

Ю. В. Немировский<sup>1,2</sup>, С. В. Тихонов<sup>3</sup>

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛОЖЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНО-УПРУГОГО ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНЫХ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНЫХ БЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ

<sup>1</sup> *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

<sup>3</sup> *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** В данной работе рассматривается задача изгиба многослойного стержня поперечными нагрузками при наличии зон упругого и нелинейно-неупругого деформирования, получены соотношения для определения границы раздела упругой и нелинейно-неупругой областей деформирования стержня, а также получены численные расчеты для случаев совпадения и не совпадения нейтральной линии с осью стержня. Приведены численные расчеты предельных нагрузок: первой (деформация достигает значения предельной неупругой) и второй (деформация достигает значения деформации предразрушения).

**Ключевые слова:** бетонные стержни, аналитические решения, физическая нелинейность, упругость, поперечные нагрузки, нейтральная линия

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.005

УДК: 539.374

В задачах изгиба стержней поперечными нагрузками возникают области сжатия и растяжения. Если эти стержни состоят из упругих материалов с симметричным относительно оси координат поперечным сечением, распределение деформаций и напряжений будет также симметрично относительно оси координат. В таком случае, ввиду симметрии, нейтральная линия будет совпадать с осью координат. Если же материал является разномодульным при растяжении и сжатии, то предположение совпадения

---

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2023

*Немировский Юрий Владимирович*

**e-mail:** nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

*Тихонов Сергей Владимирович*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.08.2023

нейтральной линии с осью координат приводит к определенной погрешности расчетов. В данной работе будем рассматривать бетонные стержни, которые имеют существенное различие диаграмм при растяжении и сжатии [1–4]. Задача расчета бетонного стержня в предположении, что нейтральная линия располагается вдоль оси, была рассмотрена в работе [5], где были получены аналитические решения, описывающие положения границ раздела областей упругого и нелинейного деформирования. Далее будем следовать обозначениям и перейдем к безразмерным величинам, аналогично работе [5].

Рассмотрим случай, когда стержень шарнирно оперт и деформируется под действием равномерно-распределенной нагрузки  $q$ , направленной вертикально вниз. Тогда в стержне будут возникать области упругого деформирования и нелинейно-упругого. Все случаи взаимного расположения границ приведены в работе [5], в данной работе ограничимся случаем, когда указанная граница располагается во втором слое (рис. 1), остальные случаи рассматриваются аналогично.

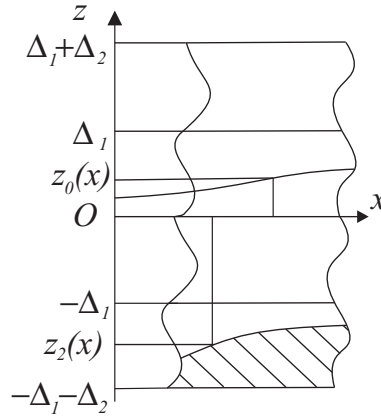


Рис. 1. Расположение зон упругого и нелинейно-упругого деформирования

В таком случае соотношения для изгибающего момента будут иметь вид

$$M_y(x) = -2 \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - \\ - 2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - 2 \int_{-\Delta_1-\Delta_2}^{z_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n z dy. \quad (1)$$

В случае, когда положение нейтральной линии не совпадает с центром симметрии стержня, имеем

$$\varepsilon(x, z) = e_0(x) - z \kappa_z(x), \quad \kappa_z(x) = \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \quad (2)$$

где  $e_0(x)$  – деформация осевой линии стержня.

С учетом того, что  $z_0(x)$  разделяет область сжатия и растяжения, имеем

$$e_0(x) = z_0(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \quad (3)$$

тогда соотношения для деформации (2) примут вид

$$\varepsilon(x, z) = z_0(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} - z \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}. \quad (4)$$

При данных условиях закрепления и нагрузках продольное усилие должно равняться 0. В работе [5] значение продольного усилия в стержне, определяемое соотношениями

$$\begin{aligned} N = & 2 \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e dy + 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e dy - \\ & + 2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e dy + 2 \int_{-\Delta_1 - \Delta_2}^{z_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n dy, \end{aligned} \quad (5)$$

будет равно 0 только при упругом деформировании стержня. В остальных случаях, ввиду наличия нелинейности в области растяжения, данное продольное усилие будет отлично от нуля. Данная разница в работе [5] обусловлена предположением, что нейтральная линия совпадает с осью стержня, что приводит к погрешности в приведенных расчетах.

Примем, что связь между напряжениями и деформациями в стержне в  $i$ -ом слое определяется зависимостями при  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{0i}^+$

$$\sigma_i^e = E_i \varepsilon, \quad (6)$$

а при  $\varepsilon_{0i}^+ \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}^+$ , равной

$$\sigma_i^n = A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2. \quad (7)$$

Из условия равенства изгибающего момента (1) значению, полученному из решения статически определяемой задачи об изгибе шарнирно-закрепленного стержня [5], и равенства 0 продольного усилия (5) можно получить систему уравнений для решения данной задачи.

Из соотношений (2), (6), (7) получим

$$\begin{aligned} \sigma_1^e = E_1 \varepsilon = E_1 (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \quad \sigma_2^e = E_2 \varepsilon = E_2 (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \\ \sigma_2^n = A_{12} \varepsilon + A_{22} \varepsilon^2 = A_{12} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} + A_{22} (z_0(x) - z)^2 \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда соотношения для продольного усилия и изгибающего момента примут вид

$$\begin{aligned} N = & 2b_1 E_1 \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz + 2b_2 E_2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz + \\ & + 2b_2 E_2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz + \\ & + 2b_2 \int_{-\Delta_1 - \Delta_2}^{z_2} \left( A_{12} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} + A_{22} (z_0(x) - z)^2 \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 \right) dz = \\ & = (4b_1 E_1 z_0(x) \Delta_1 + 2b_2 E_2 z_0(x) \Delta_2 - b_2 E_2 ((\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + \Delta_1^2) + \\ & + 2b_2 E_2 z_0(x) (-\Delta_1 - z_2) - b_2 E_2 (\Delta_1^2 - z_2^2) + 2b_2 A_{12} z_0(x) (z_2 + \Delta_1 + \Delta_2) - \\ & - b_2 A_{12} (z_2^2 - (\Delta_1 + \Delta_2)^2)) \frac{d^2 w_0}{dx^2} - (-2b_2 A_{22} z_0^2 (z_2 + \Delta_1 + \Delta_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2b_2 z_0 A_{22} (z_2^2 - (\Delta_1 + \Delta_2)^2) - \frac{2}{3} b_2 A_{22} (z_2^3 + (\Delta_1 + \Delta_2)^3) \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2, \\
M = & -2b_1 E_1 \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} (z_0(x) - z) z \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz - 2b_2 E_2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} (z_0(x) - z) z \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz - \\
& - 2b_2 E_2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} (z_0(x) - z) z \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz - \\
& - 2b_2 \int_{-\Delta_1 - \Delta_2}^{z_2} \left( A_{12} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} + A_{22} (z_0(x) - z)^2 \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 \right) z dz = \\
= & \left\{ -4b_1 E_1 \left( -\frac{\Delta_1^3}{3} \right) - 2b_2 E_2 \left( z_0 \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^2}{2} - \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^3}{3} - z_0 \frac{\Delta_1^2}{2} + \frac{\Delta_1^3}{3} \right) - \right. \\
& - 2b_2 E_2 \left( z_0 \frac{\Delta_1^2}{2} + \frac{\Delta_1^3}{3} - z_0 \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_2^3}{3} \right) - \\
& \left. - 2b_2 A_{12} \left( z_0 \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_2^3}{3} - z_0 \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^2}{2} - \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^3}{3} \right) \right\} \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \\
& - 2b_2 A_{22} \left( z_0^2 \frac{z_2^2}{2} - \frac{2}{3} z_2^3 z_0 + \frac{z_2^4}{4} - z_0^2 \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^2}{2} - \frac{2}{3} (\Delta_1 + \Delta_2)^3 z_0 - \right. \\
& \left. - \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^4}{4} \right) \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2,
\end{aligned}$$

которые можем переписать в виде

$$\begin{aligned}
N = & \{ (-2b_2 E_2 (\Delta_1 - \Delta_2) + 2b_2 A_{12} (\Delta_1 + \Delta_2)) z_0(x) - \\
& - 2b_2 (E_2 - A_{12}) z_2 z_0(x) - b_2 (A_{12} - E_2) z_2^2 - 2b_1 E_1 \Delta_1^2 - b_2 E_2 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + \\
& + b_2 A_{12} (\Delta_1 + \Delta_2)^2 \} \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \{ 2b_2 A_{22} z_0^2(x) z_2 - 2b_2 A_{22} (\Delta_1 + \Delta_2) z_0^2 + \\
& + 2b_2 A_{22} z_0 z_2^2 - 2b_2 A_{22} (\Delta_1 + \Delta_2)^2 z_0(x) - \frac{2}{3} b_2 A_{22} (z_2^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)^3) \} \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2, \\
M = & \{ (-b_2 (E_2 - A_{12}) (\Delta_1 + \Delta_2)^2) z_0(x) + b_2 (E_2 - A_{12}) z_2^2 z_0(x) - \\
& - \frac{2}{3} b_2 (E_2 - A_{12}) z_2^3 + \frac{4}{3} b_1 E_1 \Delta_1^3 - \frac{2}{3} b_2 E_2 \Delta_1^3 + \frac{2}{3} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 (E_2 + A_{12}) \} \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \\
& - 2b_2 A_{22} \left( z_0^2(x) \frac{z_2^2}{2} - \frac{2}{3} z_2^3 z_0(x) + \frac{z_2^4}{4} - z_0^2(x) \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^2}{2} - \frac{2}{3} (\Delta_1 + \Delta_2)^3 z_0 - \right. \\
& \left. - \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^4}{4} \right) \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
N = & (f_{1,1} z_0(x) + f_{1,2} z_2 z_0(x) + f_{1,3} z_2^2 + f_{1,4}) \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \\
& + (f_{1,5} z_0^2(x) z_2 + f_{1,6} z_0^2(x) + f_{1,5} z_0(x) z_2^2 + f_{1,7} z_0(x) + f_{1,8} z_2^2 + f_{1,9}) \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 \quad (9)
\end{aligned}$$

$$M = (f_{2,1}z_0(x) + f_{2,2}z_2^2z_0(x) + f_{2,3}z_2^3 + f_{2,4}) \frac{d^2w_0}{dx^2} +$$

$$+ (f_{2,5}z_0^2(x)z_2^2 + f_{2,6}z_2^3z_0(x) + f_{2,7}z_2^4 + f_{2,8}z_0^2(x) + f_{2,9}z_0(x) + f_{2,10}) \left( \frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2, \quad (10)$$

где постоянные определяются равенствами

$$f_{1,1} = -2b_2E_2(\Delta_1 - \Delta_2) + 2b_2A_{12}(\Delta_1 + \Delta_2), \quad f_{1,2} = -2b_2(E_2 - A_{12}),$$

$$f_{1,3} = -b_2(A_{12} - E_2), \quad f_{1,4} = -2b_1(E_1 - A_{12})\Delta_1^2 - b_2E_2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2),$$

$$f_{1,5} = -2b_2A_{22}, \quad f_{1,6} = 2b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2), \quad f_{1,7} = 2b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2)^2,$$

$$f_{1,8} = \frac{2}{3}b_2A_{22}, \quad f_{1,9} = \frac{2}{3}b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2)^3,$$

$$f_{2,1} = -b_2(E_2 - A_{12})(\Delta_1 + \Delta_2)^2, \quad f_{2,2} = b_2(E_2 - A_{12}),$$

$$f_{2,3} = -\frac{2}{3}b_2(E_2 - A_{12}), \quad f_{2,4} = \frac{4}{3}b_1E_1\Delta_1^3 - \frac{2}{3}b_2E_2\Delta_1^3 + \frac{2}{3}b_2(\Delta_1 + \Delta_2)^3(E_2 + A_{12}),$$

$$f_{2,5} = -b_2A_{22}, \quad f_{2,6} = \frac{4}{3}b_2A_{22}, \quad f_{2,7} = -\frac{1}{2}b_2A_{22}, \quad f_{2,8} = b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2)^2,$$

$$f_{2,9} = \frac{4}{3}b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2)^3, \quad f_{2,10} = \frac{1}{2}b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2)^4.$$

Из соотношений для изгибающего момента

$$M = q \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right)$$

и равенства продольного усилия 0 получим систему

$$(f_{1,1}z_0(x) + f_{1,2}z_2z_0(x) + f_{1,3}z_2^2 + f_{1,4}) \frac{d^2w_0}{dx^2} +$$

$$+ (f_{1,5}z_0^2(x)z_2 + f_{1,6}z_0^2(x) + f_{1,5}z_0(x)z_2^2 + f_{1,7}z_0(x) +$$

$$+ f_{1,8}z_2^2 + f_{1,9}) \left( \frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 = 0, \quad (11)$$

$$+ f_{1,8}z_2^2 + f_{1,9}) \left( \frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 = 0, \quad (12)$$

$$(f_{2,1}z_0(x) + f_{2,2}z_2^2z_0(x) + f_{2,3}z_2^3 + f_{2,4}) \frac{d^2w_0}{dx^2} +$$

$$+ (f_{2,5}z_0^2(x)z_2^2 + f_{2,6}z_2^3z_0(x) + f_{2,7}z_2^4 +$$

$$+ f_{2,8}z_0^2(x) + f_{2,9}z_0(x) + f_{2,10}) \left( \frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 = q \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right). \quad (13)$$

$$+ f_{2,8}z_0^2(x) + f_{2,9}z_0(x) + f_{2,10}) \left( \frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 = q \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right). \quad (14)$$

Вторую производную прогиба можно получить из условия равенства деформации предельной упругой, тогда из (4) получим

$$\varepsilon_{02}^+ = (z_0(x) - z_2(x)) \frac{d^2w_0(x)}{dx^2}. \quad (15)$$

Из соотношений (12)-(15) получим

$$(f_{1,2} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,5}) z_2(x) z_0^2(x) + (f_{1,3} - f_{1,2} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,5}) z_2^2(x) z_0(x) - f_{1,3} z_2^3(x) - \quad (16)$$

$$- f_{1,1} z_0(x) z_2(x) + f_{1,8} \varepsilon_{02}^+ z_2^2(x) - f_{1,4} z_2(x) + (f_{1,4} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,7}) z_0(x) + f_{1,9} \varepsilon_{02}^+ = 0,$$

$$(f_{2,7} (\varepsilon_{02}^+)^2 - f_{2,3} \varepsilon_{02}^+) z_2^4(x) + (f_{2,3} \varepsilon_{02}^+ - f_{2,2} \varepsilon_{02}^+ + f_{2,6} (\varepsilon_{02}^+)^2) z_2^3(x) z_0(x) + \quad (17)$$

$$(f_{2,2} \varepsilon_{02}^+ + f_{2,5} (\varepsilon_{02}^+)^2) z_2^2(x) z_0^2(x) + (f_{2,1} \varepsilon_{02}^+ + f_{2,8} (\varepsilon_{02}^+)^2) z_0^2(x) - f_{2,1} z_0(x) z_2(x) +$$

$$+ (f_{2,4} \varepsilon_{02}^+ + f_{2,9} \varepsilon_{02}^+) z_0(x) + f_{2,10} (\varepsilon_{02}^+)^2 -$$

$$- q \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) (z_0^2(x) - 2z_0(x) z_2(x) + z_2^2(x)) = 0,$$

причем решения должны удовлетворять условию

$$-\Delta_1 \leq z_2(x) \leq -\Delta_1 - \Delta_2. \quad (18)$$

Для случая наличия в первом и втором слое неизвестных границ  $z_1(x)$  и  $z_2(x)$ , соответствующих случаю, рассмотренному в [5], соотношения между ними можно получить из равенств

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{01}^+}{z_0(x) + z_1(x)}, \quad \frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_0(x) + z_2(x)},$$

откуда

$$z_2(x) = \frac{\varepsilon_{02}^+}{\varepsilon_{01}^+} (z_0(x) + z_1(x)) - z_0(x). \quad (19)$$

Далее, для данного случая решение идентично [5].

Для численного расчета данной задачи рассмотрим случай сечения №1 с параметрами

$$b_1 = 0,03, \quad b_2 = 0,04, \quad \Delta_1 = 0,06, \quad \Delta_2 = 0,04. \quad (20)$$

В качестве материалов стержня будем рассматривать наиболее распространенные в строительстве бетоны марок В10, В30, В50 с параметрами, приведенными в таблице 1.

№	Марка бетона	$E^+$	$\varepsilon_0^+, 10^{-2}$	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	$A_{1i}$	$A_{2i}, 10^6$
1	В10	1232,92	0,005	0,015	1479,50	-4,93167
2	В30	2629,23	0,005	0,015	3155,08	-10,517
3	В50	3312,54	0,00375	0,015	3975,04	-13,250

Таблица 1. Физические параметры бетонов

Определим предельные нагрузки [5,6] с учетом и без учета совпадения нейтральной линии с осью стержня. В дальнейшем, для краткости, численные решения уравнений без учета совпадения нейтральной линии с осью стержня будем называть численными решениями, а решения, полученные с учетом совпадения нейтральной линии с осью стержня по аналитическим зависимостям, полученным в [5], будем называть аналитическими решениями.

Численно полученную нагрузку  $q = q_{1,2}$  соответствующую появлению нелинейной области во втором слое стержня в середине пролета, определим из уравнений (16)-(17) при  $x = 1/2$  и равенства

$$z_2 = -\Delta_1 - \Delta_2, \quad (21)$$

тогда получим

$$z_0 = 0, \quad q_{1,2} = -0,000482. \quad (22)$$

Полученное решение полностью соответствует аналитическому решению, так как фактически весь стержень деформируется упруго и все еще обладает физической симметрией и все слои стержня деформируются упруго.

Нагрузка, соответствующая появлению нелинейной области в первом слое стержня, при отсутствии указанной области во втором слое будет равна, при условии численного решения,

$$z_0 = 0, \quad q_{1,1} = -0,0008039, \quad (23)$$

а также совпадать с аналогичной нагрузкой, полученной аналитически. Соответственно, в данном случае будут также справедливы соотношения [5] для определения слоя, в котором начнется нелинейное деформирование стержня. Предельная упругая деформация с повышением нагрузки впервые будет возникать в первом слое стержня при параметрах, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} < \frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1 + \Delta_2}.$$

Так как в данном примере используются бетоны марок В10 и В30, имеющие одинаковые предельные упругие деформации, то при достижении в середине пролета границы  $z_2 = -\Delta_1$  при той же самой нагрузке  $q = q_{1,3}$  в середине пролета в первом слое возникает область нелинейного деформирования, т.е.  $z_1 = -\Delta_1$ .

Указанная предельная нагрузка в случае численного решения будет равна

$$z_0 = 0,00187, \quad q_{1,3} = -0,0007523. \quad (24)$$

В случае аналитического решения указанная нагрузка  $q_{1,3} = -0,0007755$ , что отличается от численного решения (24) на 3%.

Таким образом, при  $|q_{1,2}| < |q| < |q_{1,3}|$  имеем деформирование, соответствующее рисунку 4б в работе [5].

Для примера возьмем нагрузку  $q = -0,0006$ . Значение границы области нелинейного деформирования для численного и аналитического решений одинаково и равно  $x_2 = 0,2786$ . График указанных границ изображен на рис. 2, соответствующее положение нейтральной линии изображено на рис. 3.

При  $q > q_{1,3}$  будут в середине пролета стержня сразу две области нелинейного деформирования, и при этом нагрузка не может быть больше нагрузки, соответствующей достижению деформацией значения предельной предразрушения для соответствующих слоев.

Нагрузка, при которой в середине пролета стержня весь второй слой будет в области нелинейного деформирования, а деформация достигает значения предельной предразрушения на верхней границе первого слоя, будет равна для численного решения

$$z_0 = 0,01811, \quad q_{2,1} = -0,0012577. \quad (25)$$

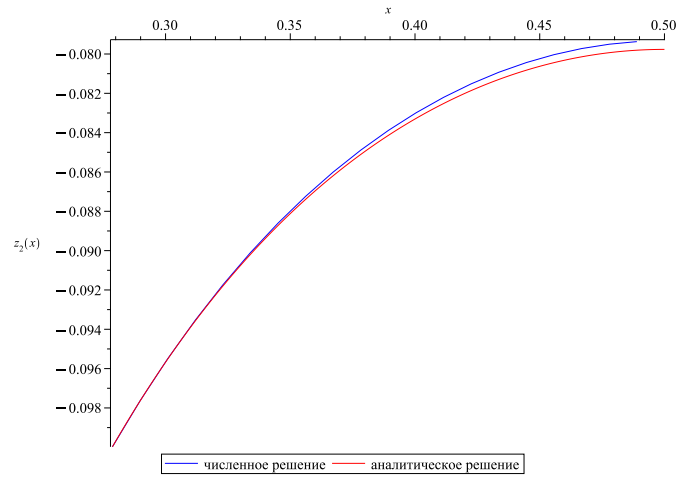


Рис. 2. Расположение границы  $z_2(x)$  на участке  $[x_2 \dots 0, 5]$  для стержня с сечением № 1 при нагрузке  $q = -0,0006$

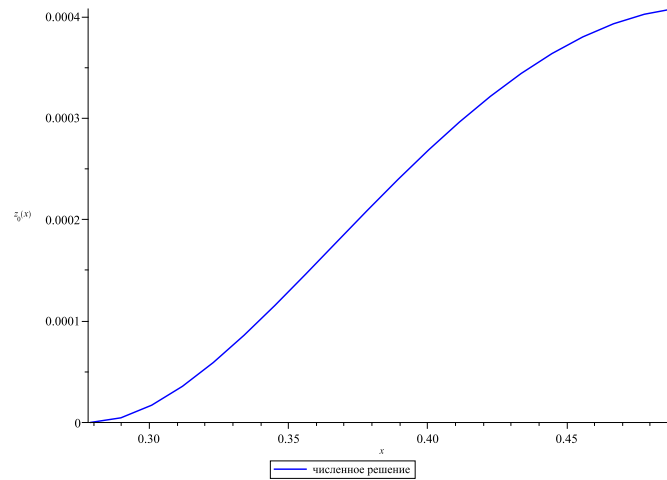


Рис. 3. Расположение нейтральной линии  $z_0(x)$  на участке  $[x_2 \dots 0, 5]$  при нагрузке  $q = -0,0006$

Как видно из соотношений (25), нейтральная линия достигает почти трети первого слоя и, по сравнению с аналитическим решением, где при аналогичных параметрах поперечного сечения было получено  $q_{2,1} = -0,001689$ , меньше на 25%.

Нагрузка, при которой деформация достигнет предельного значения предразрушения во втором слое, в случае численного решения будет равна

$$z_0 = -0,002562, \quad q_{2,2} = -0,001554. \quad (26)$$

Соответственно, максимальная нагрузка, которую способен выдержать стержень, будет равна в случае численного решения  $q_{2,1} = -0,0012577$ .



В качестве примера рассмотрим нагрузку  $q = -0,0009$ . Тогда для данной нагрузки имеем случай, изображенный на рис. 4а и указанный в работе [5]. Значение границ областей зон деформирования для данной нагрузки имеет вид в случае численного решения

$$x_2 = -0,1594, \quad x_{22} = 0,2974. \quad (27)$$

В случае аналитического решения значения  $x_2 = 0,1594$  и  $x_{22} = 0,314$ , соответственно, первая полностью совпадает, а вторая оказалась меньше на 5%.

График границы  $z_2(x)$  на отрезке  $[x_2, x_{22}]$ , полученном численным и аналитическим методами, приведен на рис. 4, положение нейтральной линии на данном отрезке изображено на рис. 5.

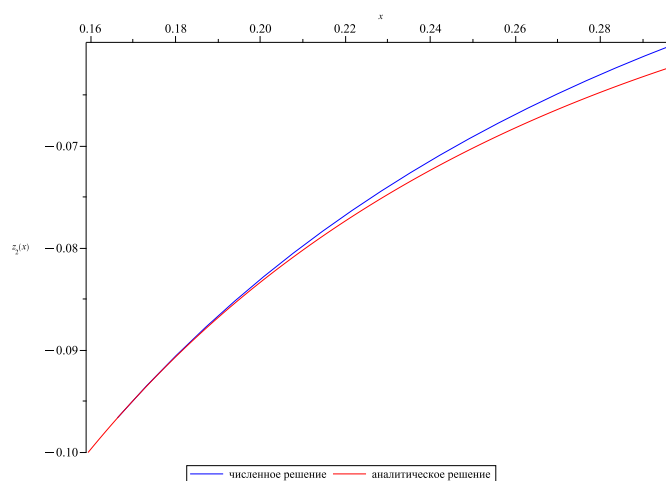


Рис. 4. Расположение границы  $z_2(x)$  на участке  $[x_2...x_{22}]$  для стержня с сечением № 1 при нагрузке  $q = -0,0009$

График границы  $z_1(x)$  на отрезке  $[x_2, 1/2]$ , полученном численным и аналитическим методами, приведен на рис. 6, положение нейтральной линии на данном отрезке изображено на рис. 7.

Как можно видеть из полученных решений, при нагрузках, существенно меньших нагрузок предразрушения, учет реального положения нейтральной линии не сильно влияет на точность расчетов. Погрешность будет расти при нагрузках, близких к предельным предразрушения, так как существенная часть стержня будет находиться в области нелинейного-упругого деформирования.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность многослойных бетонных стержней. Чебоксары: Изд-во Чуваш-го ун-та, 2022. 180 с.
- [2] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [3] Мищенко А. В., Немировский Ю. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.

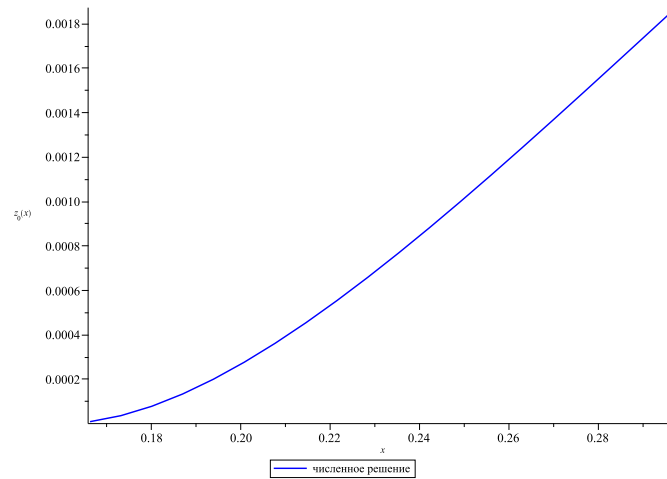


Рис. 5. Расположение нейтральной линии  $z_0(x)$  на участке  $[x_2...x_{22}]$  при нагрузке  $q = -0,0009$

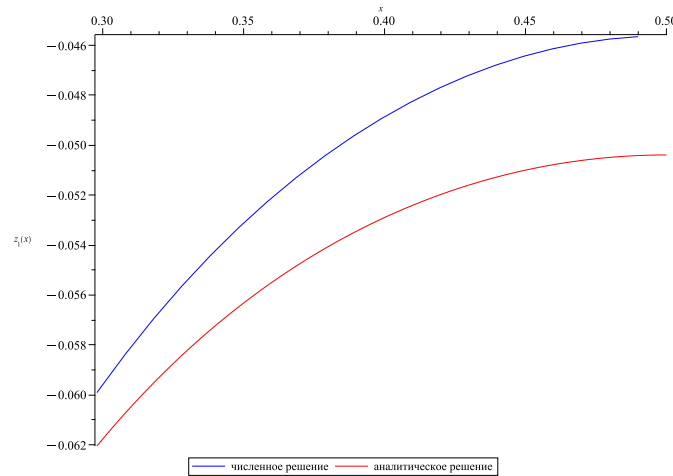


Рис. 6. Расположение границы  $z_1(x)$  на участке  $[x_{22}...0.5]$  для стержня с сечением № 1 при нагрузке  $q = -0,0009$

- [4] Немировский Ю. В., Батурин А. А. Метод расчета деформативности и прочности одноставровых и двуставровых железобетонных стержней // Известия вузов. Строительство. 2015. № 10. С. 82–93.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение предельных нагрузок при поперечном изгибе многослойных предельно-упругих бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1(55). С. 86–101. DOI: 10.37972/chgru.2023.55.1.0010.
- [6] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.

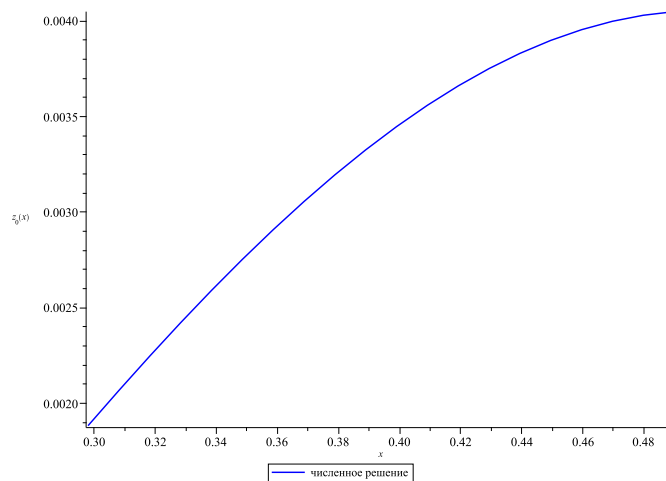


Рис. 7. Расположение нейтральной линии  $z_0(x)$  на участке  $[x_{22}...0.5]$  при нагрузке  $q = -0,0009$

Yu. V. Nemirovskii<sup>1,2</sup>, S. V. Tikhonov<sup>3</sup>

**ON DETERMINING THE POSITION OF THE NEUTRAL LINE IN THE CASE OF EXTREMELY ELASTIC BENDING OF MULTILAYER PHYSICALLY NONLINEAR CONCRETE RODS**

<sup>1</sup>*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

<sup>2</sup>*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

<sup>3</sup>*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** This paper considers the problem of bending a multilayer rod under transverse loads in the presence of zones of elastic and nonlinear-inelastic deformation, and relations are obtained to determine the interface between the elastic and nonlinear-inelastic deformation regions of the rod. The resulting numerical calculations for cases of coincidence and non-coincidence of the neutral line with the axis of the rod. Numerical calculations of the limiting loads are presented: the first (the deformation reaches the limiting inelastic value) and the second (the deformation reaches the value of the pre-fracture strain).

**Keywords:** concrete rods, analytical solutions, physical nonlinearity, elasticity, transverse loads, neutral line

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Professor, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.  
*Tikhonov Sergey Vladimirovich*, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

**REFERENCES**

- [1] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Load-bearing capacity of multilayer concrete bars. Cheboksary: Publishing house of Chuvash University, 2022. 180 p.
- [2] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // Bulletin of Belgorod State Technological University named after. V.G. Shukhova. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [3] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V., Vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered rod systems. Novosibirsk: NSASU, 2004. 488 p.
- [4] Nemirovsky Y. V., Baturin A. A. Method for calculating the deformability and strength of single-T and I-beam reinforced concrete rods // News of universities. Construction. 2015. no. 10. P. 82–93.
- [5] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Determination of ultimate loads during transverse bending of multilayer extremely elastic concrete rods // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2023. no. 1(55). P. 86–101. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.0010.
- [6] Nemirovsky Y. V. Ultimate deformation of hybrid reinforced concrete structures // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2018. no. 3(37). P. 26–37.