

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

## УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ

*Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика  
М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия*

**Аннотация.** Исследуется упруго - пластическое кручение многослойного стержня. Стержень состоит из нескольких слоев. Упругие свойства слоев различны, но коэффициент пластичности у всех слоев одинаков. Для простоты в статье рассмотрен стержень, состоящий из трех слоев. Границы контакта слоев параллельны. Боковая граница стержня свободна от напряжений, на границах раздела слоев непрерывны напряжения и перемещения. В статье построены законы сохранения, которые позволили вычислить компоненты тензора напряжений с помощью контурных интегралов по границе слоев. Во всех точках второй инвариант тензора напряжений сравнивается с пределом текучести. В тех точках, где достигается предел текучести при чистом сдвиге, реализуется пластическое состояние, в остальных – упругое. В результате решения задачи можно построить границу между пластической и упругой областями. Этот метод позволяет построить упруго-пластические границы для стержней различных профилей. Авторы сделают это в последующих публикациях.

**Ключевые слова:** упруго-пластическое кручение, многослойный стержень, законы сохранения

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.003

УДК: 539.374

**Введение.** В статье показано использование законов сохранения для решения граничных задач уравнений механики деформируемого твердого тела. В работах [2-11] законы сохранения применялись для решения краевых задач для двумерных уравнений идеальной пластичности. Из этих работ следует, что законы сохранения могут быть более успешно применены для решения краевых задач, чем инфинитезимальные симметрии, которым посвящено достаточное количество работ [1]. Авторы объясняют это тем, что точечные симметрии по своей природе являются локальными, в отличие

---

© Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., 2022

*Сенашов Сергей Иванович*

**e-mail:** sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

*Савостьянова Ирина Леонидовна*

**e-mail:** savostyanova@sibsau.ru, кандидат педагогических наук, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Поступила 05.07.2023

от глобальных по своей сути законов сохранения. Авторы использовали законы сохранения для решения упругопластических задач о кручении однородных стержней и изгибе однородных консолей, а также решению упругопластических задач для пластин ограниченных размеров с отверстиями [12-17]. В настоящей работе показано, что законы сохранения можно успешно применять и для решения краевых задач для конструкций, изготовленных из слоистых материалов.

**Постановка задачи.** Дан прямолинейный стержень, поперечное сечение которого изображено на рисунке 1. Пусть  $S_1, S_2, \dots, S_n$  - области, состоящие из упруго-пластического изотропного материала, у которых предел пластичности при чистом сдвиге одинаковый и равен  $k$ , а упругие постоянные Ламе различны и равны  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots, \lambda_n, \mu_n$  соответственно. Пусть линия раздела материалов прямолинейна. Выберем ось координат  $Ox$  вдоль линии раздела. Далее, для простоты вычислений, не теряя общности, будем считать  $n = 3$ . Предполагается, как обычно, что боковая поверхность стержня свободна от напряжений, а стержень скручивается парой сил с моментом

$$M = \iint (y\sigma_{13} - x\sigma_{23}) dx dy.$$

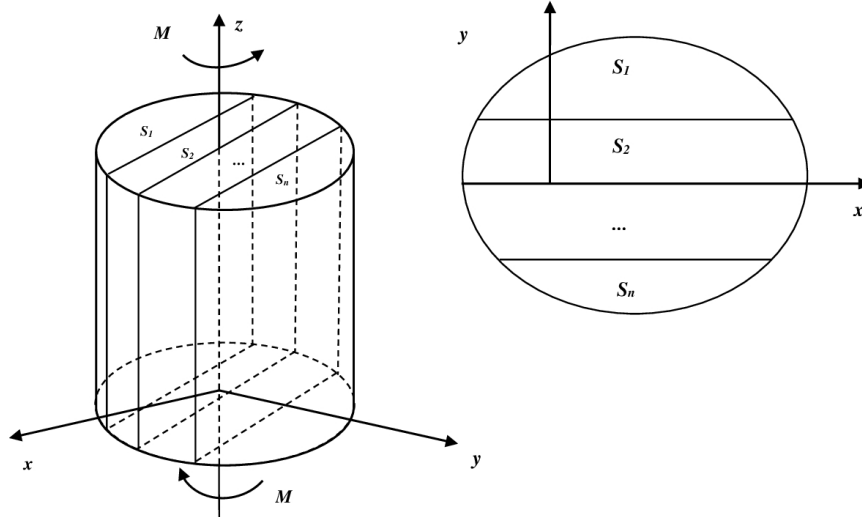


Рис. 1. Скручивание многослойного стержня

В этом случае уравнения, описывающие напряженное состояние в области  $S_i$   $i = 1, 2, 3$  имеют вид

$$F_1 = \partial_x \sigma_{13} + \partial_y \sigma_{23} = 0, F_2 = \partial_y \sigma_{13} - \partial_x \sigma_{23} + \mu_i \omega = 0, \quad \mu_i \omega = K_i, \quad (1)$$

где  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  - компоненты тензора напряжений,  $\omega$  - угол закручивания, он предполагается постоянным.

На боковой поверхности стержня граничные условия следующие

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0, \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2, \quad (2)$$

они означают, что боковая поверхность находится в пластическом состоянии и свободна от напряжений. Из (2) следует

$$\sigma_{13} = kn_1, \sigma_{23} = -kn_2. \quad (3)$$

Также предполагаем, что на линиях раздела  $MN$  и  $CD$  компоненты тензора напряжений непрерывны, это означает отсутствие разрыва напряжений для данного стержня вдоль линий контакта.

**Законы сохранения.** Законом сохранения назовем выражение вида

$$A_x + B_y = \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2, \quad (4)$$

где  $\rho_1, \rho_2$  - некоторые функции, одновременно тождественно не равные нулю, буквенные индексы внизу означают производные по соответствующим переменным.

*Замечание.* Более подробно о законах сохранения, их вычислении для разных уравнений и систем и применении для решения краевых задач можно найти в [2-11]. Предположим, что

$$A = \alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3, B = \beta^1 u + \beta^2 v + \beta^3, \quad (5)$$

где для удобства обозначим  $\sigma_{13} = u, \sigma_{23} = v, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta^1, \beta^2, \beta^3$  - являются функциями только  $x, y$ .

Подставляя формулы (5) в выражение (4) получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1, \alpha_x^1 - \alpha_y^2 = 0, \alpha_y^1 + \alpha_x^2 = 0, \alpha_x^3 + \beta_y^3 = -\alpha^2 K_i, \quad (6)$$

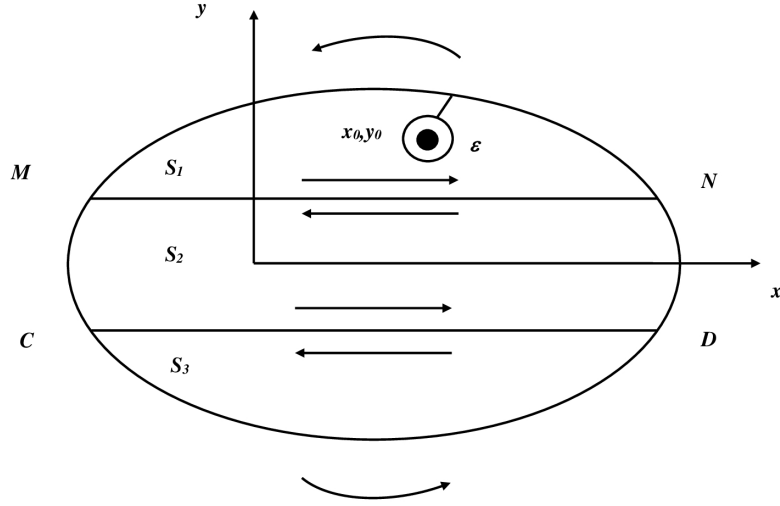
Пусть

$$\alpha_x^{1(i)} - \alpha_y^{2(i)} = 0, \alpha_y^{1(i)} + \alpha_x^{2(i)} = 0, \alpha_x^{3(i)} + \beta_y^{3(i)} = -\alpha^2 K_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

Здесь индекс  $i$  в скобках соответствует области  $S_i$ .

Если в точке  $x_0, y_0$  подынтегральные функции имеют особенность и эта точка находится в круге радиуса  $\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ , то из (4) получаем

$$\begin{aligned} \iint_S (A_x + B_y) dx dy &= \iint_{S_1} (A^1_x + B^1_y) dx dy + \iint_{S_2} (A^2_x + B^2_y) dx dy + \iint_{S_3} (A^3_x + B^3_y) dx dy = \\ &= - \int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_2} A^2 dy - B^2 dx + \int_{L_3} A^3 dy - B^3 dx + \\ &+ \int_{MN} A^1 dy - B^1 dx + \int_{NM} A^2 dy - B^2 dx + \int_{CD} A^2 dy - B^2 dx + \int_{DC} A^3 dy - B^3 dx = 0. \end{aligned}$$

Рис. 2. Вычисление  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  в точке  $x_0, y_0$ 

Имеем вдоль  $MN$  (рис. 2)

$$\int_{MN} A^1 dy - B^1 dx + \int_{NM} A^2 dy - B^2 dx = \int_{MN} (\alpha^{1(1)}u + \alpha^{2(1)}v + \alpha^{3(1)})dy - (-\alpha^{2(1)}u + \alpha^{1(1)}v + \beta^{3(1)})dx +$$

$$+ \int_{NM} (\alpha^{1(2)}u + \alpha^{2(2)}v + \alpha^{3(2)})dy - (-\alpha^{2(2)}u + \alpha^{1(2)}v + \beta^{3(2)})dx = 0.$$

Так как вдоль  $MN$   $dy = 0$ , то для удобства полагаем  $\beta^{3(i)} = 0$ ,  $\alpha_x^{3(i)} = \alpha^{2(i)}K_i$ , поэтому  $\alpha^{1(1)} = \alpha^{1(2)}$ ,  $\alpha^{2(1)} = \alpha^{2(2)}$ .

Аналогичные выражения можно получить и вдоль отрезка  $CD$ . В результате имеем

$$\int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_2} A^2 dy - B^2 dx + \int_{L_3} A^3 dy - B^3 dx. \quad (8)$$

Используем формулу (8) для нахождения функций  $u, v$  в точке.

Для этого рассмотрим решение уравнений (7) в виде

$$\alpha^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \alpha^2 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \alpha^3 = \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx &= \int_{\varepsilon} (\alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3) dy - (-\alpha^2 u + \alpha^1 v) dx = \\ &= \int_{\varepsilon} \left( \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} u - \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} v + \varpi \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0} \right) dy - \\ &- \left( \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} u \right) dx + \int_{\varepsilon} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} v dx. \end{aligned}$$

Пусть  $x - x_0 = \varepsilon \cos \phi$ ,  $y - y_0 = \varepsilon \sin \phi$ , тогда получаем

$$\int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int_0^{2\pi} [(u \cos \phi + v \sin \phi) \cos \phi + (u \sin \phi + v \cos \phi) \sin \phi] d\phi = \int_0^{2\pi} u d\phi = 2\pi u(x_0, y_0).$$

В последнем равенстве использован предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$  и теорема о среднем.

$$\begin{aligned} 2\pi \sigma_{13}(x_0, y_0) &= \int_{L_1} \left( \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0} \right) dy - \\ &- \left( \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\ &+ \int_{L_2} \left( \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_2 \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0} \right) dy - \\ &- \left( \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\ &+ \int_{L_3} \left( \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_2 \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0} \right) dy - \\ &- \left( \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx. \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть решение уравнений (7) имеет вид

$$\alpha^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \alpha^2 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \alpha^3 = \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2). \tag{11}$$

Подставим (11) в (8) и получим

$$\begin{aligned}
2\pi \sigma_{23}(x_0, y_0) = & \int_{L_1} \left( \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x - x_0)^2 + \right. \\
& \left. + (y - y_0)^2) dy - \left( -\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\
& + \int_{L_2} \left( -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x - x_0)^2 + \right. \\
& \left. + (y - y_0)^2) dy - \left( -\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\
& + \int_{L_3} \left( -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x - x_0)^2 + \right. \\
& \left. + (y - y_0)^2) dy - \left( -\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx.
\end{aligned} \tag{12}$$

Формулы, аналогичные (10) и (12), без труда получаем и для точек  $x_0, y_0$ , принадлежащих областям  $S_2, S_3$ .

**Заключение.** Формулы (10), (12) позволяют вычислить значения компонент тензора напряжений во всех точках исследуемого сечения. Далее в каждой точке  $x_0, y_0$  проверяется условие пластичности  $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2$ . В тех точках, где  $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 < k^2$  имеется упругая зона, а где условие не выполняется - имеется пластическая область. Тем самым описанная методика позволяет выделить упругие и пластические зоны и построить упругопластическую границу, которая подлежала определению и заранее была неизвестна.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Москва, Наука, 1978.
- [2] Сенашов С. И. О законах сохранения уравнений пластичности // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320. № 3. С.606.
- [3] Сенашов С.И. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений пластичности. // Доклады РАН. 1995. Т. 345. № 5. С. 619.
- [4] Кирыков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во Наука, 139 с.
- [5] Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math.Soc. 1988. P. 415-439.
- [6] Senashov S. I., Yakchno A. N. Reproduction of solutions for bidimensional ideal plasticity // Journal of Non-Linear Mechanics. 2007. No 42. P. 500–503.
- [7] Senashov S. I., Yakchno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries // Nonlinear analysis. 2009. No 71. P. 1274–1284
- [8] Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA. No 8. 2012. P. 16.
- [9] Senashov S. I., Yakchno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. No 46. P. 355202.
- [10] Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws of Three-Dimensional Perfect Plasticity Equations under von Mises Yield Criterion // Abstract and Applied Analysis. 2013. Article ID 702132. 8 p.
- [11] Гомонова О. В., Сенашов С. И. Определение областей упругого и пластического деформирования в задаче об одноосном растяжении пластины, ослабленной отверстиями. // Журнал ПМТФ. 2021. Т. 62. №1.

- [12] Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Законы сохранения уравнений плоской теории упругости // Вестник СибГАУ. 2014. 1(53). С. 79-81.
- [13] Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Об упругом кручении вокруг трех осей. Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т.24. №1. С. 120-125.
- [14] Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Intern. J. Non. Lin. Mech. 2019. V. 108. P. 7–10.
- [15] Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol.62. No 1. P. 179–186.
- [16] Senashov S. I., Kondrin A. V., Cherepanova O. N. On Elastoplastic Torsion of a Rod with Multiply Connected Cross-Section // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics. 2015. 7(1). P.343-351.
- [17] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics. 2014. 7(2). P.203-208.

*S. I. Senashov, I. L. Savostyanova*

## ELASTIC-PLASTIC TORSION OF A MULTILAYER ROD

*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

**Abstract.** The authors investigate the elastic-plastic torsion of a multilayer rod in this article. According to the condition of the problem, the rod consists of several layers. The elastic properties of the layers are different, but the plasticity coefficient of all layers is the same. For simplicity, the article considers a rod consisting of three layers. The contact boundaries of the layers are parallel. The lateral boundary of the rod is stress-free, stresses and displacements are continuous at the interface of the layers. The authors constructed conservation laws that made it possible to calculate the components of the stress tensor using contour integrals along the boundary of the layers. At all points, the second invariant of the stress tensor is compared with the yield strength. At those points where the yield strength is reached with a pure shear, a plastic state is realized, in the rest – elastic. As a result of solving the problem, it is possible to construct a boundary between the plastic and elastic regions. This method makes it possible to construct elastic-plastic boundaries for rods of various profiles. The authors will do this in subsequent publications.

**Keywords:** elastic-plastic torsion, multilayer rod, conservation laws

## REFERENCES

- [1] Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)
- [2] Senashov S.I. On the laws of conservation of plasticity equations. // Reports of the USSR Academy of Sciences, 1991. Vol. 320. No. 3. P. 606.(in Russian)
- [3] Senashov S.I. Conservation laws and exact solution of the Cauchy problem for plasticity equations. // Reports of the Russian Academy of Sciences. 1995. Vol. 345. No. 5. P. 619. (in Russian)
- [4] Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations. Novosibirsk: Nauka Publishing House. 139 p.(in Russian)

---

*Senashov Sergei Ivanovich*

e-mail: sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

*Savostyanova Irina Leonidovna*

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

- [5] Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of two-dimensional ideal plasticity // Trudy Edinburgh Mathematical Journal. 1988. P. 415-439.
- [6] Senashov S. I., Yakchenko A. N. Reproduction of solutions for two-dimensional ideal plasticity // Journal of Nonlinear Mechanics. 2007. No 42. P. 500-503.
- [7] Senashov S. I., Yakchenko A. N. Deformation of characteristic curves of plane equations of ideal plasticity by point symmetries // Nonlinear analysis. No 71. 2009. P. 1274-1284
- [8] Senashov S. I., Yakchenko A. N. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA 8. 2012. No 071. P. 16.
- [9] Senashov S. I., Yakchenko A. N. Some aspects of the symmetry group of an ideal plane plasticity system // J. Phys. Answer: Mathematics. Theor. No 46. 2013. P. 355202.
- [10] Senashov S. I., Yakchenko A. N. Conservation laws of three-dimensional equations of ideal plasticity according to the von Mises fluidity criterion // Volume of Abstract and Applied Analysis. 2013. Article Id 702132. 8 p.
- [11] Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial stretching of a plate weakened by holes // PMTF Magazine. 2021. Vol. 62. No. 1. (in Russian)
- [12] Senashov S. I., Filyushina E. V. Conservation laws of the equations of the plane theory of elasticity // Bulletin of SibGAU. 2014. No 1(53). P. 79-81.(in Russian)
- [13] Senashov S. I., Savostyanova I. L. On elastic torsion around three axes // Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2021. Vol. 24. No. 1. P. 120-125.(in Russian)
- [14] Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of an elastic-plastic boundary in the problem of stretching a plate weakened by holes // Journal. Lin. Mechanism. 2019. Vol. 108. P. 7-10.(in Russian)
- [15] Gomonova O.V., Senashov S.I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial stretching of a plate weakened by holes // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol.62. No 1. P. 179-186.
- [16] Senashov S. I., Kondrin A. V., Cherepanova O. N. On elastic-plastic torsion of a multi-connected cross-section rod // Siberian Federal University, matematika and physics. 2015. No 7(1). P. 343-351.
- [17] Senashov S. I., Cherepanova Yu. N., Kondrin Yu. V. Elastic-plastic bending of a beam // Siberian Federal University, Mathematics and physics. 2014. No 7(2). P. 203-208.