заметить, что

$$\partial_\alpha \overset{[P]}{A}{}^k = [\partial_\alpha \overset{[P]}{\varphi}{}^k] = [\partial_i \overset{[P]}{\varphi}{}^k] \partial_\alpha x^i. \tag{5}$$

Используя известное тождество

$$g^{\alpha\beta} x^i_\alpha x^j_\beta = g^{ij} - e^{-2W} \overset{[W]}{n}_i \overset{[W]}{n}_j, \tag{6}$$

после несложных преобразований получим

$$[\partial_i \overset{[P]}{\varphi}{}^k] = \overset{[P-W]}{B}{}^k \overset{[W]}{n}_i + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \overset{[P]}{A}{}^k \partial_\beta x_i, \tag{7}$$

где $g^{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой фундаментальной квадратичной формы поверхности $\overset{[W]}{\Sigma}$.

3. Дифференцирование по псевдоскалярному времени и кинематические условия совместности первого порядка. Рассмотрим два положения поверхности $\overset{[W]}{\Sigma}$: $\overset{[W]}{\Sigma}(\overset{[W]}{t})$ и $\overset{[W]}{\Sigma}(\overset{[W]}{t} + \delta \overset{[W]}{t})$. Построим вектор единичной нормали n^k в некоторой точке P поверхности $\overset{[W]}{\Sigma}$, а через P' обозначим точку, в которой нормаль n^k пересекает поверхность $\overset{[W]}{\Sigma}(\overset{[W]}{t} + \delta \overset{[W]}{t})$. Пусть точка P имеет координаты x^k, а P' — координаты $x^k + \delta x^k$.

Нормальная скорость распространения поверхности $\overset{[W]}{\Sigma}$ определяется согласно правилу

$$\overset{[-W]}{G} = \lim_{\delta \overset{[W]}{t} \to 0} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{\delta \overset{[W]}{t}}. \tag{8}$$

Устремляя к нулю расстояние между поверхностями $\overset{[W]}{\Sigma}(\overset{[W]}{t})$ и $\overset{[W]}{\Sigma}(\overset{[W]}{t}+\delta\overset{[W]}{t})$, т.е. устремляя $\delta\overset{[W]}{t}$ к нулю, можно получить следующие выражения для δ-производных

$$\frac{\delta\overset{[P]}{\underset{+}{\varphi}}{}^k}{\delta\overset{[W]}{t}} = \overset{[-W]}{\delta.}\,\overset{[P]}{\underset{+}{\varphi}}{}^k, \qquad \frac{\delta\overset{[P]}{\underset{-}{\varphi}}{}^k}{\delta\overset{[W]}{t}} = \overset{[-W]}{\delta.}\,\overset{[P]}{\underset{-}{\varphi}}{}^k, \qquad \frac{\delta\overset{[P]}{A}{}^k}{\delta\overset{[W]}{t}} = \overset{[-W]}{\delta.}\,\overset{[P]}{A}{}^k, \tag{9}$$

откуда не сложно получить кинематические условия совместности первого порядка

$$\begin{aligned}
&[\overset{[-W]}{\delta.}\,\overset{[P]}{\varphi}{}^k] = \overset{[-W]}{\delta.}\,\overset{[P]}{\underset{+}{\varphi}}{}^k - \overset{[-W]}{\delta.}\,\overset{[P]}{\underset{-}{\varphi}}{}^k = \overset{[-W]}{\delta.}\,\overset{[P]}{A}{}^k,\\
&\overset{[-W]}{\delta.}\,x^i = e^{-W}\overset{[-W]}{G}\,\overset{[W]}{n}{}^i,\\
&[\overset{[-W]}{\partial.}\,\overset{[P]}{\varphi}{}^k] = -e^{W}\overset{[P-W]}{B}{}^k\,\overset{[-W]}{G} + \overset{[-W]}{\delta.}\,\overset{[P]}{A}{}^k,
\end{aligned} \tag{10}$$

Используя полученные соотношения первого порядка не сложно получить условия совместности второго и более высоких порядков.

4. Слабые разрывы перемещений и микровращений Исследуем закономерности распространения слабых разрывы перемещений u^k и микровращений $\overset{[+1]}{\phi}{}^k$ в микрополярном континууме. Отметим, что система уравнений динамики содержит частные производные не выше второго порядка. Пусть в трехмерном пространстве с нормальной скоростью G распространяется фронт (волновая поверхность) $\overset{[W]}{\Sigma}$ слабых разрывов перемещений u^k и микровращений $\overset{[+1]}{\phi}{}^k$. Тогда геометрические и кинематические условия совместности второго порядка Адамара—Томаса (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&[\partial_i\partial_j u^k] = \overset{[-2W]}{C}{}^k\,\overset{[W]}{n}_i\,\overset{[W]}{n}_j, && [\partial_i\partial_j \overset{[+1]}{\phi}{}^k] = \overset{[1-2W]}{S}{}^k\,\overset{[W]}{n}_i\,\overset{[W]}{n}_j,\\
&[\partial_i \overset{[-W]}{\partial.}\,u^k] = -e^{W}\overset{[-W]}{G}\,\overset{[-2W]}{C}{}^k\,\overset{[W]}{n}_i, && [\partial_i \overset{[-W]}{\partial.}\,\overset{[+1]}{\phi}{}^k] = -e^{W}\overset{[-W]}{G}\,\overset{[1-2W]}{S}{}^k\,\overset{[W]}{n}_i,\\
&[\overset{[-W]}{\partial.}\,\overset{[-W]}{\partial.}\,u^k] = e^{2W}\overset{[-W]}{G}\,\overset{[-W]}{G}\,\overset{[-2W]}{C}{}^k, && [\overset{[-W]}{\partial.}\,\overset{[-W]}{\partial.}\,\overset{[+1]}{\phi}{}^k] = e^{2W}\overset{[-W]}{G}\,\overset{[-W]}{G}\,\overset{[1-2W]}{S}{}^k.
\end{aligned} \tag{11}$$

5. Условия совместности сильных разрывов в термоупругих микрополярных средах. Условия совместности для сильных разрывов физических полей необходимо дополнить геометрическими и кинематическими условиями совместности Адамара—Томаса [9] второго и первого порядка справедливыми для произвольного поля φ^k.

Плотность действия термоупругого микрополярного континуума зададим в форме

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho g_{is}\partial.u^i\partial.u^s + \frac{1}{2}\rho g_{is}\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\,\partial.\overset{[+1]}{\phi}{}^i\partial.\overset{[+1]}{\phi}{}^s - \psi(\epsilon_{is}, \overset{[+1]}{\kappa}{}^{is}, \theta). \tag{12}$$

Здесь $\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}$ — микроинерция, ρ — плотность, g_{ij} — метрический тензор, ψ — плотность свободной энергии Гельмгольца, ϵ_{is} — асимметричный тензор деформаций, $\overset{[+1]}{\kappa}{}^{is}$ — тензор изгиба кручения.

Уравнения поля в этом случае для декартовой системы координат принимают вид:

$$\begin{aligned}&\partial_s t_{is} - \rho\partial_{..} u_i = 0,\\ &\partial_s \overset{[-1]}{\mu}_{is} - 2\overset{[-1]}{\tau}_i - \rho \overset{[-2]}{\mathfrak{I}} \partial_{..} \overset{[+1]}{\phi}{}^s = 0,\end{aligned} \tag{13}$$

и дополняются определяющими уравнениями:

$$s = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad t_{is} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\epsilon_{is}}, \qquad \overset{[-1]}{\mu}_{is} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\overset{[+1]}{\kappa}_{is}}, \qquad J^j = J^j(\nabla_k \ln\theta). \tag{14}$$

Приняв обозначения для 4-псевдотензора Пиола—Кирхгофа и 4-псевдотензора энергии—импульса поля

$$\underset{4}{S}{}^{\beta\cdot}_{\cdot k} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}, \qquad T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \mathcal{L}\delta^\beta_\alpha - (\partial_\alpha\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}, \tag{15}$$

условия совместности в трехмерной форме имеют вид

$$\begin{aligned}&-c\left[T^{4\cdot}_{\cdot4}\right] + n_\mu\left[T^{\mu\cdot}_{\cdot4}\right] = 0, \quad -c\left[T^{4\cdot}_{\cdot\lambda}\right] + n_\mu\left[T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}\right] = 0 \qquad (\lambda,\, \mu = 1,2,3),\\ &-c[\underset{4}{S}{}^{4\cdot}_{\cdot k}] + n_\mu[\underset{4}{S}{}^{\mu\cdot}_{\cdot k}] = 0 \qquad (\mu = 1,2,3),\end{aligned} \tag{16}$$

где c — нормальная скорость распространения поверхности Σ, n_μ — единичный вектор 3-нормали.

Условия совместности на поверхности сильного разрыва поля в микрополярной упругой среде, согласно (16), иожго представить в виде:

$$\begin{aligned}&c[\psi] + n_i[t_{is}\partial_. u_s + \overset{[-1]}{\mu}_{is}\partial_. \overset{[+1]}{\phi}{}^s] = 0,\\ &c[\frac{1}{2}\rho\partial_. u_s\partial_i u_s + \frac{1}{2}\rho\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\partial_. \overset{[+1]}{\phi}_s\partial_i\overset{[+1]}{\phi}_s + s\partial_i\vartheta] + n_k[\mathcal{L}\delta_{ik} + t_{ks}\partial_i u_s + \overset{[-1]}{\mu}_{ks}\partial_i\overset{[+1]}{\phi}_s] = 0,\\ &c\rho[\partial_. u_i] = n_s[t_{is}], \quad c\rho\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}[\partial_. \overset{[+1]}{\phi}_i] = n_s[\overset{[-1]}{\mu}_{is}],\\ &c[s] = n_i[j_i].\end{aligned} \tag{17}$$

Заключение. В настоящей работе обсуждаются условия совместности на поверхностях слабых и сильных разрывов, распространяющихся в сплошных полуизотропных термоупругих средах. Для вывода таких граничных условий примняется хорошо известная теория Югонио–Адамара, существенно развитая Г. И. Быковцевым, обобщенная на случай псевдотензорных физических полей. Рассматриваются вопросы дифференцирования по псевдоскалярному времени и его преобразования при зеркальных отражениях и инверсиях пространства. Получены геометрические и кинематические условия совместности первого порядка в терминах псевдотензоров. Выведены условия совместности для слабых разрывов перемещений и микровращений в полуизотропном микрополярном континууме. Получены условия совместности на сильных разрывах в полуизотропном термоупругом континууме.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном дифференциальном ограничении в асимметричных теориях механики растущих тел // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 38—46.

[2] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики полуизотропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, No 4. С. 399–412.

[3] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020.Т. 24, No 3. С. 424–444.
[4] Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета.Серия “Физико-математические науки.” 2020. Т. 24, No 4. С. 752–761.
[5] Weierstrass K. Note zur vorstehender Abhandlung. Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, 1865.
[6] Erdmann G. Ueber unstetige Lösungen in der Variationsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1877.
[7] Rankine W. J. M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Proceedings of the Royal Society of London. London: The Royal Society, 1870. Vol. 18, P. 80–83.
[8] Hugoniot P. H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits, 2e Partie // Journal de l'École Polytechnique, 1887. Vol. 57. P. 3–97.
[9] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961. 267 p.
[10] Быковцев Г.И., Мяснянкин Ю.М. О поверхностях скольжения в трехмерных жестко-пластических телах // ДАН СССР 1966. Т. 167. № 6. С.1260–1262.
[11] Быковцев Г.И., Кретова Л.Д. О волнах ускорений в идеальных упруго- пластических телах // Инж. журнал МТТ. 1967. № 1. С.102–110.
[12] Быковцев Г.И., Власова И.А. Свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности // Мех. деформир. тверд, тела, Вып. 2. Куйбышев, 1977. С.33-68.
[13] Ивлев Д.Д.,Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
[14] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

E. V. Murashkin, T. K. Nesterov, N. E. Stadnik

COMPATIBILITY CONDITIONS IN MODELS OF SEMI-ISOTROPIC THERMOELASTIC SOLIDS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we discuss the compatibility conditions on the surfaces of weak and strong discontinuities propagating in continuous semi-isotropic thermoelastic media. To derive such boundary conditions, the well-known Yugonio–Hadamar theory, substantially developed by G. I. Bykovtsev, and generalized to the case of pseudotensor physical fields, is used. The questions of differentiation with respect to pseudoscalar time and its transformation under mirror reflections and space inversions are considered. First-order geometric and kinematic compatibility conditions are obtained in terms of pseudotensors. Compatibility conditions are derived for weak discontinuities of displacements and microrotations in a hemitropic micropolar continuum. Compatibility conditions are obtained for strong discontinuities in a semi-isotropic thermoelastic continuum.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, constitutive pseudoscalars, micropolar hemitropic continuum, elastic potential, primary wave mode, mirror mode

REFERENCES

[1] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of Strength and Plasticity. 2020.Vol. 82, No. 4, pp. 399–412.
[2] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Bulletin of the Samara State Technical University. Series Physics and Mathematics. 2020, T. 24, No 3.P. 424–444.
[3] Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Bulletin of Samara State Technical University, Series “ Physics and Mathematics. ” 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761.
[4] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On one differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing bodies // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Rigid Body Mechanics. 2019. No. 6. P. 38—46.
[5] Weierstrass K. Note zur vorstehender Abhandlung. Walter de Gruyter, Berlin / New York Berlin, New York, 1865.
[6] Erdmann G. Ueber unstetige L "o sungen in der Variationsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1877.
[7] Rankine W. J. M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Proceedings of the Royal Society of London. London: The Royal Society, 1870. Vol. 18, P. 80–83.
[8] Hugoniot P.H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et sp 'e cialement dans les gaz parfaits, 2e Part // Journal de l' 'E cole Polytechnique, 1887. Vol. 57. P. 3-97.
[9] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961. 267 p.
[10] Bykovtsev G.I., Myasnyankin Yu.M. Sliding surfaces in three-dimensional rigid-plastic bodies // DAN SSSR 1966. Vol. 167. No. 6. pp. 1260-1262.
[11] Bykovtsev G.I., Kretova L.D. On waves of accelerations in ideal elastoplastic bodies // Inzh. magazine MTT. 1967. No. 1. P.102-110.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc. (Phys.-Math.), MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Timofei K. Nesterov, post graduate student, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Nikita E. Stadnik, Minor Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[12] Bykovtsev G.I., Vlasova I.A. Properties of the equations of the spatial problem of the theory of ideal plasticity // Mekh. deformed. solid, solid, Vol. 2. Kuibyshev, 1977. S. 33-68.
[13] Ivlev D.D., Bykovtsev G.I. The theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka, 1971.232 p.
[14] Bykovtsev G.I., Ivlev D.D.The theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998.528 p.

The present study was financially supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00262 “Coupled thermomechanics of micropolar semi-isotropic media”).