Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 2 (56). С. 99–107

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ТЕРМИЧЕСКИЕ И АТЕРМИЧЕСКИЕ ПЛОСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В АЦЕНТРИЧЕСКОМ ИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Настоящая статья посвящена вопросам распространения плоских термоупругих гармонических волн в ацентрическом изотропном микрополярном теле. С этой целью сначала рассматриваются динамические уравнения ацентрического изотропного тела. Определяются пространственные поляризации плоских волн трансляционных и спинорных перемещений. Обсуждается качественный характер возможных волновых решений уравнений связанной микрополярной термоупругости. Отдельно рассматривается случай атермической волны.

Ключевые слова: волна, поляризация, волновой вектор, трансляционное перемещение, спинорное перемещение, микрополярность, ацинтрическое изотропное тело, волновое число, термоупругость, атермическая волна

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010

УДК: 539.374

1. Вводные замечания. Развитие современных методов производства материалов и метаматериалов в значительной степени определяется развитием инновационных технологических приемов их термомеханической обработки. Получаемые изделия обладают специфическими микроструктурными особенностями, проявляющими гиротропные (гемитропные) свойства. Для описания термомеханического поведения таких материалов требуется привлечение неклассические моделей современной механики сплошных сред. К таким моделям относятся ацентрические изотропные микрополярные тела. Основной особенностью таких тел является чувствительность их определяющих псевдоскаляров к преобразованиям, изменяющим ориентацию терхмерного пространства (зеркальным отражениям и инверсиям пространства). Практическая значимость исследований в этой области механики континуума связана с

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМех РАН (№ госрегистрации 123021700050-1).

Поступила 20.06.2023

моделированием поведения биоматериалов, используемых в медицине, сотовых конструкций, керамик, гранулированных материалов. Биологические ткани животного происхождения (мышечная ткань, длинные кости, стенки кровеносных сосудов) проявляют выраженные гиротропные свойства, что подтверждается публикациями [1–3].

Термомеханика микрополярных континуумов — бурно развивающаяся область механики сплошных сред, о чем свидетельствует многочисленные монографии, посвященные этому вопросу [1–8]. Литературный поиск позволяет заключить, что подавляющее большинство из них посвящено вопросам моделирования линейных изотропных микрополярных сред, и лишь скудные источники посвящены ацентрическим изотропным телам. В случае общей анизотропии, микрополярное упругое тело характеризуется 171-ой определяющей постоянной, что существенно усложняет анализ систем дифференциальных уравнений, возникающих при решении конкретных прикладных задач. Ацентрическое изотропное тело задается девятью определяющими константами, что всего на три больше, чем в изотропном случае. В конвенциональных микрополярных теориях механики деформируемых сред [2] оперируют с двумя независимыми кинематическими полями: трансляционные и спинорные перемещения (микроповороты), которые наиболее естественно задаются псевдовекторами (в частности, контравариантным псевдовектором веса $+1$ [9] или ковариантным псевдовектором веса -1 [10]). Использование алгебры и анализа псевдотензоров [11] позволяет получить геометрически и физически непротиворечивые формулировки теорий микрополярных тел, которые могут быть легко трансформированы к формулировкам в терминах абсолютных тензоров с помощью степеней псевдоскалярных единиц.

Волновые задачи механики микрополярных континуумов возникают при моделировании процессов медицинской диагностики, таких как, ультразвуковое исследование, сонография, спектральная допплерография. Теоретической основой для указанных методов диагностики могут служить задачи о распространении гармонических волн в сплошной среде [12–14]. Волновым задачам термомеханики микрополярных континуумов посвящена обширная литература [4–8]. В настоящей работе рассматривается задача о распространении плоской гармонической волны в ацентрическом изотропном термоупругом микрополярном континууме.

2. Трансляционные и спинорные перемещения. Рассмотрим Евклидово трехмерное пространство [15]. Введем понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра (веса $+1$) и двух псевдоскалярных единиц в соответствии со следующими зависимостями [16]:

$$e = \underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\underset{2}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{3}{\boldsymbol{\imath}})$$

$$\overset{[+1]}{1} = e, \qquad \overset{[-1]}{1} = e^{-1}. \tag{1}$$

Отметим, что знак псевдоскалярной единицы (1) определяет ориентации координатных реперов, т.е. для правоориентированных троек векторов — $\overset{[+1]}{1} > 0$, для левоориентированных — $\overset{[+1]}{1} < 0$.

Кроме того, целые степени псевдоскалярных единиц ковариантно постоянны, т.е.

$$\nabla_k \overset{[\pm \mathrm{g}]}{1} = \overset{[\pm \mathrm{g}]}{0},$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js}.

В конвенциональных микрополярных теориях термомеханики [2] оперируют с двумя независимыми полями трансляционных и спинорных перемещений (микроповоротами), которые наиболее естественно задаются абсолютным векторами (контравариантным u^s или коваринатным u_s) и псевдовекторами (в частности, контравариантным псевдовектором $\overset{[+1]}{\phi}{}^s$ веса $+1$ [9] или ковариантным псевдовектором $\overset{[-1]}{\phi}_s$ веса -1 [10]). Псевдотензорная формулировка микрополярной теории может быть преобразована к ковариантной, представленной в работе [4], согласно правилу баланса весов [17, 18].

3. Динамические уравнения гемитропной микрополярной среды. В работе [19] рассматривалась псевдотензорная формулировка связанного термоупругого ацентрического изотропного тела в терминах абсолютного ковариантного вектора трансляционных перемещений u_s и контравариантного псевдовектора спинорных перемещений положительного веса $\overset{[+1]}{\phi}{}^s$. В этом случае, динамические уравнения можно принять в следующей форме

$$
\begin{gathered}
G[(1+e^2\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1-e^2\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}_l + \\
+\overset{[-1]}{L}c_4'\nabla^i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L}c_5'\nabla^k\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^i] - 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla_i\theta = -\rho(f^i - \partial..u^i),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}[(1+\frac{1}{e^2}\overset{[+2]}{\mathfrak{c}}_2)\nabla^s\nabla_s\overset{[+1]}{\phi}_i + (1-\frac{1}{e^2}\overset{[+2]}{\mathfrak{c}}_2 + 2\mathfrak{c}_3)\nabla_i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \\
+\overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_4'\nabla_i\nabla^k u_k + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_5'\nabla^k\nabla_k u_i + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\nabla^s\overset{[+1]}{\phi}{}^l] - \\
-2eG\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1(2\overset{[+1]}{\phi}_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) - 2G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}\nabla_i\theta = -\rho(\overset{[-1]}{l}_i - \overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\partial..\overset{[+1]}{\phi}_i),
\end{gathered}
$$

$$
\nabla_s\nabla^s\theta - \frac{c\rho}{\lambda}\partial.\theta - 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\frac{\theta_0}{\lambda}\nabla_s\partial.u^s - 2G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}\frac{\theta_0}{\lambda}\nabla_s\partial.\overset{[+1]}{\phi}{}^s + \frac{\rho q}{\lambda} = 0,
$$

где f_i — вектор массовых сил, $\overset{[-1]}{l}_i$ — псевдовектор массовых моментов, G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; $\overset{[-1]}{L}$ — характерная микродлина; $\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1$, $\overset{[+2]}{\mathfrak{c}}_2$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{c}_4$, $\mathfrak{c}_5$, $\mathfrak{c}_6$ — не имеющие физической размерности псевдоскаляры; $\underset{*}{\alpha}$ — коэффициент линейного теплового расширения; $\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}$ — коэффициент теплового изгиба–кручения; λ — коэффициент теплопроводности; c — теплоемкость на единицу массы при нулевой деформации (см. [4, 9]). θ — превышение температуры над отсчетной температурой θ_0. Кроме того, введены обозначения

$$
c_4' = 2\mathfrak{c}_6 + \mathfrak{c}_4 - \mathfrak{c}_5, \quad c_5' = \mathfrak{c}_4 + \mathfrak{c}_5, \quad c_6' = 4\mathfrak{c}_5. \tag{2}
$$

Для получения системы динамических дифференциальных уравнений в терминах абсолютных векторов достаточно воспользоваться правилом баланса весов [17, 18]. В частности

$$
\phi^s = \overset{[-1]}{1}\overset{[+1]}{\phi}{}^s. \tag{3}
$$

В итоге, в отсутствии массовых сил и массовых моментов получим

$$
\begin{gathered}
G[(1+\mathfrak{c}_1)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+(1-\mathfrak{c}_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+\\
+2\mathfrak{c}_1\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}+Lc_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}+Lc_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}]-2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\theta=\rho\ddot{\mathbf{u}},\\
GL^2\big[(1+\mathfrak{c}_2)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}+(1-\mathfrak{c}_2+2\mathfrak{c}_3)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}+L^{-1}c_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+\\
+L^{-1}c_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+L^{-1}c_6'\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}\big]-2G\mathfrak{c}_1(2\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})-2GL^2\underset{*}{\beta}\boldsymbol{\nabla}\theta=\mathfrak{J}\ddot{\boldsymbol{\phi}},\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta-\frac{c\rho}{\lambda}\dot{\theta}-2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\frac{\theta_0}{\lambda}\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{u}}-2GL^2\underset{*}{\beta}\frac{\theta_0}{\lambda}\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}}+\frac{\rho q}{\lambda}=0.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

В дальнейшем изложении мы будем рассматривать упрощенный вариант связанных уравнений ацентрического изотропного термоупругого тела, когда из полного набора определяющих констант остаются только связанные с температурным градиентом $\varsigma\boldsymbol{\nabla}\theta$. Тогда, система динамических уравнений при переходе от материальных определяющих констант к конвенциональным примет вид

$$
\begin{cases}
(\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+(\mu-\alpha+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}-\eta\boldsymbol{\nabla}\theta=\rho\ddot{\mathbf{u}},\\
(\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}+(\gamma-\varepsilon+\beta)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}+2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}-4\alpha\boldsymbol{\phi}-\varsigma\boldsymbol{\nabla}\theta=\mathfrak{J}\ddot{\boldsymbol{\phi}},\\
\dfrac{\mathfrak{c}}{\kappa}\dot{\theta}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta-\dfrac{1}{\kappa}(\eta\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{u}}+\varsigma\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}}).
\end{cases}
\tag{5}
$$

4. Плоская гармоническая термоупругая волна. Исследуем решения системы (5) в форме плоских волн температуры, трансляционных и спинорных перемещений:

$$
\mathbf{u}=\mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)},\quad \boldsymbol{\phi}=\mathbf{S}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)},\quad \theta=Be^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}
\tag{6}
$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор; $\mathbf{k}$ — (комплексный) волновой вектор; ω — циклическая частота; $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ — (комплексные) векторы пространственной поляризации волны; B — (комплексная) амплитуда температурного инкремента.

В результате подстановки векторов (6) в динамические уравнения (5) получим уравнения для волнового вектора $\mathbf{k}$ и векторов поляризации плоской волны $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ ($k^2=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$)

$$
\begin{gathered}
-(\mu-\alpha+\lambda)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})\mathbf{k}-[(\mu+\alpha)k^2-\rho\omega^2]\mathbf{A}+2\alpha i\mathbf{k}\times\mathbf{S}-\eta i\mathbf{k}B=\mathbf{0},\\
-(\gamma-\varepsilon+\beta)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S})\mathbf{k}-[(\gamma+\varepsilon)k^2+4\alpha-\mathfrak{J}\omega^2]\mathbf{A}+2\alpha i\mathbf{k}\times\mathbf{A}-\varsigma i\mathbf{k}B=\mathbf{0},\\
-k^2B+\frac{\mathfrak{c}}{\kappa}i\omega B-\frac{\eta}{\kappa}\omega(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})-\frac{\varsigma}{\kappa}\omega(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S})=0,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Из системы уравнений (7) легко получить выражения для проекций векторов поляризации $\mathbf{A}$ и $\mathbf{S}$ на волновой вектор $\mathbf{k}$:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{k}=\frac{\eta ik^2B}{-(\lambda+\mu-\alpha)k^2-(\mu+\alpha)k^2+\rho\omega^2},\\
\mathbf{S}\cdot\mathbf{k}=\frac{\varsigma ik^2B}{-(\beta+\gamma-\varepsilon)k^2-(\gamma+\varepsilon)k^2-4\alpha+\mathfrak{J}\omega^2}.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Из соотношений (8) видно, что в связанной термоупругой волне ($B\neq 0$) оба вектора поляризации $\mathbf{A}$ и $\mathbf{S}$ имеют ненулевые проекции на волновой вектор $\mathbf{k}$, т.е. указанная волна всегда содержит продольные составляющие трансляционных перемещений и микроповоротов. Более того, можно показать, что она является чисто поперечной, т.е.

поперечные составляющие перемещений и микровращений равны нулю. Упомянутые проекции легко исключаются из системы уравнений (7), поскольку достаточно просто выражаются через комплексную амплитуду инкремента температуры B. В частности, их исключение возможно в третьем уравнении рассматриваемой системы [20].

3. Атермическая плоская гармоническая волна. В случае атермической волны комплексная амплитуда $B = 0$ и можно вести речь о гиперболической модели распространения волн [13]. Векторы поляризации атермической волны $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ в силу (8) имеют нулевые проекции на волновой вектор $\mathbf{k}$, поэтому рассматриваемая волна является чисто поперечной, т.е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\perp}, \qquad \mathbf{S} = \mathbf{S}_{\perp}.$$

Система уравнений (7) в случае атермической волны упрощается:

$$\begin{aligned} &-((\mu+\alpha)k^2 - \rho\omega^2)\mathbf{A} + 2\alpha i\mathbf{k}\times\mathbf{S} = \mathbf{0}, \\ &-((\gamma+\varepsilon)k^2 + 4\alpha - \Im\omega^2)\mathbf{S} + 2\alpha i\mathbf{k}\times\mathbf{A} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{9}$$

Из второго уравнения системы (9) следует, что векторы поляризации $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ ортогональны друг другу, поскольку

$$2\mathbf{S} = i\Omega^2 \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{A}}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}k^2 + \Omega^2 - \omega^2}, \tag{10}$$

где

$${}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2} = \frac{\gamma+\varepsilon}{\Im}.$$

Подставляя выражение для $\mathbf{S}$ из (10) в первое уравнение системы (9), находим

$$\left[-\rho({}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}k^2 - \omega^2) + \frac{\alpha\Omega^2 k^2}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}k^2 + \Omega^2 - \omega^2}\right]\mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

откуда получаем уравнение для определения волновых чисел

$$-\rho({}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}k^2 - \omega^2) + \frac{\alpha\Omega^2 k^2}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}k^2 + \Omega^2 - \omega^2} = 0,$$

или, вводя безразмерное значение волнового числа

$$\widetilde{k} = \frac{k}{{}^{\backprime\backprime}k_{\perp}},$$

где

$${}^{\backprime\backprime}k_{\perp}^{2} = \frac{\omega^2}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2}}, \quad {}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2} = \frac{\mu+\alpha}{\rho},$$

и опуская тильду над k, в итоге приходим к следующему уравнению:

$$[k^2-1][{}_{\mu}d_{\perp}^{2}k^2 - (1-(i\tau)^2))] = (i\tau)^2 d_{\perp}^{2}k^2, \tag{12}$$

где введены следующие обозначения:

$$d_{\perp}^{2} = \frac{{}^{\backprime}c_{\perp}^{2}}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2}}, \quad {}^{\backprime}c_{\perp}^{2} = \frac{\alpha}{\rho}, \quad {}_{\mu}d_{\perp}^{2} = \frac{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^{2}}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^{2}}.$$

Волновые числа k, соответствующие атермической волне, находятся как корни биквадратного уравнения (12) и могут быть представлены в форме

$$2\,{}_{\mu}d_{\perp}^{2}k_{1,2}^{2} = (i\tau)^2 d_{\perp}^{2} + {}_{\mu}d_{\perp}^{2} + 1 - (i\tau)^2 \pm \sqrt{\Delta}, \tag{13}$$

где для дискриминанта имеем

$$\Delta = [(i\tau)^2 d_\perp^2 - {}_\mu d_\perp^2 + (1 - (i\tau)^2)]^2 + 4(i\tau)^2 {}_\mu d_\perp^2 d_\perp^2.$$

Дискриминант Δ как нетрудно заметить положителен:

$$\Delta > 0,$$

поэтому оба значения для квадрата волнового числа k, данные (13), вещественны.

Поскольку

$$k_1^2 k_2^2 = \frac{1 - (i\tau)^2}{{}_\mu d_\perp^2},$$

то тогда в случае $1 > (i\tau)^2$ оба значения k_1^2 and k_2^2 положительны, в противном случае (когда $1 < (i\tau)^2$) первое значение k_1^2 положительно, а второе k_2^2 отрицательно.

Рассмотрим сначала первый случай, полагая $1 > (i\tau)^2$. Возможные волновые числа атермической волны определятся четырьмя вещественными значениями

$$\sqrt{2}{}_\mu d_\perp k_{1,\,2;\,3,\,4} = \pm\sqrt{(i\tau)^2 d_\perp^2 + {}_\mu d_\perp^2 + 1 - (i\tau)^2 \pm \sqrt{\Delta}},$$

среди которых лишь два являются нормальными: $k_{1;\,3}$ and $k_{1;\,4}$.

Во втором случае, когда выполняется неравенство $1 < (i\tau)^2$, имеется очевидно единственное вещественное нормальное волновое число, которое может быть вычислено по формуле

$$\sqrt{2}{}_\mu d_\perp k_{1;\,3} = \sqrt{(i\tau)^2 d_\perp^2 + {}_\mu d_\perp^2 + 1 - (i\tau)^2 + \sqrt{\Delta}}.$$

Таким образом, приходим к выводу о том, что в случае $(i\tau)^2 < 1$ имеется два вещественных нормальных волновых числа, а в случае $(i\tau)^2 > 1$ — лишь одно.

5. Заключение. В работе рассматриваются задачи о распространении плоских термоупругих гармонических волн в ацентрическом изотропном микрополярном теле.

(1) Трансляционные и спинорные перемещения характеризующиеся псевдовекторами использовались для построения модели ацентрического изотропного термоупругого микрополярного тела.
(2) Псевдотензорные веса в формулировке динамических уравнений устранены с помощью правила балансировки весов.
(3) Динамическая модель распространения связанной гармонической волны сформулирована в терминах абсолютных тензоров.
(4) Рассмотрено решение задачи о распространении плоской термоупругой гармонической волны в ацентрическом изотропном микрополярном теле.
(5) Динамические уравнения ацентрического изотропного микрополярного континуума приводятся к конвенциональному виду.
(6) Определены пространственные поляризации волн трансляционных и спинорных перемещений относительно волнового вектора плоской гармонической волны.
(7) Обсуждается качественный характер возможных волновых решений динамических уравнений связанной микрополярной термоупругости.
(8) Рассмотрен случай распространения атермической гармонической волны по ацентрическому изотропному термоупругому микрополярному телу.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Maugin G. Non-Classical Continuum Mechanics. A Dictionary. Singapore: Springer, 2017. xvii+259 p.

[2] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.

[3] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.

[4] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума. 2018. Т. 22. с. 504–517.

[5] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1986. 872 с.

[6] Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1962. 364 с.

[7] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.

[8] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.

[9] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. URL: https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

[10] Murashkin E., Radayev Y. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449. URL: https://doi.org/10.1134/S1995080223060392.

[11] Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.

[12] Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

[13] Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.

[14] Весоловский З. Динамические задачи нелинейной теории упругости. Киев: Наук. думка, 1981. 216 с.

[15] Б.А. Розенфельд. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

[16] Radayev Y. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58. P. 1517–1527. URL: https://doi.org/10.3103/S0025654423700206.

[17] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 1. с. 51. URL: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002.

[18] Murashkin E., Radayev Y. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. P. 1416–1423. URL: https://doi.org/10.3103/s0025654422060085.

[19] Murashkin E., Radayev Y. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. URL: https://doi.org/10.1134/S1995080223060392.

[20] Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

THERMIC AND ATHERMIC PLANE HARMONIC WAVES IN ACENTRIC ISOTROPIC SOLID

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The present paper is devoted to the propagation of plane thermoelastic harmonic waves in an acentric isotropic micropolar solid. For this aim, the dynamic equations of an acentric isotropic solid are considered. The spatial polarizations of plane waves of translational and spinor displacements are determined. The qualitative nature of possible wave solutions to the equations of coupled micropolar thermoelasticity is discussed. The case of an athermic wave is considered separately.

Keywords: wave, polarization, wave vector, translational displacement, spinor displacement, micropolarity, acentric isotropic solid, wave number, thermoelasticity, athermal wave

REFERENCES

[1] Maugin G. Non-Classical Continuum Mechanics. A Dictionary. Singapore: Springer, 2017. xvii+259 p.
[2] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[3] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
[4] Radaev Y. N. Rule of multipliers in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics. 2018. Vol. 22. p. 504–517.
[5] Novatsky V. Theory of elasticity. M.: World, 1986. 872 p.
[6] Novatsky V. Issues of thermoelasticity. M.: Publishing house Acad. Sciences of the USSR, 1962. 364 p.
[7] Novatsky V. Dynamic problems of thermoelasticity. M.: World, 1970. 256 p.
[8] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Publishing House of Saratov University, 2010. 328 p.
[9] Whitham J. Linear and nonlinear waves. M.: World, 1977. 622 p.
[10] Brehovskikh L. M., Goncharov V. V. Introduction to continuum mechanics (with application to wave theory). M.: Science, 1982. 336 p.
[11] Vesolovsky Z. Dynamic problems of nonlinear elasticity theory. Kyiv: Science. thought, 1981. 216 p.
[12] Radayev Y. N., Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Techn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2019. Vol. 23. p. 464–474. URL: https://doi.org/10.14498/vsgtu1689.
[13] B.A. R. Multidimensional spaces. M.: Science, 1966. 648 p.
[14] Radayev Y. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58. P. 1517–1527. URL: https://doi.org/10.3103/S0025654423700206.
[15] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. Algebraic algorithm for systematically reducing one-point pseudotensors to absolute tensors // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. IYA Yakovleva. Limit state mechanics series. 2022. № 1. c. 51. URL: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002.

Murashkin Evgenii Valeryevich, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Radayev Yuri Nikolaevich, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[16] Murashkin E.V., Radayev Y.N. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // Mechanics of Solids. 2022. T. 57, № 6. C. 1416–1423. URL: https://doi.org/10.3103/s0025654422060085.

[17] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. 2020. T. 82, № 4. C. 399–412. URL: https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

[18] Murashkin E.V., Radayev Y.N. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. T. 44, № 6. C. 2440–2449. URL: https://doi.org/10.1134/S1995080223060392.

[19] Murashkin E., Radayev Y. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. URL: https://doi.org/10.1134/S1995080223060392.

[20] Sushkevich A. Fundamentals of Higher Algebra. M.: ONTI, 1937. 476 p.

The present study was supported by the Ministry of Science and Higher Education within the framework of the Russian State Assignment under contract No. 123021700050-1.