Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 110–121

Е. В. Мурашкин

О СВЯЗИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ СОСТОЯНИЯ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе обсуждаются некоторые вопросы моделирования полуизотропных упругих сред. Вводятся квадратичные энергетические формы термодинамического потенциала состояния. Исследуемые энергетические формы полагаются абсолютными инвариантами по отношению к произвольным преобразованиям трехмерного Евклидова пространства (в том числе, при зеркальных отражениях). В результате применения специальных координатных представлений полуизотропных псевдотензоров четвертого ранга можно определить все 9 ковариантно постоянных определяющих псевдоскаляров, характеризующих полуизотропную упругую среду. Выполнено сравнение и получены соотношения, связывающие определяющие скаляры и псевдоскаляры нейберовской, конвенциональной, первой и второй основных естественных энергетических форм, в том числе, с конвенционально используемыми полуизотропными псевдоскалярами: модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характерной микродлиной (являющейся псевдоскаляром отрицательного веса, чувствительным к отражениям трехмерного пространства), и шестью безразмерными псевдоскалярами.

Ключевые слова: псевдотензор, квадратичная энергетическая форма, термодинамический потенциал состояния, определяющий псевдотензор, характерная микродлина, хиральная среда, микрополярный полуизотропный континуум

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012

УДК: 539.374

1. Введение. С использованием специальных координатных представлений для полуизотропных тензоров четвертого ранга можно выполнить редукцию линейного анизотропного микрополярного тела к полуизотропной среде, что позволяет существенно сократить количество определяющих скаляров до девяти. В стандартном подходе, такие скаляры включают модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характеристический размер микроструктуры, а также шесть безразмерных параметров.

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

Поступила 20.03.2023

Наиболее распространненной в современной научной литературе энергетической формой потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений является термодинамический потенциал состояния предложенный в работах [1–3]. Альтернативные подходы к формулировке потенциала напряжений можно найти в работах [4–8]. В данной работе производится анализ различных основных естественных энергетических форм и получены соотношения между определяющими скалярами, включая полуизотропные скаляры, которые широко используются в научных исследованиях.

В статьях [8, 9] были рассмотрены проблемы формулировки энергетических форм упругих микрополярных потенциалов для полуизотропных сред в терминах псевдотензоров, которые играют ключевую роль в моделировании таких систем. Было проведено сравнение и получены соотношения между определяющими скалярами и псевдоскалярами конфенциональной, первой и второй естественных энергетических форм, включая конвенциональные полуизотропные псевдоскаляры. В настоящей работе проводится сравнение указанных основных энергетических форм с энергетической формой, введенной в научный оборот Нейбером в работе [5]. Следовательно, данная работа является продолжением публикаций [8, 9].

2. Кинематика микрополярного тела. Полные псевдовекторы микроповорота в микрополярных теориях задаются как модулированные вектора поворота

$$\overset{[+1]}{\phi}{}^{h} = -\frac{1}{2}\epsilon^{hkl}\lambda_{[kl]}, \quad \overset{[-1]}{\phi}{}_{h} = -\frac{1}{2}\epsilon_{hkl}\lambda^{[kl]}. \tag{1}$$

Ковариантный вектор вихря $\overset{[-1]}{\omega}{}_{h}$ отрицательного веса определяется согласно:

$$\overset{[-1]}{\omega}{}_{h} = \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{h\cdot l}^{\cdot k\cdot}\nabla_{k}u^{l},$$

где ∇_k — ковариантная производная, $\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{h\cdot l}^{\cdot k\cdot}$ специальный символо перестановок, определяемый согласно правилу

$$\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{h\cdot l}^{\cdot k\cdot} = g^{ks}\epsilon_{hsl}. \tag{2}$$

Ковариантный псевдовектор относительного микроповорота $\overset{[-1]}{\varphi}{}_{h}$ отрицательного веса -1 можно определить согласно:

$$\overset{[-1]}{\varphi}{}_{h} = \overset{[-1]}{\phi}{}_{h} - \overset{[-1]}{\omega}{}_{h}.$$

В дальнейшем примем условие малости псевдовектора относительного микроповорота (т.е., $\overset{[-1]}{\varphi}{}_{h}$ стремится к нулю).

Асимметричный тензор малых деформаций может быть введен в рассмотрение согласно

$$\epsilon^{kl} = \epsilon^{(lk)} + \epsilon^{[lk]} = \nabla^{(l}u^{k)} - \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{klh}\overset{[-1]}{\varphi}{}_{h} = \nabla^{l}u^{k} - \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{klh}\overset{[-1]}{\phi}{}_{h},$$

а тензор изгиба кручения

$$\overset{[-1]}{\kappa}{}_{lk} = \nabla_{l}\overset{[-1]}{\phi}{}_{k}.$$

3. Первая основная естественная форма потенциала силовых и моментных напряжений. Микрополярное тело называется полуизотропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются при поворотах координатного репера, т.е. полуизотропны, но, вообще говоря, изменяются при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного Евклидова пространства. Введем микрополярный упругий потенциал $\mathscr{U}$ [7], рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с псевдотензорными аргументами

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(\epsilon_{(ij)}, \overset{[+1]}{\kappa}_{(ij)}, \overset{[+1]}{\varphi}_i, \kappa_i), \tag{3}$$

Упругий потенциал $\mathscr{U}$ по физическому смыслу является объективной величиной и не может меняться при повороте осей системы координат. Поэтому он (также как и его первая вариация $\delta\mathscr{U}$) является абсолютным скаляром. Первая вариация упругого потенциала представляется сбалансированной по весам суммой абсолютных скаляров

$$\delta\mathscr{U} = t^{(ij)}\delta\epsilon_{(ij)} + \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)}\delta\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)} + 2\overset{[-1]}{\tau}_i\delta\overset{[+1]}{\varphi}{}^i + 2\mu^i\delta\kappa_i, \tag{4}$$

где $\overset{[-1]}{\tau}_j$ — ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$2\overset{[-1]}{\tau}_j = -\epsilon_{jik}t^{[ik]}, \quad t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj}\overset{[-1]}{\tau}_j. \tag{5}$$

Ассоциированный (сопутствующий) абсолютный вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (5)

$$2\mu^i = \epsilon^{iks}\overset{[-1]}{\mu}_{[ks]}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{[is]} = e_{isj}\mu^j. \tag{6}$$

В итоге, определяющие уравнения примут вид:

$$t^{(ij)} = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\epsilon_{(ij)}}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)} = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}}, \quad 2\overset{[-1]}{\tau}_i = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\overset{[+1]}{\varphi}{}_i}, \quad 2\mu^i = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\kappa_i}. \tag{7}$$

В качестве потенциала $\mathscr{U}$, который как указывалось выше инвариантен относительно поворотов, трансляций пространства, его инверсий и зеркальных отражений, для анизотропного упругого тела примем

$$\begin{aligned}\mathscr{U} = \underset{1}{C}_{islm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + \underset{2}{\overset{[-2]}{C}}_{islm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \underset{3}{\overset{[-1]}{C}}_{islm}\epsilon_{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \\ + \underset{4}{\overset{[-2]}{C}}_{is}\overset{[+1]}{\varphi}_i\overset{[+1]}{\varphi}_s + \underset{5}{C}_{is}\kappa_i\kappa_s + \underset{6}{C}_{is}\kappa_i\overset{[+1]}{\varphi}_s,\end{aligned} \tag{8}$$

где $\underset{\mathfrak{a}}{\overset{[\mathrm{g}]}{C}}_{islm}$, $\underset{\mathfrak{a}}{\overset{[\mathrm{g}]}{C}}_{is}$ — определяющие псевдотензоры, для которых выполняются условия симметрии

$$\underset{\mathfrak{a}}{\overset{[\mathrm{g}]}{C}}_{islm} = \underset{\mathfrak{a}}{\overset{[\mathrm{g}]}{C}}_{lmis}, \qquad \underset{\mathfrak{a}}{\overset{[\mathrm{g}]}{C}}_{is} = \underset{\mathfrak{a}}{\overset{[\mathrm{g}]}{C}}_{si}.$$

Первой основной энергетической формой потенциала (8) для полуизотропного упругого тела будем называть:

$$\mathscr{U} = \underset{1}{A} g^{is} g^{lm} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + \overset{[-2]}{\underset{2}{A}} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \underset{3}{A} g^{is} g^{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(sm)} +$$
$$+ \overset{[-2]}{\underset{4}{A}} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(il)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(sm)} + \overset{[-2]}{\underset{5}{A}} g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i} \overset{[+1]}{\varphi}{}^{s} + \underset{6}{A} g^{is} \kappa_i \kappa_s +$$
$$+ \overset{[-1]}{\underset{7}{A}} g^{is} g_{lm} \epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} \epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} + \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} \kappa_i \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}, \quad (9)$$

где определяющие псевдоинварианты $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{A}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \ldots, 9;\ g = 0, \pm 1, \pm 2$) с соответствующими весами собственно и задают модель полуизотропной упругой среды. Только три из них, а именно $\overset{[-1]}{\underset{7}{A}}$, $\overset{[-1]}{\underset{8}{A}}$, $\overset{[-1]}{\underset{9}{A}}$, оказываются чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства.

Анизотропные определяющие псевдотензоры для полуизотропной среды примут вид

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{C}_{islm} = \underset{1}{A} g^{is} g^{lm} + \underset{3}{A} g^{il} g^{sm},\\
&\underset{2}{C}_{islm} = \underset{2}{A} g^{is} g^{lm} + \underset{4}{A} g^{il} g^{sm},\\
&\underset{3}{C}^{islm} = \underset{7}{A} g^{is} g^{lm} + \underset{8}{A} g^{il} g^{sm},\\
&\underset{4}{C}_{is} = \underset{5}{A} g_{is}, \qquad \underset{5}{C}_{is} = \underset{6}{A} g_{is}, \qquad \underset{6}{C}_{is} = \underset{9}{A} g_{is}.
\end{aligned} \quad (10)$$

Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений в терминах псевдотензоров в произвольной криволинейной системе координат получаются в виде

$$\begin{cases}
t^{(is)} = 2\underset{1}{A} g^{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + 2\underset{3}{A} g^{il} g^{sm} \epsilon_{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{7}{A}} g^{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)},\\
\overset{[-1]}{\mu}_{(is)} = 2\overset{[-2]}{\underset{2}{A}} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + 2\overset{[-2]}{\underset{4}{A}} g_{il} g_{sm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{7}{A}} g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} \epsilon_{(is)},\\
2\overset{[-1]}{\tau}_i = 2\overset{[-2]}{\underset{5}{A}} g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}{}^{s} + \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} \kappa_i,\\
2\mu^i = 2\underset{6}{A} g^{is} \kappa_s + \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}.
\end{cases} \quad (11)$$

Вместо девяти определяющих псевдоскаляров $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{A}}$, появляющихся в выражении для упругого потенциала (9), удобнее ввести другие определяющие псевдоскаляры:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{A} = G\nu(1-2\nu)^{-1}, && \overset{[-2]}{\underset{2}{A}} = G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} c_3, && \underset{3}{A} = G,\\
&\overset{[-2]}{\underset{4}{A}} = G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L}, && \overset{[-2]}{\underset{5}{A}} = 2G \overset{[-2]}{c_1}, && \underset{6}{A} = G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[+2]}{c_2},\\
&\overset{[-1]}{\underset{7}{A}} = G \overset{[-1]}{L} c_4, && \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} = G \overset{[-1]}{L} c_5, && \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} = G \overset{[-1]}{L} c_6,
\end{aligned} \quad (12)$$

с тем чтобы в итоге пришлось бы иметь дело с двумя размерными и семью безразмерными параметрами:

G — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений);
ν — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности);
$\overset{[-1]}{L}$ — характеристическая микродлина;
$\overset{[-2]}{c}_1$, $\overset{[+2]}{c}_2$, c_3, c_4, c_5, c_6 — не имеющие физической размерности скаляры и псевдоскаляры.

В результате вместо (11) приходим к определяющим уравнениям полуизотропной микрополярной среды:

$$\begin{cases} t^{(is)} = 2G\left(\nu(1-2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm}\right)\epsilon_{(lm)} + G\overset{[-1]}{L}(c_4 g^{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + c_5\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}), \\ \overset{[-1]}{\mu}_{(is)} = 2G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}(c_3 g_{is}g_{lm} + g_{il}g_{sm})\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + G\overset{[-1]}{L}(c_4 g_{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + c_5\epsilon_{(is)}), \\ \overset{[-1]}{\tau}_i = 2G\overset{[-2]}{c}_1 g_{is}\overset{[+1]}{\varphi}{}^s + \dfrac{1}{2}G\overset{[-1]}{L}c_6\kappa_i, \\ \mu^i = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\overset{[+2]}{c}_2 g^{is}\kappa_s + \dfrac{1}{2}G\overset{[-1]}{L}c_6\overset{[+1]}{\varphi}{}^i. \end{cases} \tag{13}$$

4. Вторая основная естественная форма потенциала силовых и моментных напряжений. Введем далее в рассмотрение микрополярный упругий потенциал $\mathscr{U}$, рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема $d\tau$,[2] с естественными псевдотензорными асимметричными аргументами (пока нет разделения на симметричную и антисимметричную части)

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(\epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s}), \tag{14}$$

где ϵ_{ij} — асимметричный тензор деформации; $\overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s}$ — псевдотензор деформации изгиба–кручения. Упругий потенциал полагается абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим в том числе от зеркальных отражений и центральной инверсии трехмерного пространства.

Определяющие уравнения в этом случае примут вид

$$t^{ij} = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\epsilon_{ij}}, \qquad \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot k}}. \tag{15}$$

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела вторая основная энергетическая форма в произвольной системе координат записывается в виде:

$$2\mathscr{U} = \underset{1}{H}{}^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \underset{2}{\overset{[-2]}{H}}{}^{islm}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{is}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm} + \underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{islm}\epsilon_{is}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm}. \tag{16}$$

Отметим, что единственным определяющим псевдотензором четвертого ранга чувствительным к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства оказывается определяющий псевдотензор $\underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{islm}$ отрицательного веса -1.

---

[2]По поводу инвариантных и псевдоинвариантных элементов объема см., например, публикации [10, 11].

Воспользовавшись определяющими соотношениями (15), получим

$$
\begin{aligned}
t^{is} &= \underset{1}{H}{}^{islm}\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{isl\cdot}_{\cdot\cdot\cdot m}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{l\cdot}^{\cdot m}\,,\\
\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot s} &= \overset{[-2]}{\underset{2}{H}}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{l\cdot}^{\cdot m} + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{lmi\cdot}_{\cdot\cdot\cdot s}\epsilon_{lm}\,.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Для определяющих полуизотропных тензоров и псевдотензоров координатные представления получаются в форме [12]

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{H}{}^{islm} &= \underset{1}{a}g^{is}g^{lm} + \underset{1}{b}g^{il}g^{sm} + \underset{1}{c}g^{im}g^{sl}\,,\\
\overset{[-2]}{\underset{2}{H}}{}^{islm} &= \overset{[-2]}{\underset{2}{a}}g^{is}g^{lm} + \overset{[-2]}{\underset{2}{b}}g^{il}g^{sm} + \overset{[-2]}{\underset{2}{c}}g^{im}g^{sl}\,,\\
\overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{islm} &= \overset{[-1]}{\underset{3}{a}}g^{is}g^{lm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{b}}g^{il}g^{sm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}}g^{im}g^{sl}\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Здесь $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{a}},\ \overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{b}},\ \overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{c}}$, $(\mathfrak{a} = 1,2,3; g = 0,-1,-2)$ — девять определяющих псевдоскаляров полуизотропного микрополярного упругого тела. “Метаиндекс” $\mathfrak{a}$ — нумерует определяющие псевдоскаляры. С точки зрения тензорной алгебры $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{a}},\ \overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{b}},\ \overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{c}}$, как минимум, являются полуизотропными (полуизотропными) инвариантами.

Подставив координатные представления (18) в определяющие соотношения (15), получим

$$
\begin{cases}
t^{is} = (\underset{1}{a}g^{is}g^{lm} + \underset{1}{b}g^{il}g^{sm} + \underset{1}{c}g^{im}g^{sl})\epsilon_{lm} +\\
\qquad + \dfrac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}g^{is}g^{lm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{b}}g^{il}g^{sm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}}g^{im}g^{sl})\overset{[+1]}{\kappa}_{lm}\,,\\
\overset{[-1]}{\mu}{}^{is} = (\overset{[-2]}{\underset{2}{a}}g^{is}g^{lm} + \overset{[-2]}{\underset{2}{b}}g^{il}g^{sm} + \overset{[-2]}{\underset{2}{c}}g^{im}g^{sl})\overset{[+1]}{\kappa}_{lm} +\\
\qquad + \dfrac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}g^{is}g^{lm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{b}}g^{il}g^{sm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}}g^{im}g^{sl})\epsilon_{lm}\,.
\end{cases}
\tag{19}
$$

Выделяя симметричную и антисимметричную части в соотношениях (**??**), получим

$$
\begin{cases}
t^{(is)} = \underset{1}{a}g^{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + (\underset{1}{b} + \underset{1}{c})\epsilon^{(is)} + \dfrac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}g^{is}g^{lm}\overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + \dfrac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}\,,\\
\overset{[-1]}{\mu}_{(is)} = \overset{[-2]}{\underset{2}{a}}g_{is}g^{lm}\overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + (\overset{[-2]}{\underset{2}{b}} + \overset{[-2]}{\underset{2}{c}})\overset{[+1]}{\kappa}_{(is)} + \dfrac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}g_{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + \dfrac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\epsilon_{(is)}\,,\\
t^{[is]} = (\underset{1}{b} - \underset{1}{c})\epsilon^{[is]} + \dfrac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} - \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\overset{[+1]}{\kappa}{}^{[is]}\,,\\
\overset{[-1]}{\mu}_{[is]} = (\overset{[-2]}{\underset{2}{b}} - \overset{[-2]}{\underset{2}{c}})\overset{[+1]}{\kappa}_{[is]} + \dfrac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} - \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\epsilon_{[is]}\,.
\end{cases}
\tag{20}
$$

Для ассоциированных псевдовекторов (5) следует

$$
\begin{aligned}
&2\overset{[-1]}{\tau}_s = 2e^{-2}(\underset{1}{b} - \underset{1}{c})\overset{[+1]}{\varphi}_s - (\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} - \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\kappa_s\,,\\
&2\mu^s = 2e^{2}(\overset{[-2]}{\underset{2}{b}} - \overset{[-2]}{\underset{2}{c}})\kappa^s - (\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} - \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\overset{[+1]}{\varphi}{}^s\,.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Вместо определяющих псевдоскаляров $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{a}}$, $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{b}}$, $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{c}}$ можно перейти к конвенциональным определяющим псевдоскалярам (см. [7]).

5. Конвенциональная энергетическая форма полуизотропной упругой среды. Конвенциональной энергетической формой полуизотропной упругой среды будем считать упругий потенциал линейного анизотропного микрополярного тела, предложенный в работах [1–3]. В произвольной системе координат, в терминах абсолютных тензоров конвенциональная энергетическая форма представляется в виде:

$$
\mathscr{U} = \frac{1}{2}a^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}c^{islm}\kappa_{is}\kappa_{lm} + b^{islm}\epsilon_{is}\kappa_{lm}. \tag{22}
$$

Обратим внимание, что в (22) множитель $\dfrac{1}{2}$ отсутствует в последнем слагаемом. Воспользовавшись определяющими соотношениями (15), получим

$$
\begin{aligned}
t^{is} &= a^{islm}\epsilon_{lm} + b^{islm}\kappa_{lm}\,,\\
\mu^{is} &= c^{islm}\kappa_{lm} + b^{islm}\epsilon_{lm}\,.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Координатные представления для определяющих полуизотропных тензоров получаются в форме [13]

$$
\begin{aligned}
a^{islm} &= \lambda g^{is}g^{lm} + (\mu+\alpha)g^{il}g^{sm} + (\mu-\alpha)g^{im}g^{sl}\,,\\
b^{islm} &= \varkappa g^{is}g^{lm} + (\chi+\nu)g^{il}g^{sm} + (\chi-\nu)g^{im}g^{sl}\,.\\
c^{islm} &= \beta g^{is}g^{lm} + (\gamma+\varepsilon)g^{il}g^{sm} + (\gamma-\varepsilon)g^{im}g^{sl}\,,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Выделим в (23) симметричные и антисимметричные конституэнты

$$
\begin{aligned}
t^{is} &= \lambda g^{is}g^{lm}\epsilon_{lm} + 2\mu\epsilon^{(is)} + 2\alpha\epsilon^{[is]} + \varkappa g^{is}g^{lm}\kappa_{lm} + 2\chi\kappa^{(is)} + 2\nu\kappa^{[is]}\,,\\
\mu^{is} &= \beta g^{is}g^{lm}\kappa_{lm} + 2\gamma\kappa^{(is)} + 2\varepsilon\kappa^{[is]} + \varkappa g^{is}g^{lm}\epsilon_{lm} + 2\chi\epsilon^{(is)} + 2\nu\epsilon^{[is]}\,.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

6. Нейберовская энергетическая форма потенциала силовых и моментных напряжений. Применение формализма псевдотензорного анализа к теории микрополярной упругости Нейбера позволяет несколько прояснить ее физический смысл. Нейберовская энергетическая форма анизотроптной микрополярной упругой среды в произвольной системе координат, в терминах абсолютных тензоров представляется в виде [5]:

$$
2\mathscr{A} = E^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + M^{islm}\kappa_{is}\kappa_{lm} + 2K^{islm}\epsilon_{is}\kappa_{lm}. \tag{26}
$$

Воспользовавшись определяющими соотношениями (15), получим

$$
\begin{aligned}
t^{is} &= E^{islm}\epsilon_{lm} + K^{islm}\kappa_{lm}\,,\\
\mu^{is} &= M^{islm}\kappa_{lm} + K^{islm}\epsilon_{lm}\,.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Координатные представления для определяющих центральносимметричных тензоров получаются в форме

$$\begin{aligned}
&E^{islm} = G\Big(\frac{2\nu}{1-2\nu}g^{is}g^{lm} + (1+a)g^{il}g^{sm} + (1-a)g^{im}g^{sl}\Big)\,,\\
&K^{islm} = 0\,.\\
&M^{islm} = 4Gl^2\Big(cg^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm} + bg^{im}g^{sl}\Big)\,,
\end{aligned} \tag{28}$$

Подстановка (28) в определяющие уравнения (27) приводит к выражениям

$$\begin{aligned}
&t^{is} = G\Big(\frac{2\nu}{1-2\nu}g^{is}g^{lm} + (1+a)g^{il}g^{sm} + (1-a)g^{im}g^{sl}\Big)\epsilon_{lm}\,,\\
&\mu^{is} = 4Gl^2\Big(cg^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm} + bg^{im}g^{sl}\Big)\kappa_{lm}\,.
\end{aligned} \tag{29}$$

7. Взаимосвязь определяющих скаляров конвенциональной и второй основной энергетических форм. Сравнивая энергетические формы микрополярных упругих потенциалов (16), (22) и (26), можно сразу же заключить:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{H}^{islm} = a^{islm} = E^{islm}\,,\\
&\underset{2}{H}^{islm} = c^{islm} = M^{islm}\,,\\
&\underset{3}{H}^{islm} = 2\underset{3}{b}^{islm} = 2K^{islm}\,.
\end{aligned} \tag{30}$$

Определяющие скаляры, участвующие в записи различных энергетических форм потенциалов напряжений полуизотропного упругого тела [2, 7, 8], сведены в таблицу.

8. Заключение. В данной работе, с целью установления формул, связывающих различные наборы определяющих постоянных, проведено сравнение конвенциональной, первой, второй основной и Нейберовской энергетических форм упругих потенциалов полуизотропных сред.

(1) В основе развиваемого в статье подхода лежит принцип инвариантности энергии, по отношению к любым преобразованиям трехмерного Евклидова пространства (в том числе, при зеркальных отражениях).

(2) Выполнено сравнение и получены соотношения, связывающие определяющие скаляры конвенциональной, первой, второй естественных и Нейберовской энергетических форм, в том числе, с конвенционально используемыми полуизотропными скалярами: модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характерной микродлиной, и 6 безразмерными постоянными.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 286 p.

[2] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.

[3] Dyszlewicz J. Hemitropic medium // Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. P. 281–332. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7_5.

[4] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2, no. 1. P. 48–69.

Таблица 1. полуизотропные определяющие скаляры

Скаляры первой основной энергетической формы	Скаляры конвенциональной энергетической формы	Скаляры второй основной энергетической формы	Материальные скаляры	Скаляры Неуберовской энергетической формы
$\underset{1}{A}$	$\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{2}\underset{1}{a}$	$G\nu(1-2\nu)^{-1}$	$G\nu(1-2\nu)^{-1}$
$\underset{2}{A}$	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{1}{2}\underset{2}{a}$	GL^2c_3	$2Gl^2c$
$\underset{3}{A}$	μ	$\frac{1}{2}(\underset{1}{b}+\underset{1}{c})$	G	G
$\underset{4}{A}$	γ	$\frac{1}{2}(\underset{2}{b}+\underset{2}{c})$	GL^2	$2Gl^2(1+b)$
$\underset{5}{A}$	2α	$\underset{1}{b}-\underset{1}{c}$	$2Gc_1$	$2Ga$
$\underset{6}{A}$	2ε	$\underset{2}{b}-\underset{2}{c}$	$2GL^2c_2$	$4Gl^2(1-b)$
$\underset{7}{A}$	$\varkappa$	$\frac{1}{2}\underset{3}{a}$	GLc_4	—
$\underset{8}{A}$	2χ	$\frac{1}{2}(\underset{3}{b}+\underset{3}{c})$	GLc_5	—
$\underset{9}{A}$	-4ν	$\underset{3}{c}-\underset{3}{b}$	GLc_6	—

[5] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics. 1966. P. 153–158.

[6] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua. 1968. P. 109–113.

[7] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.

[8] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциалов асимметричных тензоров напряжений в механике гемитропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 3(53). С. 118–127.

[9] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 108–115.

[10] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.

[11] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 2. p. 205–213.

[12] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического

университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127.

[13] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.

E. V. Murashkin

ON THE RELATIONSHIP OF MICROPOLAR CONSTITUTIVE PARAMETERS OF THERMODYNAMIC STATE POTENTIALS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to some problems concerning modeling semi-isotropic elastic media. Several quadratic energy forms of a thermodynamic state potential are introduced in terms of pseudotensors. These energy forms are assumed to be absolute invariants with respect to arbitrary transformations of the three-dimensional Euclidean space (including mirror reflections). As a result of applying special coordinate representations of semi-isotropic (semi-isotropic) pseudotensors of the fourth rank, it is possible to determine 9 covariantly constant constitutive pseudoscalars characterizing a semi-isotropic elastic medium. The Neuber's, conventional, first and second base natural energy forms are compared and equations are derived for constitutive scalars and pseudoscalars, including the conventional semi-isotropic pseudoscalars: shear modulus, Poisson's ratio, characteristic microlength (a pseudoscalar of negative weight, sensitive to reflections of three-dimensional space), and six dimensionless pseudoscalars.

Keywords: pseudotensor, quadratic energy form, thermodynamic state potential, constitutive pseudotensor, characteristic microlength, chiral medium, micropolar semi-isotropic continuum

REFERENCES

[1] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 286 p.
[2] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
[3] Dyszlewicz J. Hemitropic medium // Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. P. 281–332. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7_5.
[4] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.
[5] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциалов асимметричных тензоров напряжений в механике гемитропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 3(53). С. 118–127.
[6] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 108–115.
[7] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2, no. 1. P. 48–69.
[8] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics. 1966. P. 153–158.
[9] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua. 1968. P. 109–113.
[10] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.

Murashkin Evgenii Valeryevich, Cand. Sci. (Phys.-Math.), MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

[11] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 2. p. 205–213.

[12] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.

[13] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). с. 106–115.

[14] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127.

The present study was financially supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00262 “Coupled thermomechanics of micropolar semi-isotropic media”).