

А. Н. Спорыхин¹, Ю. Д. Щеглова¹

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА ПРИ СЕЙСМИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ ЯДРА

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе на основе реологических моделей сложных сред упруговязкопластической дилатирующей и несжимаемой упруговязкопластической, а также классической несжимаемой идеально пластической среды определено напряженно-деформированное состояние сферического тела при постоянной внешней и динамической внутренней нагрузках. Исследовано осесимметричное состояние тела. Определены поля перемещений и напряжений в упругих и пластических областях.

Ключевые слова: напряжение, перемещение, упругость, пластичность, вязкость, дилатансия, осесимметричное состояние.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.001

УДК: 539.3

1.

Согласно принятой точки зрения [1] Земля состоит из мантии и ядра (рис. 1), при этом структура ядра трехслойна.

Ниже в рамках предложенной структурной модели Земли, представленной в виде кусочно-неоднородного сферического тела (рис. 2), исследуется его поведение при воздействии динамических нагрузок. По внешнему контуру тела равномерно распределена нагрузка интенсивности q , по контуру полости радиуса a нагрузка P , выражение для которых имеет вид

$$P = P_0 e^{\hat{a}t}, \quad q = q_0, \quad t_* \leq t < t_0, \quad (1)$$

где q_0 — атмосферное давление, \hat{a} — известная константа.

© Спорыхин А. Н., Щеглова Ю. Д., 2023

Спорыхин Анатолий Николаевич

e-mail: anatoli.sporuyhin@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

Щеглова Юлия Дмитриевна

e-mail: scheglova@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.07.2023



Рис. 1. Строение Земли

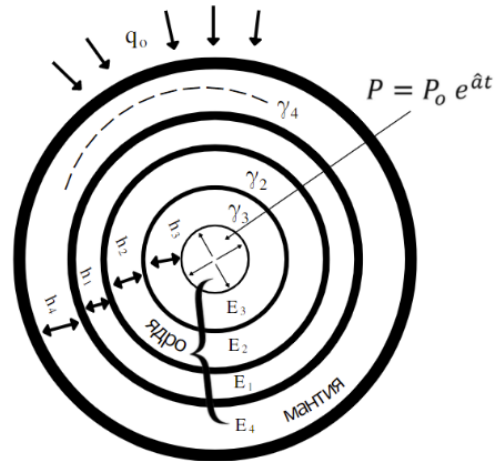


Рис. 2. Схематическое представление строения Земли

Заметим, что авторы не претендуют на общность модели, так как данная модель лишь приближена к внутренней структуре Земли и в рамках которой делается попытка анализа поведения (отказа) Земли при динамическом деформировании её ядра. Очевидно, что расчет поведения выбранного тела имеет большое значение при прогнозировании чрезвычайных ситуаций.

Будем полагать, что при действии динамической нагрузки (1) мантия и все слои ядра смыкаются, и после этого деформируются совместно без смещения относительно друг друга. При этом возникающие на линии сопряжения слоев ядра и мантии сжимающие усилия таковы, что образовавшиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры второго и третьего слоев ядра и мантии (четвертый слой). Так как для структуры мантии характерны рыхлые породы, для второго и третьего

слоев ядра скальные породы и для первого слоя ядра — жидкая металлическая среда, то будем использовать модели сложных сред, в которых учитываются такие свойства, обнаруживаемые у реальных физических тел, как упругость, пластичность, вязкость, упрочнение при динамическом процессе деформирования.

В качестве определяющих соотношений принимаются:

— в упругой зоне V^e связь между напряжениями и деформациями будем определять законом Гука

$$\sigma_j^\beta = \lambda \varepsilon_k^k g_j^\beta + 2\mu \varepsilon_j^\beta, \quad (2)$$

где λ и μ — параметры Ламе, g_j^β — компоненты метрического тензора

— пластическую область мантии V_4^p будем представлять соотношениями теории упрочняющегося упруговязкопластического тела модели Ивлева-Спорыхина [2,3], которая учитывает необратимую сжимаемость, с функцией нагружения в виде

$$F = \alpha \sigma_1 - \sqrt{(S_{ij} - c e_{ij}^p - \eta \dot{e}_{ij}^p)(S_{ij} - c e_{ij}^p - \eta \dot{e}_{ij}^p)} - k = 0, \quad (3)$$

где α — скорость дилатансии, η — коэффициент вязкости, c — коэффициент упрочнения, k — предел текучести, $\sigma_1 = \sigma_{kk}/3$ — первый инвариант тензора напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3$ — девиаторы тензоров напряжений и деформаций, соответственно.

Такой выбор (3) обусловлен тем, что в общем случае, согласно экспериментам [4], горные породы при деформировании являются упруговязкопластическими (EVP) дилатирующими средами. Соотношения, определяющие зависимость между компонентами тензора скоростей пластических деформаций и напряжениями принимаются в форме [5]

$$\dot{\varepsilon}_j^{p\beta} = \xi \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^\beta} + \psi(\sigma_1) \dot{\sigma}_1 \delta_j^\beta, \quad \psi(\sigma_1) = \frac{d\varphi_1}{d\sigma_1}, \quad (4)$$

где $\varphi_1(\sigma_1) = \varepsilon_1^p$ — функция объемного нагружения, которая определяется из экспериментов, ε_1^p — первый инвариант тензора пластических деформаций, $\psi(\sigma_1) = const$. Это допустимо, если имеет место линейная зависимость, то есть $\sigma_1 = k\varepsilon_1^p$, тогда $\psi(\sigma_1) = \frac{\sigma_1}{k}$ и, следовательно, $\psi = \frac{d\phi}{d\sigma_1} = \frac{1}{k} = const$ (k — предел текучести).

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой ε_{ij}^e и пластической ε_{ij}^p составляющих

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (5)$$

причем упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука (2).

Во втором и третьем слое ядра в пластической области будем использовать модель S_p [6] несжимаемого упруговязкопластического тела, к которой приходим, полагая в соотношениях (3), (4) $\alpha = 0$, $\psi = 0$. Пластическая составляющая объемной деформации удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{kk}^p = 0. \quad (6)$$

В упругих зонах слоев 2 и 3 связь между напряжениями и деформациями также будем определять законом Гука (2).

На границе S_γ ($\gamma = 2, 3, 4$) раздела зон упругой и пластической областей слоев, а также на линии контакта слоев должны выполняться условия сплошности для перемещений

$$[u_j] = 0 \quad (7)$$

и поверхностных сил

$$\left[N_j \sigma_\beta^j \right] = 0, \quad (8)$$

где N_j — орты нормали к поверхности S_γ .

И, наконец, жидкий металлический первый слой ядра охарактеризуем моделью несжимаемого идеально пластического тела Мизеса, к которой приходим, полагая в соотношениях (3), (4) наряду с указанным выше, $\eta = 0$, $c = 0$.

Далее согласно [4] примем, что вязкость слоев горных пород ядра и мантии возрастает пропорционально времени процесса деформирования, то есть

$$\eta_n = \eta_{0n} t \quad (n = 2, 3, 4). \quad (9)$$

Значения модуля η_{0n} для различных пород приведены в [4].

Малые деформации слоев среды (горных пород) будем характеризовать соотношениями Коши

$$2\varepsilon_j^i = \nabla_j u^i + \nabla^i u_j, \quad (10)$$

где u_j — компоненты вектора перемещений, символ ∇_j обозначает ковариантную производную по j -ой компоненте.

Присоединяя к уравнениям (2)-(10) уравнения движения

$$\nabla_i \sigma_j^i - \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0 \quad (\rho - \text{плотность материала}) \quad (11)$$

и граничные условия на внешней Σ_4 и внутренней Σ_3 поверхностях

$$N_j \sigma_\beta^j = P_\beta \quad (P_\beta - \text{составляющие вектора поверхностных сил}), \quad (12)$$

а также начальные условия, получим замкнутую математическую задачу для кусочно неоднородного сферического тела при нагружении.

Далее физико-механическим параметрам каждой из шести зон тела V_s^p , V_s^e следует приписывать индексы $s = 2, 3, 4$, соответственно, а для металлического включения V^p индекс 1, то есть V_1^p . Аналогичную запись будем соблюдать для компонент тензора напряжений, деформаций и перемещений.

2.

Задача решается в сферической системе координат. С учетом осевой симметрии определяющие уравнения (2)-(10) рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

— уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (13)$$

— закон Гука

$$\sigma_r = \lambda (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) + 2\mu \varepsilon_r, \quad \sigma_\theta = \lambda (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) + 2\mu \varepsilon_\theta, \quad (14)$$

— функция нагружения

$$\alpha \sigma_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} (S_r - c \varepsilon_r^p - \eta \dot{\varepsilon}_r^p) - k = 0, \quad (15)$$

— ассоциированный закон пластического течения

$$\dot{\varepsilon}_r^p = \xi \left(\frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \psi \dot{\sigma}_1, \quad \dot{\varepsilon}_\theta^p = \xi \left(\frac{\alpha}{3} - \sqrt{\frac{1}{6}} \right) + \psi \dot{\sigma}_1, \quad (\psi = \text{const}) \quad (16)$$

— условие несжимаемости

$$\varepsilon_r^p + 2\varepsilon_\theta^p = 0, \quad (17)$$

— соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (18)$$

— соотношения для полных деформаций в пластической области

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p. \quad (19)$$

Граничные условия (12) и условия сопряжения (7), (8) на упругопластических границах слоев принимают вид

$$\sigma_{r4}^e|_{r=b} = q_0, \quad \sigma_{r3}^p|_{r=a} = P, \quad [u]|_{r=\gamma_s} = 0, \quad [\sigma_r]|_{r=\gamma_s} = 0, \quad [\sigma_\theta]|_{r=\gamma_s} = 0 \quad (s = 2, 3, 4). \quad (20)$$

В предположении, что в момент начала пластического течения $t = t_*$ зарождение пластической области начинается от границ внутренней полости шара (третий слой) и, соответственно, внутренних границ второго и четвертого слоев шара, начальные условия задаются в форме

$$\gamma_3|_{t=t_*} = a, \quad \gamma_2|_{t=t_*} = a + h_3, \quad \gamma_4|_{t=t_*} = a + h_1 + h_2 + h_3, \quad (21)$$

где h_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) — толщина слоев.

Условия на поверхности контакта слоев таковы

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}^p &= \sigma_{r4}^p, \quad u_1^p = u_4^p \quad \text{при } r = a + h_1 + h_2 + h_3, \\ \sigma_{r1}^p &= \sigma_{r2}^e, \quad u_1^p = u_2^e \quad \text{при } r = a + h_2 + h_3, \\ \sigma_{r2}^p &= \sigma_{r3}^e, \quad u_2^p = u_3^e \quad \text{при } r = a + h_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно (1) искомые функции принимают вид

$$\Phi(r, t) = \Phi(r)e^{\hat{a}t}. \quad (23)$$

Вследствие осевой симметрии имеем

$$S_\theta = S_\phi = -\frac{1}{2}S_r, \quad e_\theta = e_\phi = -\frac{1}{2}e_r.$$

Тогда функция нагружения (15) принимает вид

$$\left(\alpha - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \sigma_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} [\sigma_r - (c_4 + \eta_4 \hat{a}) (\varepsilon_r^p - \varepsilon_1^p)] - k_{04}, \quad k_{04} = k_4 e^{-\hat{a}t}. \quad (24)$$

Из ассоциированного закона течения (16) следует соотношение

$$(\varepsilon_r^p - \psi \sigma_1) \left(\frac{\alpha}{3} - \sqrt{\frac{1}{6}}\right) = (\varepsilon_\theta^p + \psi \sigma_1) \left(\frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad (25)$$

где $\sigma_1 = \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_\theta)$, $\varepsilon_1^p = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^p + 2\varepsilon_\theta^p)$. Исключая из соотношений (24) и (25) σ_1 и ε_1^p , привлекая при этом закон Гука (2) и (5), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^p &= \beta_1 (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) + \beta_2 (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) + \beta_3 k_0, \\ \varepsilon_\theta^p &= \beta_4 (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) + \beta_5 (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) + \beta_6 k_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{3\lambda_4 + 2\mu_4}{\delta_3} \left[\alpha \left(\frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \psi\delta_2 \right], \quad \beta_2 = \frac{4\mu_4}{\delta_3} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_1 \right), \\ \beta_3 &= \frac{3}{\delta_3} \left(\frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_1 \right), \quad \beta_4 = \frac{3\lambda_4 + 2\mu_4}{\delta_3} \left[\alpha \left(\frac{\alpha}{3} - \sqrt{\frac{1}{6}} \right) + \psi\delta_2 \right], \\ \beta_5 &= \frac{4\mu_4}{\delta_3} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\alpha}{3} - \sqrt{\frac{1}{6}} \psi_1 \right), \quad \beta_6 = \frac{3}{\delta_3} \left(\frac{\alpha}{3} - \sqrt{\frac{1}{6}} \psi_1 \right),\end{aligned}\tag{27}$$

$$\delta_1 = c_4 + \eta_4 \hat{a}, \quad \delta_2 = 2\mu_4 + \delta_1, \quad \delta_3 = (3\lambda_4 + 2\mu_4)\alpha^2 + 3\delta_2\psi_1, \quad \psi_1 = 1 + (3\lambda_4 + 2\mu_4)\psi.$$

Используя уравнения движения (13), закон Гука (14), соотношения Коши (18), а также соотношения (19) и (26), для определения перемещений в пластической области мантии V_4^p получаем дифференциальное уравнение

$$\Delta_{11}u_{,rr} + \Delta_{12}\frac{1}{r}u_{,r} + \Delta_{13}\frac{u}{r^2} + \Delta_{14}\frac{1}{r} - \rho\hat{a}^2u = 0.\tag{28}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= (\lambda_4 + 2\mu_4)(\beta_1 + \beta_2 - 1) + 2\lambda_4(\beta_4 + \beta_5), \\ \Delta_{12} &= -[2(\lambda_4 + 4\mu_4)\beta_1 - (\lambda_4 - 2\mu_4)\beta_2 + 4(\lambda_4 - \mu_4)\beta_4 - 2(\lambda_4 + 2\mu_4)(\beta_5 + 1)], \\ \Delta_{13} &= -[(\lambda_4 - 2\mu_4)(\beta_2 - 2) - 2(\lambda_4 + 2\mu_4)(1 - 2\beta_4 + \beta_5)], \\ \Delta_{14} &= -4k_{04}\mu_4(\beta_6 - \beta_3).\end{aligned}\tag{29}$$

Далее ограничимся квазистатической постановкой, тогда решение уравнения (28) имеет вид

$$u_4^p = A_4 r^{-(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varkappa)} + B_4 r^{-(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varkappa)} + \frac{k_{04}\psi_1}{\alpha(3\lambda_4 + 2\mu_4)} r,\tag{30}$$

где

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\delta_4^2 - \delta_5^2}}{\delta_4 - \delta_5}, \quad \delta_4 = 3(3\lambda_4 + 2\mu_4)\delta_2 - 4\mu_4(6\mu_4\psi_1 - \delta_3), \quad \delta_5 = \mu_4\alpha(3\lambda_4 + 2\mu_4)4\sqrt{6}.$$

Согласно закону Гука (14) и соотношениям (18), (19), (26) и (30) получаем отличные от нуля компоненты тензора напряжений в пластической области V_4^p мантии

$$\begin{aligned}\sigma_{r4}^p &= \Omega_1 A_4 r^{-\frac{3}{2}(\varkappa+1)} - \Omega_2 B_4 r^{\frac{3}{2}(\varkappa-1)} + \frac{k_{04}}{\alpha}, \\ \sigma_{\theta 4}^p &= \Omega_3 A_4 r^{-\frac{3}{2}(\varkappa+1)} - \Omega_4 B_4 r^{\frac{3}{2}(\varkappa-1)} + \frac{k_{04}}{\alpha}.\end{aligned}\tag{31}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{3}{2}(\lambda_4 + 2\mu_4)\omega_1 + 3\lambda_4\omega_3 - \frac{3}{2}(\lambda_4 + 2\mu_4)(\varkappa - 1) - 4\mu_4, \\ \Omega_2 &= \frac{3}{2}(\lambda_4 + 2\mu_4)\omega_2 + 3\lambda_4\omega_4 - \frac{3}{2}(\lambda_4 + 2\mu_4)(\varkappa + 1) + 4\mu_4, \\ \Omega_3 &= \frac{3}{2}\lambda_4\omega_1 + 3(\lambda_4 + 2\mu_4)\omega_3 - \frac{3}{2}\lambda_4(\varkappa - 1) + 2\mu_4, \\ \Omega_4 &= \frac{3}{2}\lambda_4\omega_2 + 3(\lambda_4 + 2\mu_4)\omega_4 - \frac{3}{2}\lambda_4(\varkappa + 1) - 2\mu_4, \\ \omega_1 &= (\varkappa - 1)\beta_1 + (\varkappa + 1)\beta_2, \quad \omega_2 = (\varkappa + 1)\beta_1 + (\varkappa - 1)\beta_2,\end{aligned}$$

$$\omega_3 = (\varkappa - 1)\beta_3 + (\varkappa + 1)\beta_4, \quad \omega_4 = (\varkappa + 1)\beta_3 + (\varkappa - 1)\beta_4.$$

Используя уравнения равновесия (13), закон Гука (14) и соотношения Коши (18) для определения перемещений в упругих областях V_s^e ($s = 2, 3, 4$) мантии и ядра, получаем дифференциальное уравнение

$$u_{,rr} + \frac{2}{r}u_{,r} - \frac{2u}{r^2} = 0,$$

из которого находим

$$u_s^e = \frac{C_s}{r^2} + D_s r \quad (s = 2, 3, 4). \quad (32)$$

В соответствии с законом Гука компоненты напряжений в упругой области V_s^e ($s = 2, 3, 4$) мантии и ядра принимают вид

$$\sigma_{rs}^e = (3\lambda_s + 2\mu_s)D_s - \frac{4\mu_s}{r^3}C_s, \quad \sigma_{\theta s}^e = (3\lambda_s + 2\mu_s)D_s + \frac{2\mu_s}{r^3}C_s. \quad (33)$$

Здесь физико-механическим параметрам приписан индекс $s = 2, 3, 4$, соответственно.

В пластической области второго V_2^p и, соответственно, третьего слоя V_3^p ядра уравнение (28) для определения перемещений при $\alpha = \psi = 0$ принимает вид

$$u_{,rr} + \frac{2}{r}u_{,r} - \frac{2}{r^2}u + \frac{6\sqrt{6}\mu}{\beta_7} \frac{k_0}{r} = 0.$$

Откуда

$$u_s^p = \frac{A_s}{r^2} + B_s r - \frac{2\sqrt{6}\mu_s}{3\beta_{7s}} k_{0s} r (3\ln r - 1). \quad (34)$$

Для компонент напряжений получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rs}^p &= \frac{4\mu_s(c_s + \eta_s \hat{a})}{(2\mu_s + c_s + \eta_s \hat{a})} \frac{A_s}{r^3} + (3\lambda_s + 2\mu_s)B_s - \frac{2\sqrt{6}\mu_s(3\lambda_s + 2\mu_s)}{3\beta_{7s}} k_{0s}(3\ln r - 1), \\ \sigma_{\theta s}^p &= \frac{2\mu_s(c_s + \eta_s \hat{a})}{(2\mu_s + c_s + \eta_s \hat{a})} \frac{A_s}{r^3} + (3\lambda_s + 2\mu_s)B_s - \frac{2\sqrt{6}\mu_s(3\lambda_s + 2\mu_s)}{3\beta_{7s}} k_{0s}(3\ln r + 0, 5), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{7s} &= 2\mu_s(3\lambda_s + 2\mu_s) + 3(c_s + \eta_s \hat{a})(\lambda_s + 2\mu_s), \quad s = 2, 3, \\ k_{0s} &= k_s(T)e^{\hat{a}t}, \quad T - \text{температура, } k_3(T) > k_2(T). \end{aligned}$$

Наконец, для металлической части ядра ($\lambda = \psi = c_1 = \eta_1 = 0$) согласно (34) и (35) получаем

$$\begin{aligned} u_1^p &= \frac{A_1}{r^2} + B_1 r - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01} r (3\ln r - 1), \\ \sigma_{r1}^p &= (3\lambda_1 + 2\mu_1)B_1 - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01} r (3\ln r - 1), \\ \sigma_{\theta 1}^p &= (3\lambda_1 + 2\mu_1)B_1 - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01} r (3\ln r + 0, 5). \end{aligned} \quad (36)$$

Подчиняя полученные решения (30)-(36) граничным условиям и условиям сопряжения (20), условиями на контактах слоев (22) и начальным условиям (21) для констант интегрирования $A_1, B_1, A_s, B_s, C_s, D_s$ ($s = 2, 3, 4$) и упругопластических границ $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ получаем систему уравнений

$$(3\lambda_4 + 2\mu_4)D_4 - \frac{4\mu_4}{b^3}C_4 = q_0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4\mu_3(c_3 + \eta_3\hat{a})}{(2\mu_3 + c_3 + \eta_3\hat{a})} \frac{A_3}{a^3} + (3\lambda_3 + 2\mu_3)B_3 - \frac{2\sqrt{6}\mu_3(3\lambda_3 + 2\mu_3)}{3\beta_{73}} k_{03}(3\ln a - 1) = P_0, \\
& \frac{4\mu_2(c_2 + \eta_2\hat{a})}{(2\mu_2 + c_2 + \eta_2\hat{a})} \frac{A_2}{(a + h_3)^3} + (3\lambda_2 + 2\mu_2)B_2 - \frac{2\sqrt{6}\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{3\beta_{72}} k_{02}(3\ln(a + h_3) - 1) = \\
& \quad = (3\lambda_3 + 2\mu_3)D_3 + \frac{2\mu_3}{(a + h_3)^3} C_3, \\
& \frac{A_2}{(a + h_3)^2} + B_2(a + h_3) - \frac{2\sqrt{6}}{3\beta_{72}} k_{02}(a + h_3)(3\ln(a + h_3) - 1) = \\
& \quad = \frac{C_3}{(a + h_3)^2} + D_3(a + h_3), \\
& (3\lambda_1 + 2\mu_1)B_1 - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01}(a + h_2 + h_3)(3\ln(a + h_2 + h_3) - 1) = \\
& \quad = (3\lambda_2 + 2\mu_2)D_2 - \frac{4\mu_2}{(a + h_2 + h_3)^3} C_2, \\
& \quad \frac{A_1}{(a + h_2 + h_3)^2} + B_1(a + h_2 + h_3) - \\
& \quad - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01}(a + h_2 + h_3)(3\ln(a + h_2 + h_3) - 1) = \\
& \quad = \frac{C_2}{(a + h_2 + h_3)^2} + D_2(a + h_2 + h_3), \\
& \Omega_1 A_4(a + h_1 + h_2 + h_3)^{-\frac{3}{2}(\varkappa+1)} - \Omega_2 B_4(a + h_1 + h_2 + h_3)^{\frac{3}{2}(\varkappa-1)} + \frac{k_{04}}{\alpha} = \\
& = (3\lambda_1 + 2\mu_1)B_1 - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01}(a + h_1 + h_2 + h_3)(3\ln(a + h_1 + h_2 + h_3) - 1), \\
& \quad A_4(a + h_1 + h_2 + h_3)^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varkappa\right)} + B_4(a + h_1 + h_2 + h_3)^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varkappa\right)} + \\
& \quad + \frac{k_{04}\psi_1}{\alpha(3\lambda_4 + 2\mu_4)}(a + h_1 + h_2 + h_3) = \\
& \quad = \frac{A_1}{(a + h_1 + h_2 + h_3)^2} + B_1(a + h_1 + h_2 + h_3) - \\
& \quad - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01}(a + h_1 + h_2 + h_3)(3\ln(a + h_1 + h_2 + h_3) - 1), \\
& \quad \frac{4\mu_3(c_3 + \eta_3\hat{a})}{2\mu_3 + c_3 + \eta_3\hat{a}} \frac{A_3}{\gamma_3^3} + (3\lambda_3 + 2\mu_3)B_3 - \\
& \quad - \frac{2\sqrt{6}\mu_3(3\lambda_3 + 2\mu_3)}{3\beta_{73}} k_{03}(3\ln\gamma_3 - 1) = (3\lambda_3 + 2\mu_3)D_3 - \frac{4\mu_3}{\gamma_3^3}, \\
& \quad \frac{A_3}{\gamma_3^2} + B_3\gamma_3 - \frac{2\sqrt{6}}{3\beta_{73}} k_{03}\gamma_3(3\ln\gamma_3 - 1) = \frac{C_3}{\gamma_3^2} + D_3\gamma_3, \\
& \quad \frac{4\mu_2(c_2 + \eta_2\hat{a})}{(2\mu_2 + c_2 + \eta_2\hat{a})} \frac{A_2}{\gamma_2^3} + (3\lambda_2 + 2\mu_2)B_2 - \\
& \quad - \frac{2\sqrt{6}\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{3\beta_{72}} k_{02}(3\ln\gamma_2 - 1) = (3\lambda_2 + 2\mu_2)D_2 - \frac{4\mu_2}{\gamma_2^3} C_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{A_2}{\gamma_2^2} + B_2\gamma_2 - \frac{2\sqrt{6}}{3\beta_{\gamma_2}} k_{02}\gamma_2(3\ln\gamma_2 - 1) = \frac{C_2}{\gamma_2^2} + D_2\gamma_2, \\
& \Omega_1 A_4 \gamma_4^{-\frac{3}{2}(\varkappa+1)} - \Omega_2 B_4 \gamma_4^{\frac{3}{2}(\varkappa-1)} + \frac{k_{04}}{\alpha} = (3\lambda_4 + 2\mu_4)D_4 - \frac{4\mu_4}{\gamma_4^3}, \\
& A_4 \gamma_4^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varkappa\right)} + B_4 \gamma_4^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varkappa\right)} + \frac{k_{04}\psi_1}{\alpha(3\lambda_4 + 2\mu_4)} \gamma_4 = \frac{C_4}{\gamma_4^2} + D_4\gamma_4, \\
& \frac{2\mu_2(c_2 + \eta_2\hat{a})}{(2\mu_2 + c_2 + \eta_2\hat{a})} \frac{A_2}{\gamma_2^3} + (3\lambda_2 + 2\mu_2)B_2 - \frac{2\sqrt{6}\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{3\beta_{\gamma_2}} k_{02}(3\ln\gamma_2 + 0,5) = \\
& \quad = (3\lambda_2 + 2\mu_2)D_2 + \frac{2\mu_2}{\gamma_2^3} C_2, \\
& \frac{2\mu_3(c_3 + \eta_3\hat{a})}{(2\mu_3 + c_3 + \eta_3\hat{a})} \frac{A_3}{\gamma_3^3} + (3\lambda_3 + 2\mu_3)B_3 - \frac{2\sqrt{6}\mu_3(3\lambda_3 + 2\mu_3)}{3\beta_{\gamma_3}} k_{03}(3\ln\gamma_3 + 0,5) = \\
& \quad = (3\lambda_3 + 2\mu_3)D_3 + \frac{2\mu_3}{\gamma_3^3} C_3, \\
& \Omega_3 A_4 \gamma_4^{-\frac{3}{2}(\varkappa+1)} - \Omega_4 B_4 \gamma_4^{\frac{3}{2}(\varkappa-1)} + \frac{k_{04}}{\alpha} = (3\lambda_4 + 2\mu_4)D_4 + \frac{2\mu_4}{\gamma_4^3} C_4.
\end{aligned}$$

Данная система уравнений не имеет аналитического решения и требует численного счета. При условии нахождения соотношений для упругопластических границ γ_s ($s = 1, 2, 3$) можно положить в этих выражениях верхние значения для γ_s , то есть $\gamma_3 = a + h_3$, $\gamma_2 = a + h_2 + h_3$, $\gamma_4 = a + h_1 + h_2 + h_3 + h_4$, и прийти к соотношениям, определяющим отказ (исчерпание несущей способности) сферического тела.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Наука и техника. URL: <https://lenta.ru/news/2015/02/10/earth/>.
- [2] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Воронежский Государственный Университет, 1997. 361 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 701 с.
- [4] Михайлюк А. В. Горные породы при неравномерных динамических нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 153 с.
- [5] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. Москва: Наука, 1971. 231 с.
- [6] Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел // ПМТФ. 1967. № 4. С. 52–58.

A. N. Sporykhin¹, Yu.D. Shcheglova¹

**SIMULATION OF THE BEHAVIOR OF A SPHERICAL OBJECT DURING
SEISMIC ACTIVITY OF THE CORE**

¹*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

Abstract. Based on the rheological models of complex media of an elastoviscoplastic dilating and incompressible elastoviscoplastic, as well as a classical incompressible ideally plastic medium, the stress-strain state of a spherical body is determined under constant external and dynamic internal loads. The axisymmetric state of the body is studied. Displacement and stress fields in elastic and plastic regions are determined.

Keywords: stress, displacement, elasticity, plasticity, viscosity, dilatancy, axisymmetric state.

REFERENCES

- [1] Science and technology. URL: <https://lenta.ru/news/2015/02/10/earth/>.
- [2] Sporykhin A. N. Perturbation method in problems of stability of complex media. Voronezh: Voronezh State University, 1997. 361 c.
- [3] Ishlinsky A. Yu., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 701 c.
- [4] Mikhailiyuk A. V. Rocks under uneven dynamic loads. Kyiv: Sciences. thought, 1980. 153 c.
- [5] Ivlev D. D., Bykovtsev G. I. Theory of hardening plastic body. Moscow: The science, 1971. 231 c.
- [6] Sporykhin A. N. On the stability of deformation of elastoviscoplastic bodies // PMTF. 1967. № 4. C. 52–58.

Sporykhin Anatoliy Nikolaevich, Dr. Sci. Phys. and Math., Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Shcheglova Yuliya Dmitrievna, Candidate Sci. Phys. and Math., Ass. Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.