Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 2 (56). С. 36–40

Б. Г. Миронов[1], *Ю. Б. Миронов*[2]

О КРУЧЕНИИ СЕКТОРА ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

[1]*Российский университет транспорта, г. Москва, Россия*
[2]*Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия*

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию напряженного и деформированного состояний сектора толстостенной трубы из идеального жесткопластического изотропного материала, в предположении, что он закручивается вокруг оси параллельной оси z. Кручение идеально пластических стержней из изотропного, а также анизотропного материалов рассмотрено в работах [1–6]. В [3] рассмотрено также кручение сектора кругового кольца из изотропного материала. В работах [8], [9] исследовано кручение сектора кругового кольца, находящегося под действием линейного давления.

Ключевые слова: кручение стержней, анизотропия, изотропия деформация, напряжение, ассоциированный закон течения, пластичность, упругость.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.004

УДК: 539.374

Пусть изотропный идеально пластический сектор толстостенной трубы с внутренним радиусом равным r и внешним радиусом R, ориентированный в цилиндрической системе координат $\rho\theta z$ причем боковая поверхность сектора параллельна оси z. Сектор трубы закручивается вокруг оси, параллельной оси z и проходящей через точку пересечения средних линий сечения сектора плоскостью $z = 0$, противоположными и равными парами сил. Боковая поверхность сектора трубы свободна от нагрузок. Предполагается, что сектор трубы полностью находится в пластическом состоянии.

Пусть напряженное состояние, возникающее в секторе, характеризуется условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6(\tau_{\rho\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho z}^2) = 6k^2,\ (k - const) \qquad (1)$$

Миронов Борис Гурьевич
e-mail: mbg.chspu@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.
Миронов Юрий Борисович
e-mail: i.b.mironov@mtuci.ru, кандидат технических наук, декан, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 20.09.2023

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0,\\ \frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho}=0,\\ \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0.\end{gathered} \tag{2}$$

При условии, что

$$\sigma_\rho=\sigma_\theta=\sigma_z=\tau_{\rho\theta}=0,$$

из (1) и (2) следует

$$\tau_{\rho z}=\tau_{\rho z}\left(\rho,\,\theta\right),\,\tau_{\theta z}=\tau_{\theta z}\left(\rho,\,\theta\right), \tag{3}$$

$$\tau_{\theta z}^2+\tau_{\rho z}^2=k^2, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0. \tag{5}$$

Продифференцируем соотношение (4) по переменной θ и получим следующее уравнение

$$\tau_{\rho z}\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\theta}+\tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}=0. \tag{6}$$

Умножим соотношение (5) на $\rho\tau_{\theta z}$. Тогда

$$\rho\tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}=-\tau_{\rho z}\tau_{\theta z}. \tag{7}$$

А из (6) и (7) имеем

$$\rho\tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}-\tau_{\rho z}\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\theta}=-\tau_{\rho z}\tau_{\theta z}. \tag{8}$$

Соотношения вдоль характеристик и сами характеристики уравнения (8) определяются из следующей системы

$$\frac{d\rho}{\rho\tau_{\theta z}}=-\frac{d\theta}{\tau_{\rho z}}=\frac{d\tau_{\rho z}}{-\tau_{\rho z}\tau_{\theta z}}. \tag{9}$$

Согласно (9) получим уравнение для компоненты напряжения $\tau_{\rho z}$

$$\frac{d\tau_{\rho z}}{d\rho}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0. \tag{10}$$

Из (11) определяем компоненту напряжения $\tau_{\rho z}$

$$\tau_{\rho z}=\frac{c_1}{\rho} \tag{11}$$

где вдоль характеристики $c_1=const$.

Согласно (4), из (11) получим

$$\tau_{\theta z}=\sqrt{k^2-\frac{c_1^2}{4\rho^2}}. \tag{12}$$

Пусть поперечное сечение сектора трубы определяется следующими условиями $r\leq\rho\leq R$, $\alpha\leq\theta\leq\beta$.

На контуре поперечного сечения сектора трубы вектор касательного напряжения $\tau=(\tau_{\rho z},\,\tau_{\theta z})$ направлен по касательной к нему. Следовательно при $\rho=R$ и в области, примыкающей к ней, имеем

$$\tau_{\rho z}=0\,\text{и}\,\tau_{\theta z}=k \tag{13}$$

При $\theta = \beta$ и в области, примыкающей к ней, имеем

$$\tau_{\rho z} = -k \text{ и } \tau_{\theta z} = 0. \tag{14}$$

Из (13) и (14) получим следующее уравнение линии разрыва напряжений, выходящей из вершины с координатами $\rho = R$, $\theta = \beta$ контура поперечного сечения сектора трубы

$$\rho = R + \theta - \beta \tag{15}$$

Линии разрыва напряжений, выходящие из других вершин контура поперечного сечения сектора трубы определяются аналогично. Компоненты скоростей деформации сектора трубы находятся из соотношений ассоциированного закона пластического течения. В соответствии с уравнением (4) они имеют вид

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \varepsilon_{\rho\theta} = 0,\ \tau_{\rho z}\varepsilon_{\theta z} = \tau_{\theta z}\varepsilon_{\rho z} \tag{16}$$

где ε_ρ, ε_θ, ε_z, $\varepsilon_{\rho\theta}$, $\varepsilon_{\theta z}$, $\varepsilon_{\rho z}$ – компоненты тензора скоростей деформации.

Положим, что в начальный момент деформирования все компоненты деформации равны нулю, Тогда из соотношений (16) имеем

$$e_\rho = e_\theta = e_z = e_{\rho\theta} = 0,\ \tau_{\rho z} e_{\theta z} = \tau_{\theta z} e_{\rho z} \tag{17}$$

где e_ρ, e_θ, e_z, $e_{\rho\theta}$, $e_{\theta z}$, $e_{\rho z}$ – компоненты тензора деформации.

Связь между компонентами перемещений u, v, w и компонентами тензора деформации e_ρ, e_θ, e_z, $e_{\rho\theta} e_{\theta z}$, $e_{\rho z}$ имеют вид

$$e_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho},\ e_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ e_z = \frac{\partial w}{\partial z},\ e_{\rho\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \tag{18}$$

$$e_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right),\ e_{\rho z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right) \tag{19}$$

С учетом (18) из соотношений (17) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0,\ \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\ \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0. \tag{20}$$

Удовлетворим соотношениям (20), положив

$$u = 0,\ v = \xi\rho z \tag{21}$$

где $\xi = const$.

Из (19) и (21) следует, что

$$\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial e_{\rho z}}{\partial \theta} = \xi - \frac{e_{\theta z}}{\rho} \tag{22}$$

Продифференцируем по переменной θ последнее соотношение из (17). Получим

$$\tau_{\rho z}\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \theta} - \tau_{\theta z}\frac{\partial e_{\rho z}}{\partial \theta} = e_{\rho z}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - e_{\theta z}\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \theta} \tag{23}$$

Умножая (22) на $\rho\tau_{\theta z}$, и, вычитая из полученного соотношения уравнение (23), имеем

$$\rho\tau_{\theta z}\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho} - \tau_{\rho z}\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \theta} = \xi\rho\tau_{\theta z} - \tau_{\theta z} e_{\theta z} - e_{\rho z}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + e_{\theta z}\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \theta} \tag{24}$$

Характеристики уравнения (24)определяются из соотношений

$$\frac{d\rho}{\rho\tau_{\theta z}} = -\frac{d\theta}{\tau_{\rho z}} = \frac{de_{\rho\theta z}}{(\xi\rho - e_{\theta z})\,\tau_{\theta z} - e_{\rho z}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + e_{\theta z}\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \theta}}. \tag{25}$$

Как видно из соотношений (10), (25), характеристики соотношений (9) и (24) совпадают. В соответствии с (11) и (12) из системы (25) имеем

$$\frac{d\rho}{\rho\tau_{\theta z}} = -\frac{d\theta}{\tau_{\rho z}} = \frac{de_{\theta z}}{(\xi\rho - e_{\theta z})\,\tau_{\theta z}}. \tag{26}$$

Следовательно, компонента тензора деформации $e_{\theta z}$ определяется из уравнения

$$\frac{de_{\theta z}}{d\rho} + \frac{e_{\theta z}}{\rho} = \xi. \tag{27}$$

Компоненту тензора деформации $e_{\theta z}$ находим из уравнения (27)

$$e_{\theta z} = \frac{\xi\rho^2 + c_2}{2\rho} \tag{28}$$

где вдоль характеристики $c_2 = const$.

В соответствии с (11), (12) и (28) из уравнения (17) определяем компоненту тензора деформации $e_{\rho z}$ вдоль характеристик соотношения (24)

$$e_{\rho z} = \frac{\frac{c_1}{\rho}}{\sqrt{k^2 - \frac{c_1^2}{4\rho^2}}}\frac{\xi\rho^2 + c_2}{2\rho} \tag{29}$$

На линии разрыва напряжений компоненты тензора деформации $e_{\tau z}$, $e_{\rho z}$ можно принять равными нулю. Тогда в области, примыкающей к части контура $\rho = R$, получим

$$e_{\theta z} = \frac{\xi(\rho^2 - (R + \theta - \beta)^2)}{2\rho},\ e_{\rho z} = 0, \tag{30}$$

а в области, примыкающей к части контура $\theta = \beta$, имеем

$$e_{\theta z} = 0,\ e_{\rho z} = 0. \tag{31}$$

Аналогично можно определить компоненты деформации и в других областях поперечного сечения сектора.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

[2] Прагер В., Ходж Г. Ф. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.

[3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности // М. 1966. 232 с.

[4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. Предельное состояние трансляционно анизотропных стержней при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. Т. 1, № 19. с. 132–139.

[5] Козлова Л. С., Миронов Б. Г. Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2014. № 3. с. 107–113.

[6] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. Т. 3, № 21. с. 105–111.

B. G. Mironov[1], *Yu. B. Mironov*[2]

ABOUT TORSION OF THE SECTOR OF A THICK-WALL PIPE

[1]*Russian University of transport, Moscow, Russia*
[2]*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. In this work, we study the stress-strain and state of the isotropic sector of a thick-walled pipe made of an ideal rigid-plastic material, under the assumption that it twists around an axis parallel to the z-axis. Torsion of ideally plastic rods made of isotropic and anisotropic material is considered in [1–7]. In [3], the torsion of a sector of a circular ring made of an isotropic material was also considered. In [8], [9], the torsion of a sector of a circular ring under the influence of linear pressure was studied.

Keywords: plasticity, rod, torsion, anisotropy, deformation, stress, associated flow law, isotropy.

REFERENCES

[1] Sokolovsky V.V. Plasticity Theory. M.: High School, 1969. 608 c.
[2] Prager V., Hodge G.F. Theory of ideally plastic bodies. M.: IL, 1956. 398 c.
[3] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity // M. 1966. 232 c.
[4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. Limit state of translationally anisotropic rods under torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2014. T. 1, № 19. c. 132–139.
[5] Kozlova L. S., Mironov B. G. Torsion of prismatic rods under pressure varying linearly along the generatrix // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids. 2014. № 3. c. 107–113.
[6] Derevyannykh E. A., Mironov B. G. On the issue of torsion of inhomogeneous prismatic rods // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2014. T. 3, № 21. c. 105–111.

Mironov Boris Gurjevich , Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.
Mironov Yuri Borisovich , Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.