

А. П. Кержаев<sup>1</sup>, И. В. Меньшова<sup>1,2</sup>, А. В. Никитин<sup>3</sup>

## НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОСЫ С РАЗНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

<sup>1</sup>Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,  
г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
г. Москва, Россия

<sup>3</sup>Чебоксарский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** В статье построено точное решение неоднородной задачи теории упругости для бесконечной полосы, нижняя сторона которой жестко закреплена, а верхняя свободна. Внешняя нагрузка действует вдоль вертикальной оси полосы. Метод решения основан на использовании соотношения ортогональности Папковича. Решение представляется в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются в явном виде. Приведены примеры решения задачи.

**Ключевые слова:** неоднородная задача, полоса, собственные функции Папковича–Фадля, соотношение ортогональности Папковича, точные решения.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.007

УДК: 539.3

---

© Кержаев А. П., Меньшова И. В., Никитин А. В., 2023

*Кержаев Александр Петрович*

e-mail: alex\_kerg@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия.

*Меньшова Ирина Владимировна*

e-mail: menshovairina@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия; доцент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.

*Никитин Андрей Витальевич*

e-mail: ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, Чебоксарский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации, г. Чебоксары, Россия

Исследование А.П. Кержаева и И.В. Меньшовой выполнено в рамках государственного задания ИТПЗ РАН.

Поступила 20.09.2023

**1. Введение** Неоднородным задачам теории упругости (уравнения равновесия с правой частью) посвящено значительно меньше публикаций, чем однородным. Как правило, эти задачи сложнее однородных и более трудоемки. В учебниках по теории упругости обычно можно найти только решение неоднородной задачи для бесконечной плоскости, внутри которой действует сосредоточенная сила. Решений для областей с разными граничными условиями на их сторонах, полученных на основе приближенно-аналитических и численных методов, тоже крайне мало. В то же время эти задачи очень важны в инженерном деле.

В предлагаемой статье получено точное решение неоднородной задачи для бесконечной полосы, нижняя сторона которой жестко закреплена, а верхняя свободна. Внутри полосы приложена внешняя нагрузка, действующая вдоль ее вертикальной оси.

Решение задачи строится с использованием соотношения ортогональности Папковича. Это позволяет существенно упростить процесс решения, а окончательные формулы представить в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых записываются в простом явном виде.

В 1940 году П. Ф. Папковичем в статье [1] было получено соотношение ортогональности для собственных функций, возникающих при решении краевой задачи в упругой полуполосе со свободными длинными сторонами. Эта статья послужила толчком к изучению различных краевых задач теории упругости [2–6] с использованием соотношения ортогональности Папковича в надежде построить, наконец, точное решение краевой задачи в полуполосе. В работе [7] было показано, что это невозможно, а соотношение ортогональности Папковича решает совсем другие задачи, а именно задачи для бесконечной полосы с разрывами перемещений или скачками напряжений. Известно [8–11], что задачи с разрывами эквивалентны неоднородным задачам теории упругости. Основываясь на этом, с помощью соотношения ортогональности Папковича можно легко строить решения неоднородных задач в бесконечной полосе.

**2. Постановка задачи и ее решение** Рассмотрим неоднородную задачу теории упругости для бесконечной полосы  $\{\Pi : |x| < \infty, 0 \leq y \leq h\}$ , в которой нижняя сторона жестко закреплена, а верхняя свободна, т.е.

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad \sigma_y(x, h) = \tau_{xy}(x, h) = 0. \quad (1)$$

Предположим, что внутри полосы приложена внешняя нагрузка  $Y(y)$ , действующая вдоль вертикальной оси  $y$  на отрезке  $[\alpha_1, \alpha_2]$  (рис. 1).

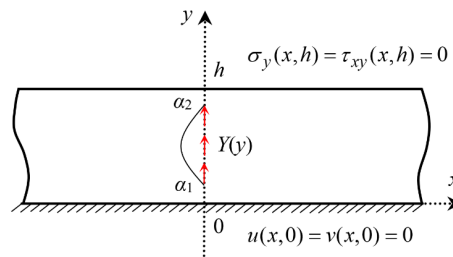


Рис. 1. Схема неоднородной задачи для бесконечной полосы

Будем рассматривать полосу  $\Pi$  как стык двух полуполос  $\{\Pi^+ : x \geq 0, 0 \leq y \leq h\}$  и  $\{\Pi^- : x \leq 0, 0 \leq y \leq h\}$ .

Пусть на торце правой полуполосы  $\Pi^+$  известны касательные напряжения, равные  $\tau(y)$ , и продольные перемещения, равные  $U(y)$ . Решение будем искать в виде рядов

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[ A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} \right], \quad \sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[ A_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} \right], \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[ A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[ A_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} \right], \quad V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[ A_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} \right]$$

по собственным функциям Папковича–Фадля, удовлетворяющим граничным условиям (1):

$$\begin{aligned} s_x(\lambda_k, y) &= -\frac{1}{2} [2 \cos \lambda_k h - (\nu + 1) \lambda_k h \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k y - \nu \cos \lambda_k y \right) + \\ &+ \frac{1}{2} [(\nu + 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu - 1) \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k y + \frac{\nu+3}{2} \sin \lambda_k y \right), \\ s_y(\lambda_k, y) &= \frac{1}{2} [2 \cos \lambda_k h - (\nu + 1) \lambda_k h \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k y + \cos \lambda_k y \right) + \\ &+ \frac{1}{2} [(\nu + 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu - 1) \sin \lambda_k h] \left( -\frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k y + \frac{\nu-1}{2} \sin \lambda_k y \right), \\ t_{xy}(\lambda_k, y) &= \frac{1}{2} [(\nu + 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu - 1) \sin \lambda_k h] \left( -\frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k y + \cos \lambda_k y \right) - \\ &- \frac{1}{2} [2 \cos \lambda_k h - (\nu + 1) \lambda_k h \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k y + \frac{\nu-1}{2} \sin \lambda_k y \right), \\ \xi(\lambda_k, y) &= -\frac{1}{2} [2 \cos \lambda_k h - (\nu + 1) \lambda_k h \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{4} y \sin \lambda_k y \right) + \\ &+ \frac{1}{2} [(\nu + 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu - 1) \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{4} y \cos \lambda_k y - \frac{\nu-3}{4\lambda_k} \sin \lambda_k y \right), \\ \chi(\lambda_k, y) &= -\frac{1}{2} [(\nu + 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu - 1) \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{4} y \sin \lambda_k y \right) - \\ &- \frac{1}{2} [2 \cos \lambda_k h - (\nu + 1) \lambda_k h \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{4} y \cos \lambda_k y + \frac{\nu-3}{4\lambda_k} \sin \lambda_k y \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (1)–(3) введены следующие обозначения:  $U(x, y) = Gu(x, y)$ ,  $V(x, y) = Gv(x, y)$ , где  $G$  – модуль сдвига, а  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  – продольное и поперечное перемещения соответственно;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $A_k$  – неизвестные коэффициенты разложений;  $\lambda_k$  – бесконечный набор комплексных корней характеристического уравнения

$$L(\lambda) = \frac{1}{4}(\nu + 1)(\nu - 3) \sin^2 \lambda h - \frac{1}{4}(\nu + 1)^2 (\lambda h)^2 + 1 = 0, \quad (4)$$

соответствующего краевой задаче для полосы  $\Pi$  с граничными условиями (1). Числа  $\lambda_k$  расположены попарно-симметрично относительно начала координат комплексной плоскости. Через  $2\operatorname{Re}$  для краткости обозначены суммы соответствующих выражений при  $\lambda_k$  и при  $\bar{\lambda}_k$ , им сопряженных. Для затухающего на бесконечности решения считаем, что  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ , когда  $x \geq 0$ , и  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , когда  $x \leq 0$ .

Помимо комплексных корней, уравнение (4) имеет также два вещественных корня  $\pm \lambda_1$ . В дальнейшем в окончательных формулах вынесем выражения, отвечающие вещественным корням, за знаки суммирования.

Следуя [7, 12], определим коэффициенты  $A_k$  с помощью соотношения ортогональности Папковича

$$\int_0^h [s_x(\lambda_k, y)\xi(\lambda_m, y) - \chi(\lambda_k, y)t_{xy}(\lambda_m, y)] dy = \begin{cases} B_k & (k = m), \\ 0 & (k \neq m), \end{cases} \quad (5)$$

где

$$B_k = \frac{h [(\nu + 1)^2 h^2 \lambda_k^2 + 2(\nu - 1)]^2}{16(\nu + 1)\lambda_k}.$$

В этой формуле числа  $\lambda_k$  и сопряженные с ними  $\bar{\lambda}_k$  считаются различными. Поэтому при  $\lambda_m = \bar{\lambda}_k$  интегралы в (5) будут равны нулю. Умножим левую и правую части (5) последовательно на  $A_m$  и  $\bar{A}_m$ , затем сложим получившиеся выражения и просуммируем их по индексу  $m = 1, 2, \dots$ . Обозначив через

$$U(y) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \xi(\lambda_m, y) + \bar{A}_m \xi(\bar{\lambda}_m, y)], \quad \tau(y) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m t_{xy}(\lambda_m, y) + \bar{A}_m t_{xy}(\bar{\lambda}_m, y)], \quad (6)$$

на основании соотношения ортогональности (5) найдем

$$A_k = \frac{1}{B_k} \int_0^h [s_x(\lambda_k, y)U(y) - \chi(\lambda_k, y)\tau(y)] dy. \quad (7)$$

Формулы для комплексно сопряженных чисел  $\bar{A}_k$  получаются из (7) при замене  $\lambda_k$  на  $\bar{\lambda}_k$ . Полагая теперь в (7)  $U(y) = 0$ , получим

$$A_k = -\frac{1}{B_k} \int_0^h \chi(\lambda_k, y)\tau(y) dy. \quad (8)$$

Подставим коэффициенты (8) в формулы (2) и аналитически продолжим решение (2) из правой полуполосы в левую как четно-симметричное. В результате, учитывая вещественность первого корня, вместо (2) получим ( $\text{Re}\lambda_k < 0$ )

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= A_1 s_x(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 |x|} + \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ \sigma_y(x, y) &= A_1 s_y(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 |x|} + \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ \tau_{xy}(x, y) &= \text{sign} x A_1 t_{xy}(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 |x|} + \text{sign} x \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ U(x, y) &= \text{sign} x A_1 \xi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 |x|} + \text{sign} x \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ V(x, y) &= A_1 \chi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 |x|} + \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем, что формулами (9) описывается решение неоднородной задачи, схема которой показана на рис. 1. Для этого подставим их в основные уравнения теории упругости.

Здесь понадобятся следующие формулы для обобщенных функций, в которых  $\delta(x)$  – дельта функция Дирака, а  $\delta'(x)$  – ее производная ( $\lambda$  – параметр, принимающий значения  $\lambda_k$  или  $\bar{\lambda}_k$ ):

$$\begin{aligned} \text{sign}^2 x &= 1, \quad x \text{sign} x = |x|, \quad |x| \text{sign} x = x, \quad \delta(x) \text{sign} x = 0, \\ \frac{d}{dx} \text{sign} x &= 2\delta(x), \quad \frac{d}{dx} e^{\lambda|x|} = \lambda \text{sign} x e^{\lambda|x|}, \quad \frac{d}{dx} (\text{sign} x e^{\lambda|x|}) = [\lambda + 2\delta(x)] e^{\lambda|x|}, \\ \frac{d}{dx} (|x| e^{\lambda|x|}) &= (1 + \lambda|x|) \text{sign} x e^{\lambda|x|}, \quad \frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda|x|} = [\lambda + 2\delta(x)] \lambda e^{\lambda|x|}, \\ \frac{d^2}{dx^2} (\text{sign} x e^{\lambda|x|}) &= [2\delta'(x) + \lambda^2 \text{sign} x + 6\lambda\delta(x) \text{sign} x] e^{\lambda|x|}. \end{aligned} \quad (10)$$

Проверим выполнение уравнений равновесия в напряжениях [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy}(x, y) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy}(x, y) &= -\delta(x) Y(y). \end{aligned} \quad (11)$$

Следующие равенства являются следствиями однородных уравнений (11):

$$s_x(\lambda_k, y) \lambda_k + \frac{d}{dy} t_{xy}(\lambda_k, y) = 0, \quad \frac{d}{dy} s_y(\lambda_k, y) + \lambda_k t_{xy}(\lambda_k, y) = 0. \quad (12)$$

Далее для краткости в формулах (9), (11) и (12) отбросим знаки суммирования, коэффициенты  $A_k$ , индексы суммирования при  $\lambda_k$  и символ  $2\text{Re}$ . Тогда учитывая первое равенство (12), из первого уравнения (11) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy}(x, y) &= \text{sign} x \lambda s_x(\lambda, y) e^{\lambda|x|} + \text{sign} x \frac{dt_{xy}(\lambda, y)}{dy} e^{\lambda|x|} = \\ &= \text{sign} x \left[ \lambda s_x(\lambda, y) + \frac{dt_{xy}(\lambda, y)}{dy} \right] e^{\lambda|x|} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим формулы (9) в левую часть второго уравнения (11). Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy}(x, y) &= \frac{ds_y(\lambda, y)}{dy} e^{\lambda|x|} + [\lambda + 2\delta(x)] t_{xy}(\lambda, y) e^{\lambda|x|} = \\ &= \left[ \frac{ds_y(\lambda, y)}{dy} + \lambda t_{xy}(\lambda, y) \right] e^{\lambda|x|} + 2\delta(x) t_{xy}(\lambda, y) e^{\lambda|x|}. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в предпоследней сумме в (14), согласно второму равенству (12), равно нулю. Поэтому, в соответствии со вторым уравнением (11), возвращая суммирование, получим

$$Y(y) = -2 \left\{ A_1 t_{xy}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k t_{xy}(\lambda_k, y)] \right\} = -2\tau(y). \quad (15)$$

Проверим выполнение уравнений равновесия в перемещениях [14]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} &= -\delta(x) Y(y). \end{aligned} \quad (16)$$

Воспользуемся следующими равенствами для собственных функций, вытекающими из однородных уравнений (16):

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-\nu} \lambda_k^2 \xi(\lambda_k, y) + \frac{\partial^2 \xi(\lambda_k, y)}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_k \frac{\partial \chi(\lambda_k, y)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 \chi(\lambda_k, y)}{\partial y^2} + \lambda_k^2 \chi(\lambda_k, y) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_k \frac{\partial \xi(\lambda_k, y)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставим (9) в формулы (16) и выполним дифференцирование, учитывая (10). Как и в случае с уравнениями равновесия в напряжениях, используя на этот раз (17) вместо (12), получим ноль в первом уравнении, а во втором –

$$\delta(x)Y(y) = -2\delta(x) \left\{ A_1 \lambda_1 \chi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 |x|} + \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} \left[ A_k \lambda_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|} \right] \right\}. \quad (18)$$

Выражение для  $Y(y)$ , вытекающее из (18), фактически совпадает с (15), если учесть, что

$$\tau_{xy}(0, y) = \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \Big|_{x=0}, \quad (19)$$

т.к.  $U(0, y) = 0$ .

Таким образом, формулы (9) действительно дают решение неоднородной задачи, показанной на рис. 1. Причем функция  $Y(y)$ , согласно (15), равна взятому с обратным знаком скачку касательных напряжений на стыке  $x = 0$  правой и левой полуполос.

**3. Примеры решения задачи** Проиллюстрируем полученное решение, рассмотрим два примера для внешней нагрузки  $Y(y)$ .

*Пример 1.* Пусть

$$Y(y) = \begin{cases} -2y, & \alpha_1 \leq y \leq \alpha_2; \\ 0, & 0 \leq y < \alpha_1 \text{ и } \alpha_2 < y \leq h. \end{cases} \quad (20)$$

По формулам (20), (15), (9) и (8) найдем решение задачи. Ниже приведены графики, иллюстрирующие решение. На рис. 2 показан график сходимости касательных напряжений в сечении  $x = 0.001$  к раскладываемой функции. Как видно из рисунка, при  $y = 2$  имеется скачок касательных напряжений в полученном решении. Это связано с тем, что касательные напряжения на верхней стороне полосы равны нулю согласно граничным условиям (1). На рис. 3 показано распределение нормальных напряжений при  $x = 0$ . Здесь нормальные напряжения  $\sigma_x(0, y)$  имеют логарифмическую особенность при  $y = 2$ . На рис. 4 приведены графики напряжений в заделке. На рис. 5 показано распределение перемещений на верхней стороне полосы. При вычислениях считалось, что  $\nu = 1/3$ ,  $h = 2$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = h$ .

*Пример 2.* Пусть

$$Y(y) = \begin{cases} -2[y^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)y + \alpha_1 \alpha_2], & \alpha_1 \leq y \leq \alpha_2; \\ 0, & 0 \leq y < \alpha_1 \text{ и } \alpha_2 < y \leq h. \end{cases} \quad (21)$$

Аналогично найдем решение задачи по формулам (20), (15), (9) и (8). На рис. 6–9 приведены аналогичные графики, иллюстрирующие решение. Как и в предыдущем примере, считалось, что  $\nu = 1/3$ ,  $h = 2$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = h$ .

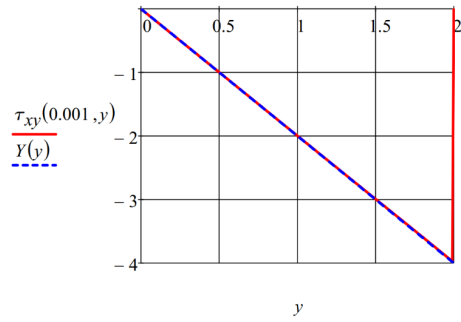


Рис. 2. График сходимости касательных напряжений в сечении  $x = 0.001$  к раскладываемой функции

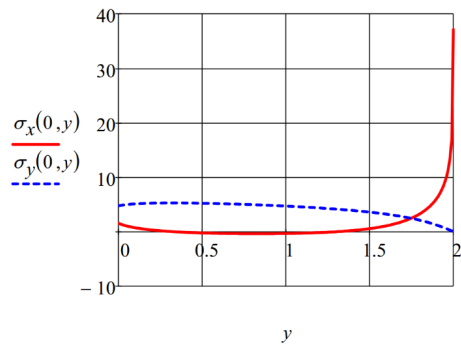


Рис. 3. Распределение нормальных напряжений при  $x = 0$

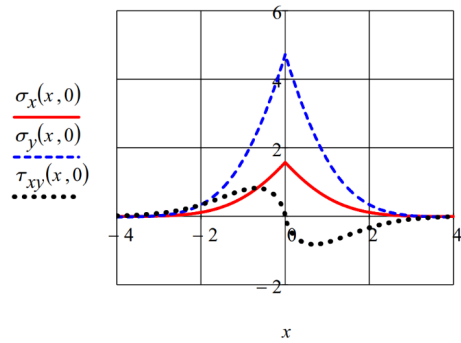
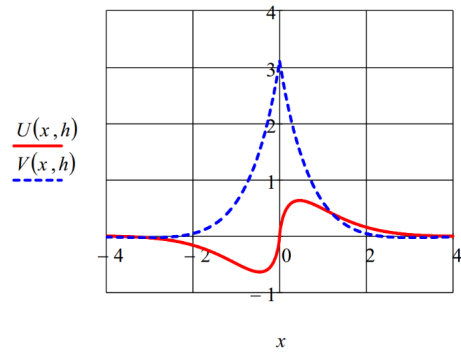
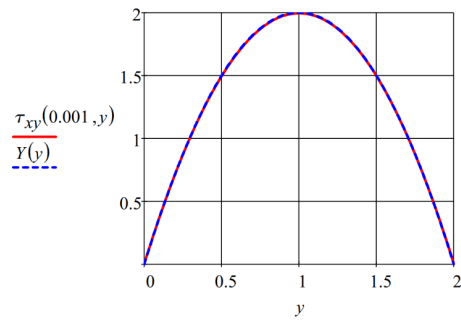
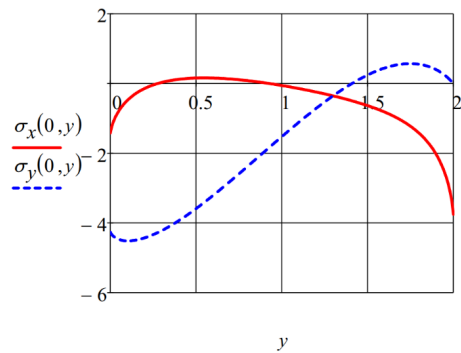


Рис. 4. Распределение напряжений при  $y = 0$

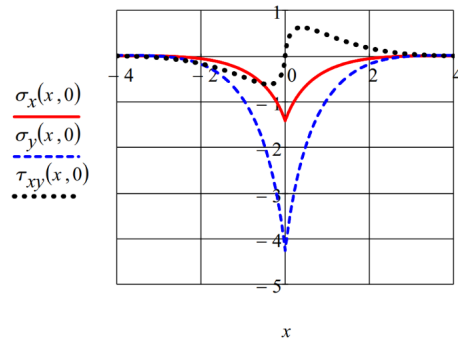
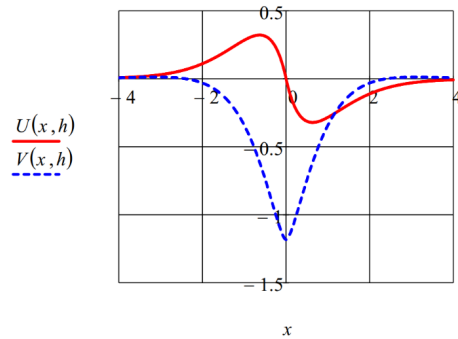
#### 4. Выводы

- В тех точках, где внешняя нагрузка  $Y(y)$  имеет конечные разрывы, напряжения  $\sigma_x(0, y)$  и  $\sigma_y(0, y)$  имеют логарифмическую особенность (рис. 3). Она исчезает для напряжений  $\sigma_y(0, y)$  при  $\alpha_2 = h$  из-за того, что  $\sigma_y(0, h) = 0$ .

Рис. 5. Распределение перемещений при  $y = h$ Рис. 6. График сходимости касательных напряжений в сечении  $x = 0.001$  к раскладываемой функцииРис. 7. Распределение нормальных напряжений при  $x = 0$ 

- Напряжения и перемещения быстро затухают вдоль полосы так, что на расстоянии, приблизительно равном ширине пластины, ими практически можно пренебречь.



Рис. 8. Распределение напряжений при  $y = 0$ Рис. 9. Распределение перемещений при  $y = h$ 

- Нагрузку, действующую вдоль оси  $y$ , можно сместить вправо или влево на некоторую величину  $a$ . В этом случае в формулах (9) надо заменить  $x$  на  $x - a$ , если смещение выполнено вправо, и на  $x + a$ , если — влево. Так можно построить, например, решение с периодической нагрузкой  $Y(y)$ .
- Функцию  $Y(y)$  можно рассматривать как контактные напряжения между ребром жесткости и пластиной. Тогда  $Y(y)$  может быть определена из условия равновесия элементарного участка ребра. Так можно получить решения различных задач о передаче нагрузки от ребра (ребер) жесткости к упругой полосе.
- Накладывая на решение для бесконечной полосы решение для прямоугольника [15], можно получить решение неоднородной задачи для прямоугольника со свободными (или какими-либо другими) торцами, в том числе для прямоугольника с ребром (ребрами) жесткости, расположенным внутри прямоугольника.
- В том случае, когда одна из сторон полосы подкреплена ребром жесткости, нужно использовать соотношение ортогональности Папковича, записанное в другом виде.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 335–339.
- [2] Гринберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // ПММ. 1953. Т. 17. № 2. С. 211–228.
- [3] Gregory R. D. A note on bi-orthogonality relations for elastic cylinders of general cross section // Journal of Elasticity. 1983. Vol. 13. No. 3. P. 351–355.
- [4] Нуллер Б. М. О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа // ПММ. 1969. Т. 33. № 2. С. 376–383.
- [5] Patra B. On a generalised orthogonality relation and its use in the problem of elasticity of a truncated cylindrical wedge // Journal of the Indian Institute of Science. 1981. Vol. 63. No. 2. P. 25–33.
- [6] Prakash B. G. Generalised orthogonality relation for rectangular strips in elastodynamics // Mechanics Research Communications. 1978. Vol. 5. No. 5. P. 251–255.
- [7] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
- [8] Steketee J. A. On Volterra's dislocations in a semi-infinite elastic medium // Canadian Journal of Physics. 1958. Vol. 36. No. 2. P. 192–205.
- [9] Касахара К. Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 265 с.
- [10] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
- [11] Слепян Л. И. Механика трещин. Ленинград: Судостроение, 1990. 296 с.
- [12] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G. An inhomogeneous problem for an elastic half-strip: an exact solution // Mathematics and Mechanics of Solids. 2021. Vol. 26, No. 11. P. 1565–1580.
- [13] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
- [14] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. Москва: Стройиздат, 1975. 224 с.
- [15] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Кержаев А. П., Шуляковская Т. Д. Некоторые решения теории упругости для прямоугольника // ПММ. 2021. Т. 85. № 3. С. 370–382.

А. П. Kerzhaev<sup>1</sup>, И. В. Menshova<sup>1,2</sup>, А. В. Nikitin<sup>3</sup>

### INHOMOGENEOUS PROBLEM FOR A STRIP WITH DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS

<sup>1</sup>*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

<sup>3</sup>*Cheboksary Cooperative Institute (Branch) of the Russian University of Cooperation, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** In this paper, an exact solution to an inhomogeneous problem of elasticity theory is constructed for an infinite strip, the lower side of which is rigidly clamped, while the upper side is free. An external load acts along the vertical axis of the strip. The solution method is based on the use of the Papkovich orthogonality relation. The solution is represented in the form of series in Papkovich–Fadle eigenfunctions, the coefficients of which are determined explicitly. Examples of solving the problem are given.

**Keywords:** inhomogeneous problem, strip, Papkovich–Fadle eigenfunctions, Papkovich orthogonality relation, exact solutions.

## REFERENCES

- [1] Papkovich P. F. On one form of solution of the plane problem of the theory of elasticity for a rectangular strip // Doklady AN SSSR. 1940. Vol. 27. No. 4. P. 335–339. (in Russian).
- [2] Grinberg G. A. On a method applied by P. F. Papkovich for the solution of the plane problem of the theory of elasticity for a rectangular region and of problem of bending of a rectangular thin plate with two clamped edges, and on some of its generalizations // PMM. 1953. Vol. 17. No. 2. P. 211–228. (in Russian).
- [3] Gregory R. D. A note on bi-orthogonality relations for elastic cylinders of general cross section // Journal of Elasticity. 1983. Vol. 13. No. 3. P. 351–355.
- [4] Nuller B. M. On the generalized orthogonality relation of P. A. Schiff // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1969. Vol. 33, No. 2. P. 364–372.
- [5] Patra B. On a generalised orthogonality relation and its use in the problem of elasticity of a truncated cylindrical wedge // Journal of the Indian Institute of Science. 1981. Vol. 63. No. 2. P. 25–33.
- [6] Prakash B. G. Generalised orthogonality relation for rectangular strips in elastodynamics // Mechanics Research Communications. 1978. Vol. 5, No. 5. P. 251–255.
- [7] Kovalenko M. D., Shulyakovskaya T. D. Expansions in Fadde–Papkovich functions in a strip. Theory foundations // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46, No. 5. P. 721–738.
- [8] Steketee J. A. On Volterra’s dislocations in a semi-infinite elastic medium // Canadian Journal of Physics. 1958. Vol. 36. No. 2. P. 192–205.
- [9] Kasahara K. Earthquake mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [10] Landau L. D., Lifshitz E. M. Theory of elasticity. Course of theoretical physics. Vol. 7. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1986.
- [11] Slepyan L. I. Mechanics of cracks. Leningrad: Sudostroenie, 1990. 296 p. (in Russian).
- [12] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G. An inhomogeneous problem for an elastic half-strip: an exact solution // Mathematics and Mechanics of Solids. 2021. Vol. 26. No. 11. P. 1565–1580.
- [13] Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill, 1951.
- [14] Vlasov V. V. Method of initial functions in problems of the theory of elasticity and structural mechanics. Moscow: Stroiizdat, 1975. 224 p. (in Russian).
- [15] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Shulyakovskaya T. D. Some solutions of the theory of elasticity for a rectangle // Mechanics of Solids. 2021. Vol. 56. No. 7. P. 1232–1242.

---

*Kerzhaev Alexander Petrovich*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.  
*Menshova Irina Vladimirovna*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.  
*Nikitin Andrey Vitalievich*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Cheboksary Cooperative Institute (Branch) of the Russian University of Cooperation, Cheboksary, Russia.