Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 2 (56). С. 108–118

Т. К. Нестеров

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И МИКРОВРАЩЕНИЙ В ПОЛУИЗОТРОПНОМ МИКРОПОЛЯРНОМ ТЕЛЕ

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе рассматривается распространение поверхности слабых разрывов вектора перемещений и псевдовектора микровращения в полуизотропном микрополярном теле. Определяется скорость поверхности слабых разрывов, при которой возможно распространение поверхностей связанных слабых разрывов перемещений и микровращений. Найдена зависимость слабых разрывов вектора перемещений от вектора микровращений и наоборот в касательном и нормальном направлении относительно поверхности слабого разрыва.

Ключевые слова: микрополярный континуум, анизотропность, полуизотропность, слабые разрывы, условия совместности, перемещение, микровращение

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.011

УДК: 539.374

Введение. Модель микрополярного тела исторически является первой моделью среды с микроструктурой, была предложена братьями Коссера в 1909 году [1]. Изначальным мотивом использования модели тела с микроструктурой была неудовлетворительность применения классической линейной теории упругости при расчете оболочек и пластин, поскольку она не позволяла учесть моменты, возникающие в теле, которые могут быть критически важны. В дальнейшем, работа [2] дополнила оригинальное исследование братьев Коссера и вернула интерес к средам с микроструктурой.

Позже выходят работы [3, 4] посвященные модели микроморфной среды, в которой учитывается не только ориентация малого элемента тела, но и его сдвиги с растяжениями. Таким образом модель микроморфной среды является обобщением модели микрополярного тела. Заметим, что среды с микроструктурой могут быть использованы для моделирования процессов объемного роста [5] без необходимости введения

Нестеров Тимофей Константинович
`e-mail:` Nesterovtim4@gmail.com, программист, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

Поступила 20.06.2023

дополнительной (виртуальной) конфигурации тела, поскольку объемный рост может быть задан как изменение объема малого элемента тела.

Особенностью всех сред с микроструктурой является наличие тензора микродеформаций, который может быть истолкован двумя способами:

(1) как тензор описывающий преобразование директоров, на которых строится малый элемент тела [6];
(2) как линейный член ряда разложения вектора микроперемещения, описывающего изменение малого элемента тела [7,8]. Отметим, что допустимо говорить о микроморфных средах (и как частный случай микрополярных средах), как о средах с микроструктурой первого порядка [9].

В работе [10] на основе полярного разложения тензора микродеформации проводится классификация подобных сред. Для сред Коссера тензор микродеформации обладает свойством ортогонального тензора, что и приводит к отсутствию растяжения и сдвигов в малом элементе тела.

В работе [11] было предложено явное выражение для тензора микродеформации (микровращения) в микрополярном теле. За основу была взята формула Гибса [12, стр. 338, ур. (6)], описывающая поворот в трехмерном пространстве. При переходе к геометрически линейной теории микроплярного тела, тензор микроповорота полностью описывается ассоциированным с вектором микровращения антисимметричным тензором. Однако, при наличии анизотропии в микрополярном теле (простейшим случаем которой является полуизотропность), вектор микровращения, вообще говоря, является псевдовектором, а следовательно, для корректных результатов требуется привлекать аппарат псевдотензоров [13, 14], что было отмечено и подробно изложено в работах [15, 16].

Основные соотношения линейной полуизотропной микрополярной теории упругости. Кинематика геометрически линейного микрополярного тела описывается вектором макроперемещений u^i (в дальнейшем просто вектор перемещений) и аксиальным вектором микровращения $\overset{[+1]}{\phi}{}^s$, в дальнейшем в квадратных скобках над корневым символом указывается вес псевдотензора. Связывающие между собой меры деформации с вектором перемещений и аксиальным вектором микровращения, кинематические соотношения линейной теории упругости микрополярного тела имеют вид:

$$\begin{gathered}\epsilon_{ij} = \epsilon_{(ij)} + \epsilon_{[ij]} = \nabla_{(i}u_{j)} - \overset{[-1]}{\epsilon}{}_{ijk}\overset{[+1]}{\varphi}{}^k = \nabla_i u_j - \overset{[-1]}{\epsilon}{}_{ijk}\overset{[+1]}{\phi}{}^k,\\ \epsilon_{(ij)} = \nabla_{(i}u_{j)}, \quad \epsilon_{[ij]} = -\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{ijk}\overset{[+1]}{\varphi}{}^k, \quad \overset{[+1]}{\varphi}{}^k = \overset{[+1]}{\phi}{}^k - \frac{1}{2}\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{kij}\nabla_i u_j,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\overset{[+1]}{\varphi}{}^k$ — относительный вектор микровращения, ϵ_{ij} — полный тензор малых деформаций, $\epsilon_{(ij)}$ — тензор малых деформаций, известный из механики линейного упругого тела, $\epsilon_{[ij]}$ — асимметричный тензор малых деформаций. К индексам заключенным в круглые или квадратные скобки применяется операция симметрирования или альтернирования, соответственно. Отметим, что в дальнейшем, не будем указывать положительный или отрицательный вес символа Леви –Чивита $\overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk}$, $\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{ijk}$ и фундаментального ориентирующего псевдоскаляра $\overset{[+1]}{e}, \dfrac{1}{\overset{[-1]}{e}}$.

Уравнения динамики микрополярного тела имеют вид [17]:

$$X^j + \nabla_i t^{ij} = \rho \ddot{u}^j, \quad \overset{[-1]}{Y}_k - 2\overset{[-1]}{\tau}_k + \nabla_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \rho \overset{[-2]}{J} \overset{[+1]}{\ddot{\phi}}_k, \tag{2}$$

где X^j, $\overset{[-1]}{Y}_k$ — вектор объемных сил и псевдовектор объемных момент, соответственно; t^{ij}, $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ — полный тензор напряжений Коши и псевдотензор моментных напряжений; $\overset{[-1]}{\tau}_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}t^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}t^{[ij]}$ псевдовектор ассоциированный с кососимметрической частью тензора напряжений; ρ, $\overset{[-2]}{J}$ — плотность и коэффициент микроинерции. Силовые граничные условия на поверхности тела с вектором внешней нормали n_i задаются следующими соотношениями:

$$t^j = n_i t^{ij}, \quad \overset{[-1]}{Y}_k = n_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}.$$

Для линейно упругого полуизотропного микрополярного тела потенциал внутренней энергии представим в четырех формах: первой основной энергетической, конвенциональной энергетической, основной энергетической, материальной. В данной работе потенциал выберем в виде основной энергетической формы

$$2U = 2U(\epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}_{ij}) = \underset{1}{H}{}^{ijlm}\epsilon_{ij}\epsilon_{lm} + \underset{2}{\overset{[-2]}{H}}{}^{ijlm}\overset{[+1]}{\kappa}_{ij}\overset{[+1]}{\kappa}_{ij} + \underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{ijlm}\epsilon_{ij}\overset{[+1]}{\kappa}_{ij},$$

где $\underset{p}{\overset{[W_p]}{H}}{}^{ijlm} = \underset{p}{\overset{[W_p]}{a}} g^{ij}g^{lm} + \underset{p}{\overset{[W_p]}{b}} g^{il}g^{jm} + \underset{p}{\overset{[W_p]}{c}} g^{im}g^{jl}$ есть тензор 4 ранга, инвариантный к ортогональным преобразованиям пространства, но чувствительный к зеркальным преобразованиям, за счет псевдоскаляров $\underset{p}{\overset{[W_p]}{a}}$, $\underset{p}{\overset{[W_p]}{b}}$, $\underset{p}{\overset{[W_p]}{c}}$.

Определяющие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} t^{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} = \underset{1}{H}{}^{ijlm}\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{ijlm}\overset{[+1]}{\kappa}_{lm} \\ \overset{[-1]}{\mu}{}^{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \overset{[+1]}{\kappa}_{ij}} = \underset{2}{\overset{[-2]}{H}}{}^{ijlm}\overset{[+1]}{\kappa}_{lm} + \frac{1}{2}\underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{ijlm}\epsilon_{lm} \end{aligned} \tag{3}$$

Подставив определяющие соотношения (3) в уравнения динамики (2) и, воспользовавшись видом тензора $\underset{p}{\overset{[W_p]}{H}}{}^{ijlm}$ и кинематическими соотношениями (1), получим систему уравнений в терминах перемещений и микровращений для линейного полуизотропного микрополяного тела:

$$
\begin{aligned}
&(\underset{1}{a}+\underset{1}{c})\nabla^j\nabla_i u^i+\underset{1}{b}\nabla^i\nabla_i u^j+\frac{1}{e^2}(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})\epsilon^{jik}\nabla_i\overset{[+1]}{\phi}{}_k+\\
&\qquad+\frac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}+\overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\nabla^j\nabla_i\overset{[+1]}{\phi}{}^i+\frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{b}}\nabla^i\nabla_i\overset{[+1]}{\phi}{}^j=-\rho(f^j-\ddot{u}^j);\\
&(\overset{[-2]}{\underset{2}{a}}+\overset{[-2]}{\underset{2}{c}})\nabla_j\nabla_i\overset{[+1]}{\phi}{}^i+\overset{[-2]}{\underset{2}{b}}\nabla^i\nabla_i\overset{[+1]}{\phi}{}_j+\frac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}+\overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\nabla_j\nabla_i u^i+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{b}}\nabla^i\nabla_i u_j-\frac{2}{e^2}(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})g_{jk}\overset{[+1]}{\phi}{}^k+\frac{1}{e^2}(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})g_{jk}\epsilon^{kpq}\nabla_p u_q\\
&\qquad\qquad+(\overset{[-1]}{\underset{3}{b}}-\overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\epsilon_{jpq}\nabla^p\overset{[+1]}{\phi}{}^q=-\rho(\overset{[-1]}{Y}{}_j-\overset{[-2]}{J}\,\overset{[+1]}{\phi}{}_j).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

В системе уравнений (4) удобно перейти от относительных тензоров к абсолютным тензорам посредством умножения на ориентирующий псевдоскаляр e, таким образом чтобы итоговый вес полученного произведения был равен нулю [18]:

$$
\begin{aligned}
&(\underset{1}{a}+\underset{1}{c})\nabla^j\nabla_i u^i+\underset{1}{b}\nabla^i\nabla_i u^j+(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})e^{jik}\nabla_i\phi_k+\\
&\qquad+\frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{c})\nabla^j\nabla_i\phi^i+\frac{1}{2}\underset{3}{b}\nabla^i\nabla_i\phi^j+\rho(f^j-\ddot{u}^j)=0,\\
&\frac{1}{e}\Big[(\underset{2}{a}+\underset{2}{c})\nabla_j\nabla_i\phi^i+\underset{2}{b}\nabla^i\nabla_i\phi_j+\frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{c})\nabla_j\nabla_i u^i+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\underset{3}{b}\nabla^i\nabla_i u_j-2(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})g_{jk}\phi^k+(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})g_{jk}e^{kpq}\nabla_p u_q\\
&\qquad\qquad+(\underset{3}{b}-\underset{3}{c})e_{jpq}\nabla^p\phi^q+\rho(Y_j-J\phi_j)\Big]=\overset{[-1]}{0}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

В дальнейшем будем предполагать, что выбрана правая, и не ограничивая общности, декартова система координат, т.е. $\frac{1}{e}=1$.

Коэффициенты при слагаемых в системе уравнений (5) могут быть пересчитаны [19] для иных материальных констант.

Условия совместности на поверхности слабых разрывов. Геометрические и кинематические условия совместности разрывов Адамара –Томаса производных второго и более порядков перемещений и микровращений могут быть представлены в виде [20][1 2]:

$$
\begin{aligned}
&[\nabla_i\nabla_j u^k]=n_i n_j U^k, \quad [\nabla_i\nabla_j\phi^k]=n_i n_j\Phi^k,\\
&[\partial_t\partial_t u^k]=G^2U^k, \qquad [\partial_t\partial_t\overset{[+1]}{\phi}{}^k]=G^2\Phi^k,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

---

[1]Здесь предполагаем, что поля перемещений и микровращений непрерывны до первой производной включительно

[2]Отметим, что кинематические и геометрические условия совместности на поверхностях слабых разрывов, распространяющихся в сплошных полуизотропных термоупругих средах в терминах псевдотензоров были рассмотрены в работе [21].

где в квадратных скобках указан скачок соответствующей величины при переходе через поверхность разрыва, G — скорость распространения поверхности слабых разрывов, U_i, Φ_i — некоторые поля, определенные на поверхности разрыва.

Подставив (6) в систему уравнений (5), получаем систему из двух соотношений, связывающую между собой скачки вторых производных от векторов перемещений и микровращений при переходе через волновую поверхность:

$$
\begin{aligned}
&(\underset{1}{a}+\underset{1}{c})n^j n_i U^i + \underset{1}{b}U^j + \frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{c})n^j n_i \Phi^i + \frac{1}{2}\underset{3}{b}\Phi^j - \rho G^2 U^j = 0,\\
&(\underset{2}{a}+\underset{2}{c})n_j n_i \Phi^i + \underset{2}{b}\Phi_j + \frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{c})n_j n_i U^i + \frac{1}{2}\underset{3}{b}U_j - \rho J G^2 \Phi_j = 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Разложим векторы поляризации слабых разрывов перемещений U^i и микровращений Φ_i на сумму проекций на нормальное n^i и касательное τ^i направление к поверхности разрыва:

$$
U^i = U_{\|}n^i + U_{\perp}\tau^i, \quad \Phi_i = \Phi_{\|}n_i + \Phi_{\perp}\tau_i;
$$

что позволяет преобразовать систему уравнений (7) к виду:

$$
\begin{aligned}
&((\underset{1}{a}+\underset{1}{b}+\underset{1}{c}) - \rho G^2)n^j U_{\|} + (\underset{1}{b} - \rho G^2)\tau^j U_{\perp} + \frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{b}+\underset{3}{c})n^j \Phi_{\|} + \frac{1}{2}\underset{3}{b}\tau^j \Phi_{\perp} = 0,\\
&((\underset{2}{a}+\underset{2}{b}+\underset{2}{c}) - \rho J G^2)n_j \Phi_{\|} + (\underset{2}{b} - \rho J G^2)\tau_j \Phi_{\perp} + \frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{b}+\underset{3}{c})n_j U_{\|} + \frac{1}{2}\underset{3}{b}\tau_j U_{\perp} = 0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

и, приводя подобные при проекциях на касательное и нормальное направление к поверхности слабого разрыва, получим следующие две системы уравнений. Отметим, что здесь произведен переход к объемной плотности момента инерции, а именно к $\bar{J} = \rho J$ (В дальнейшем черту над символом J будем опускать):

$$
\begin{pmatrix}
(\underset{1}{a}+\underset{1}{b}+\underset{1}{c}) - \rho G^2 & \frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{b}+\underset{3}{c})\\
\frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{b}+\underset{3}{c}) & (\underset{2}{a}+\underset{2}{b}+\underset{2}{c}) - JG^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} U_{\|} \\ \Phi_{\|} \end{pmatrix} = 0,
\tag{9}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\underset{1}{b} - \rho G^2 & \frac{1}{2}\underset{3}{b}\\
\frac{1}{2}\underset{3}{b} & \underset{2}{b} - JG^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} U_{\perp} \\ \Phi_{\perp} \end{pmatrix} = 0.
\tag{10}
$$

Очевидно, что согласно системе (9), (10) в полуизотропном микрополярном теле невозможно несвязанное распространение только упругой волны или только волны кручения, поскольку это требовало бы равенства нулю $(\underset{3}{a}+\underset{3}{b}+\underset{3}{c})$ или $\underset{3}{b}$ для продольной или поперечной волны, соответственно. Подобное ограничение означало бы, что рассматривается изотропный микрополярный континуум, а не полуизотропный.

Скорость распространения поверхности разрыва и связанные слабые разрывы вектора перемещений и микровращения. Для удобства дальнейшего изложения перейдем к следующим обозначениям:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_1 + b_1 + c_1}{\rho} = v_{u\|}^2, \quad \frac{b_1}{\rho} = v_{u\perp}^2,\\
&\frac{a_2 + b_2 + c_2}{J} = v_{\phi\|}^2, \quad \frac{b_2}{J} = v_{\phi\perp}^2,\\
&\frac{a_3 + b_3 + c_3}{2\rho J} = v_{s\|}^2, \quad \frac{b_3}{2\rho J} = v_{s\perp}^2,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $v_{u\|}^2$, $v_{\phi\|}^2$, $v_{s\|}^2$ — скорости распространения продольной волны перемещений, микровращений и связанной волны, соответственно; $v_{u\perp}^2$, $v_{\phi\perp}^2$, $v_{s\perp}^2$ — скорости распространения поперечной волны перемещений, микровращений и связанной волны, соответственно. Приведем формулы пересчета скоростей (11) продольных и поперечных связанных волн перемещений, согласно соотношениям приведенным в работе [19], микровращений для различных наборов материальных констант, сведенные для удобства в таблицу (2).

Произведя замену (11), системы уравнений (9), (10) примут следующий вид:

$$
\begin{pmatrix} v_{u\|}^2 - G^2 & Jv_{s\|}^2 \\ \rho v_{s\|}^2 & v_{\phi\|}^2 - G^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_\| \\ \Phi_\| \end{pmatrix} = 0; \quad \begin{pmatrix} v_{u\perp}^2 - G^2 & Jv_{s\perp}^2 \\ \rho v_{s\perp}^2 & v_{\phi\perp}^2 - G^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_\perp \\ \Phi_\perp \end{pmatrix} = 0. \tag{12}
$$

Условием нетривиальной разрешимости систем (12) будет равенство нулю определителя, что приведет к двум биквадратным уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&G^4 - (v_{u\|}^2 + v_{\phi\|}^2)G^2 + v_{u\|}^2 v_{\phi\|}^2 - \rho J v_{s\|}^4 = 0,\\
&G^4 - (v_{u\perp}^2 + v_{\phi\perp}^2)G^2 + v_{u\perp}^2 v_{\phi\perp}^2 - \rho J v_{s\perp}^4 = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Из уравнений (13) можно найти квадраты скоростей распространения поверхности разрыва, при которых существуют нетривиальные решения систем (12). Это означает, что для определенной скорости G могут существовать связанные разрывы в нормальном или касательном направлении. Квадраты таких скоростей распространения поверхности слабых разрывов, при которых возможно наличие связанных разрывов в нормальном направлении $G_{\|1,2}^2$ или в касательном направлении $G_{\perp 1,2}^2$ будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
G_{\|1,2}^2 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1}{2}[(v_{u\|}^2 + v_{\phi\|}^2) \pm \sqrt{(v_{u\|}^2 - v_{\phi\|}^2)^2 + 4\rho J v_{s\|}^4})]\\
G_{\perp 1,2}^2 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1}{2}[(v_{u\perp}^2 + v_{\phi\perp}^2) \pm \sqrt{(v_{u\perp}^2 - v_{\phi\perp}^2)^2 + 4\rho J v_{s\perp}^4})]
\end{aligned}
$$

Отметим, что найденные скорости распространения поверхности разрыва, при которых возможно наличие связанных слабых разрывов вектора перемещений и микровращений в касательном направлении к поверхности разрыва, не гарантируют существование связанных слабых разрывов вектора перемещений и микровращений в нормальном направлении к поверхности разрыва и наоборот.

Таблица 1. Скорости распространения продольной и поперечной волны перемещений и микровращений

	Скаляры первой основной энергетической формы	Скаляры конвенциональной энергитической формы	Скаляры основной энергетической формы	Материальные скаляры
$v^2_{u\parallel}$	$\dfrac{2(\underset{1}{A}+\underset{3}{A})}{\rho}$	$\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}$	$\dfrac{\underset{1}{a}+\underset{1}{b}+\underset{1}{c}}{\rho}$	$2G(1+\nu(1-2\nu)^{-1})$
$v^2_{\phi\parallel}$	$\dfrac{2(\underset{2}{A}+\underset{4}{A})}{J}$	$\dfrac{\beta+2\gamma}{J}$	$\dfrac{\underset{2}{a}+\underset{2}{b}+\underset{2}{c}}{J}$	GL^2c_3
$v^2_{s\parallel}$	$\dfrac{2(\underset{7}{A}+\underset{8}{A})}{\rho J}$	$\dfrac{2(\varkappa+2\chi)}{\rho J}$	$\dfrac{\underset{3}{a}+\underset{3}{b}+\underset{3}{c}}{2\rho J}$	$2GL(c_4+c_5)$
$v^2_{u\perp}$	$\dfrac{\underset{5}{A}+2\underset{3}{A}}{2\rho}$	$\dfrac{\mu+\alpha}{\rho}$	$\dfrac{\underset{1}{b}}{\rho}$	$G(1+c_1)$
$v^2_{\phi\perp}$	$\dfrac{\underset{6}{A}+2\underset{4}{A}}{2J}$	$\dfrac{\gamma+\epsilon}{J}$	$\dfrac{\underset{2}{b}}{J}$	$GL^2(1+c_2)$
$v^2_{s\perp}$	$\dfrac{2\underset{8}{A}-\underset{9}{A}}{2\rho J}$	$\dfrac{2(\chi+\nu)}{\rho J}$	$\dfrac{\underset{3}{b}}{2\rho J}$	$\dfrac{GL}{2}(2c_5-c_6)$

После того как найдены скорости $G^2_{\parallel 1,2}$, $G^2_{\perp 1,2}$ возможно определение связанных векторов поляризации перемещений и микровращений. Для этого выразим касательную компоненту вектора поляризации микровращений через касательную компоненту вектора поляризации перемещений $\Phi_\parallel = C_\parallel U_\parallel$ и сделаем то же с нормальными компонентами векторов поляризации перемещений и микровращений $\Phi_\perp = C_\perp U_\perp$. Выразим константы $C_\parallel$, $C_\perp$ с учетом выполнения соотношений (13):

$$C_{1\parallel} = -\frac{v_{u\parallel} - G^2_{1,2}}{Jv_{s\parallel}}, \qquad C_{2\parallel} = -\frac{\rho v_{s\parallel}}{v_{\phi\parallel} - G^2_{1,2}};$$

$$C_{1\perp} = -\frac{v_{u\perp} - G^2_{1,2}}{Jv_{s\perp}}, \qquad C_{2\perp} = -\frac{\rho v_{s\perp}}{v_{\phi\perp} - G^2_{1,2}}.$$

Обратную зависимость касательных и нормальных компонент вектора перемещений от вектора микровращений $U_\parallel = K_\parallel \Phi_\parallel$ и $U_\perp = K_\perp \Phi_\perp$ можно найти с помощью следующих выражений для констант $K_{1,2\ \parallel} = \dfrac{1}{C_{1,2\ \parallel}}$, $K_{1,2\ \perp} = \dfrac{1}{C_{1,2\ \perp}}$.

Выразим зависимость между слабыми разрывами перемещений и микровращений с учетом ранее полученных соотношений:

$$U_{\|} = \Phi_{\|}\frac{G^2_{\|1,2} - v^2_{\phi\|}}{\rho v^2_{s\|}}; \quad \Phi_{\|} = U_{\|}\frac{G^2_{\|1,2} - v^2_{u\|}}{J v^2_{s\|}};$$

$$U_{\perp} = \Phi_{\perp}\frac{G^2_{\perp1,2} - v^2_{\phi\perp}}{\rho v^2_{s\perp}}, \quad \Phi_{\perp} = U_{\perp}\frac{G^2_{\perp1,2} - v^2_{u\perp}}{J v^2_{s\perp}}.$$

Заключение. В настоящей работе были получены следующие результаты:

- Показано, что в полуизотропном микрополярном теле невозможно распространение несвязанных слабых разрывов вектора перемещения и микровращения. Обратное противоречило бы предположению, что рассматривается полуизотропное микрополярное тело.
- Найдены скорости распространения поверхности разрывов при которых возможно наличие связанных слабых разрывов вектора перемещений и микровращений в касательном или нормальном направлении относительно поверхности разрыва.
- С учетом найденной скорости распространения поверхности разрывов определена зависимость между слабыми разрывами перемещений от микровращений, и наоборот, в касательном и нормальном направлении относительно поверхности слабого разрыва.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cosserat E., Cosserat F. Theory of deformable solid. (Translated by D.H. Delphenich). A. Hermann et sons, 1909.

[2] Ericksen J. L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1, no. 1. p. 295–323. URL: http://link.springer.com/10.1007/BF00298012.

[3] Eringen A., Suhubi E. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 2. p. 189–203. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900047.

[4] Suhubl E., Eringen A. Nonlinear theory of micro-elastic solids—II // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 4. p. 389–404. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900175.

[5] Javadi M., Epstein M., Asghari M. Thermomechanics of material growth and remodeling in uniform bodies based on the micromorphic theory // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2020. Vol. 138. p. 103904. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S002250962030140X.

[6] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flugge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. Vol. 2 / 3 / 1 of *Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik*. p. 226–858.

[7] Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16, no. 1. p. 51–78. URL: http://link.springer.com/10.1007/BF00248490.

[8] Germain P. The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2: Microstructure // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1973. Vol. 25, no. 3. P. 556–575.

[9] Forest S., Sab K. Finite-deformation second-order micromorphic theory and its relations to strain and stress gradient models // Mathematics and Mechanics of Solids. 2020. Vol. 25, no. 7. p. 1429–1449.

[10] Forest S., Sievert R. Nonlinear microstrain theories // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43, no. 24. p. 7224–7245. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020768306001703.

[11] Kafadar C., Eringen A. Micropolar media—I the classical theory // International Journal of Engineering Science. 1971. Vol. 9, no. 3. p. 271–305. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722571900401.
[12] Gibbs W. Vector analysis. Yale University Press, New Haven (redacted by E.B. Wilson)., 1901.
[13] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26, no. 3. p. 373–377. URL: https://www.ams.org/tran/1924-026-03/S0002-9947-1924-1501284-6/.
[14] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М., 1971. с. 376.
[15] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2021. Т. 25, № 3. с. 457–474. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1870.
[16] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории гемитропных тензоров четвертого ранга в трехмерных пространствах Евклида // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2022. Т. 26, № 3. с. 592–602. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1941.
[17] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2018. Т. 22, № 3. с. 504–517. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.
[18] Murashkin E. V., Radayev Y. N. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. p. 1416–1423. URL: https://link.springer.com/10.3103/S0025654422060085.
[19] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). с. 110–121. URL: https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf.
[20] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. Мир, 1964. с. 308.
[21] Е. В. Мурашкин Т. К. Нестеров Н. Э. Стадник. Условия совместности в моделях полуизотропных термоупругих тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). с. 102–109. URL: https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf.

T. K. Nesterov

WEAK DISCONTINUITIES PROPAGATION OF DISPLACEMENTS AND MICROROTATIONS IN A SEMI-ISOTROPIC MICROPOLAR BODY

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Abstract. The present paper deals with weak discontinuities propagation of the displacement and microrotation vector in a semi-isotropic micropolar body. The speed of the surface of weak discontinuities is determined, at which the presence of associated weak discontinuities of displacements and microrotations is possible. The dependence of weak discontinuities is found displacement vector from the microrotation vector and vice versa in the tangential and normal direction relative to the weak discontinuities surface.

Keywords: Micropolar continuum, anisotropy, semi-isotropy, weak discontinuities, compatibility conditions, translation, microrotation

REFERENCES

[1] Cosserat E., Cosserat F. Theory of deformable solid. (Translated by D.H. Delphenich). A. Hermann et sons, 1909.
[2] Ericksen J. L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1, no. 1. p. 295–323. URL: http://link.springer.com/10.1007/BF00298012.
[3] Eringen A., Suhubi E. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 2. p. 189–203. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900047.
[4] Suhubl E., Eringen A. Nonlinear theory of micro-elastic solids—II // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 4. p. 389–404. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900175.
[5] Javadi M., Epstein M., Asghari M. Thermomechanics of material growth and remodeling in uniform bodies based on the micromorphic theory // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2020. Vol. 138. p. 103904. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S002250962030140X.
[6] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flugge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. Vol. 2 / 3 / 1 of *Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik*. p. 226–858.
[7] Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16, no. 1. p. 51–78. URL: http://link.springer.com/10.1007/BF00248490.
[8] Germain P. The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2: Microstructure // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1973. Vol. 25, no. 3. P. 556–575.
[9] Forest S., Sab K. Finite-deformation second-order micromorphic theory and its relations to strain and stress gradient models // Mathematics and Mechanics of Solids. 2020. Vol. 25, no. 7. p. 1429–1449.
[10] Forest S., Sievert R. Nonlinear microstrain theories // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43, no. 24. p. 7224–7245. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020768306001703.
[11] Kafadar C., Eringen A. Micropolar media—I the classical theory // International Journal of Engineering Science. 1971. Vol. 9, no. 3. p. 271–305. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722571900401.
[12] Gibbs W. Vector analysis. Yale University Press, New Haven (redacted by E.B. Wilson)., 1901.
[13] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26, no. 3. p. 373–377. (in Russian). URL: https://www.ams.org/tran/1924-026-03/S0002-9947-1924-1501284-6/.
[14] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. Applied mathematics series. New York, John Wiley and Sons, 1964. P. xii+361.
[15] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames // Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2021. Vol. 25, no. 3. p. 457–474. (in Russian). URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1870.
[16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the theory of fourth-rank hemitropic tensors in three-dimensional Euclidean spaces // Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2022. Vol. 26, no. 3. p. 592–602. (in Russian). URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1941.
[17] Radayev Yuri Nikolaevich. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2018. T. 22, № 3. c. 504–517. (in Russian). URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.

Nesterov Timophey Konstantinovich, M.Sc (Applied Mathematics), Programmer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262 “Coupled thermomechanics of micropolar semi-isotropic media”).

[18] Murashkin E. V., Radayev Y. N. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. p. 1416–1423. URL: https://link.springer.com/10.3103/S0025654422060085.

[19] Murashkin E. V. On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2023. no. 1 (55). p. 110–121. (In Russian). URL: https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf.

[20] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961. p. 267.

[21] E. V. Murashkin T. K. Nesterov N. E. S. Compatibility conditions in models of semi-isotropic thermoelastic solids // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2023. no. 1 (55). p. 102–109. (In Russian). URL: https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf.