

Р. И. Непершин

## СКОЛЬЖЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПО ГРАНИЦЕ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва,  
Россия

**Аннотация.** Приведено численное моделирование стационарного пластического течения поверхностного слоя идеально пластического полупространства при скольжении жесткого гиперболического цилиндра с учетом контактного трения по Прандтлю на основе уравнений плоского пластического течения. Пластическая область с криволинейной границей перед скользящим цилиндром вычисляется из условия стационарности пластического течения в зависимости от распределения давления на границе контакта. Моделирование удовлетворяет полной системе уравнений теории плоской деформации для напряжений и скоростей при условии пластичности Мизеса. Вычисляются нагрузки и момент сопротивления пластическому скольжению гиперболического цилиндра, распределения напряжений и пластических деформаций на линиях тока. Моделирование представляет интерес для технологии пластического упрочнения поверхностного слоя с целью повышения износостойкости и усталостной прочности деталей машин.

**Ключевые слова:** идеально пластическое полупространство, стационарное пластическое течение, скольжение гиперболического цилиндра, плоская деформация, контактное трение, линии скольжения, годограф скоростей, линии тока.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.001

УДК: 539.374

**Введение.** Пластическое деформирование поверхностного слоя деталей машин применяется в технологии машиностроения на финишных операциях [1, 2] с целью повышения износостойкости, усталостной прочности и чистоты поверхности вследствие пластического упрочнения, улучшения микроструктуры, снижения шероховатости поверхности и образования сжимающих остаточных напряжений после упругой разгрузки. При этом пластические деформации превышают на несколько десятичных порядков упругие деформации; поэтому моделирование этих процессов целесообразно на основе теории идеальной пластичности [3].

---

© Непершин Р. И. 2023

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru, доктор технических наук, профессор кафедры системы пластического деформирования, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 01.02.2023

На стационарной стадии пластического течения поверхностного слоя при скольжении инструмента образуется криволинейная граница пластической области, зависящая от формы границы контакта, контактного трения и нагрузки, приложенной к инструменту. При скольжении тупого клина [4] наклонная свободная граница прямолинейна. Стационарная пластическая область определяется линиями скольжения и полем скоростей с разрывом скорости на жесткопластической границе, что приводит к большим деформациям сдвига и разрушению в поверхностном слое [5]. При криволинейной контактной границе поле напряжений и скоростей в пластической области непрерывно и зависит от кривизны контактной границы. В [6–8] приведено моделирование стационарного пластического течения поверхностного слоя идеально пластического полупространства при качении и скольжении круглого и эллиптического цилиндров на основе численного решения дифференциальных уравнений идеальной пластичности при плоской деформации [3].

В настоящей работе приведено численное моделирование стационарного пластического течения поверхностного слоя при скольжении жесткого гиперболического цилиндра по границе идеально пластического полупространства. Скольжение направлено по нормали к прямолинейным образующим цилиндра. Главные оси гиперболы в нормальном сечении цилиндра направлены по нормали и касательной к границе полупространства. При большой длине цилиндра в нормальных сечениях принимаем плоское пластическое течение поверхностного слоя в окрестности границы контакта.

Стационарное пластическое течение рассматриваем в декартовых координатах, связанных со скользящим цилиндром. Граница пластической области является стационарной линией тока и находится численным интегрированием дифференциальных уравнений плоского пластического течения для напряжений и скоростей [3] по распределению давления на контактной границе с учетом контактного трения по Прандтлю. При малой длине граница контакта приближается к горизонтальной прямой с однородным контактным давлением по Прандтлю или Хиллу в зависимости от контактного трения при уменьшении пластической области и деформации поверхностного слоя. При большой длине гиперболической границы контакта кривизна границы уменьшается, и пластическое течение поверхностного слоя приближается к скольжению клина с гиперболическим контуром при вершине.

**1. Основные уравнения.** На рис. 1 показаны линии скольжения на плоскости  $x, y$  нормального сечения гиперболического цилиндра при скольжении по горизонтальной границе идеально пластического полупространства. Главные оси гиперболического сечения направлены по нормали и касательной к границе полупространства. Начало координат  $x, y$ , связанных с цилиндром, скользящим по направлению оси  $x$ , принимаем в нижней точке контакта  $O$ . В этих координатах цилиндр и стационарная пластическая область неподвижны, а полупространство перемещается относительно цилиндра со скоростью  $V_x = -1, V_y = 0$ , принимаемой за единицу при вычислении поля скоростей.

Границу контакта в первом квадранте плоскости  $x, y$  задаем уравнением сопряженной гиперболы с отношением полуудлин осей  $a/b$  по направлениям координат  $x, y$ , принимая  $b$  за единицу длины и сохраняя обозначение  $a$  для безразмерной полуудлины по оси  $x$

$$(y + 1)^2 - x^2/a^2 = 1; \quad x \geq 0, y \geq 0. \quad (1)$$

Из (1) следует уравнение границы контакта  $OA$  в виде  $y(x)$

$$y(x) = (1 + x^2/a^2)^{1/2} - 1, \quad (2)$$

и уравнение угла наклона касательной  $\alpha$  к границе контакта

$$\operatorname{tg} \alpha = x/[(1 + y)a^2], \quad 0 \leq \alpha < \alpha^* = \operatorname{arctg}(1/a); \quad (3)$$

где  $\alpha^*$  – угол наклона к оси  $x$  асимптоты сопряженной гиперболы. Из (1)-(3) находим зависимости координат  $x, y$  от угла  $\alpha$

$$x = a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad y = (1 - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2} - 1. \quad (4)$$

Длину  $L$  границы контакта  $OA$ , определяемую интегралом

$$L = \int_0^{x_A} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2} dx \quad (5)$$

находим численным методом с использованием зависимостей (3) и (2), где  $x_A$  – координата  $x$  точки  $A$ , вычисляемая по первой формуле (4) при  $\alpha_A < \alpha^*$ . Угол  $\alpha_A$  принимаем за параметр нагрузки цилиндра силами  $Q_x, Q_y$  и моментом  $M$  относительно оси, проходящей через точку  $(0, 1)$ .

Дифференциальные уравнения для напряжений и скоростей при плоской деформации идеально пластического тела приводятся к соотношениям Генки и Гейрингер на линиях скольжения [3]. За единицу напряжения принимаем удвоенную пластическую постоянную  $2k = 2\sigma_Y/\sqrt{3}$  по условию пластичности Мизеса, где  $\sigma_Y$  – напряжение текучести. При этом дифференциальные соотношения Генки и Гейрингер на линиях скольжения  $\xi, \eta$  для угла  $\varphi$  наклона касательной к линиям скольжения  $\xi$  к оси  $x$ , среднего напряжения  $\sigma$  и проекций  $V_\xi, V_\eta$  вектора скорости на линии скольжения имеют вид

$$dy/dx = \operatorname{tg} \varphi, \quad \sigma - \varphi = \operatorname{const}, \quad dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \quad \text{на } \xi, \quad (6)$$

$$dy/dx = -\operatorname{ctg} \varphi, \quad \sigma + \varphi = \operatorname{const}, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \quad \text{на } \eta. \quad (7)$$

Напряжения и скорости в координатах  $x, y$  связаны с  $\sigma, \varphi, V_\xi$  и  $V_\eta$  соотношениями

$$\sigma_x = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad (8)$$

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi, \quad (9)$$

$$V_\xi = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \quad V_\eta = V_y \cos \varphi - V_x \sin \varphi. \quad (10)$$

**2. Граничные условия.** При стационарном пластическом течении поверхностного слоя полупространства линии тока перед входом в пластическую область и после выхода из нее остаются горизонтальными прямыми без изменения границы полупространства с непрерывным изменением скоростей на жесткопластической границе  $O-B$ . Криволинейная граница пластической области  $AB$  и контактная граница  $OA$  являются стационарными линиями тока.

Граница  $AB$  находится в напряженном состоянии пластического сжатия  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1, \sigma = -1/2$  с главными напряжениями, направленными по нормали и касательной к этой границе. Вследствие стационарности пластического течения на границе  $AB$  выполняются условия

$$dy/dx = V_y/V_x = \operatorname{tg} \beta, \quad \sigma = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \beta \quad \text{на } AB, \quad (11)$$

и на границе полупространства в токе  $B$

$$y = 0, \quad \beta = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \sigma = -\frac{1}{2}. \quad (12)$$

При положительной диссипативной функции главная скорость деформации на границе  $AB$   $\varepsilon_2 < 0$ , и модуль вектора скорости уменьшается от точки  $B$  к точке  $A$ . В сингулярной точке  $A$  вектор скорости изменяет направление от касательной к границе  $AB$  к касательной к контактной границе  $OA$  с углом наклона  $\alpha_A$ . Модуль вектора скорости на границе  $OA$  увеличивается от точки  $A$  до единицы в точке  $O$  на границе полупространства.

Контактное трение на границе  $OA$  учитываем коэффициентом трения  $0 \leq \mu \leq 0.5$  по Прандтлю, который равен отношению контактного касательного напряжения к напряжению текучести  $\sigma_Y$ . Используя соотношения (8) в ортогональных координатах  $\tau, n$  с направлениями по касательной и нормали к границе  $OA$ , из третьего соотношения (8) находим угол  $\gamma$  наклона линий скольжения  $\xi$  к касательной в точках границы  $OA$  и при известном распределении  $\sigma$  на этой границе из второго соотношения (8) находим распределение нормального давления  $p = -\sigma_n$

$$\gamma = \frac{1}{2} \arccos 2\mu, \quad \varphi = \alpha - \gamma, \quad p = -\left(\sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right), \quad 0 \leq \alpha < \alpha_A \quad \text{на } OA. \quad (13)$$

В точке  $O$  при  $\alpha = 0$ ,  $\varphi = -\gamma$ . Из второго соотношения (6) на  $\xi$  линии скольжения  $O$ - $B$  при значениях  $\varphi$  и  $\sigma$  в (12) в точке  $B$  находим  $\sigma$ , и из (13) находим  $\sigma_O$  и нормальное давление  $p_O$  в точке  $O$

$$\sigma_O = -\left(\frac{1}{2} + \gamma + \frac{\pi}{4}\right), \quad p_O = \frac{1}{2}(1 + \sin \gamma) + \gamma + \frac{\pi}{4}. \quad (14)$$

При отсутствии контактного трения  $\mu = 0$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ ,  $\sigma_O = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$  и  $p_O$  равно давлению  $1 + \frac{\pi}{2}$  на плоский штамп. В этом случае жесткая область в окрестности точки  $O$  находится в предельном состоянии пластического сжатия при отсутствии пластических деформаций, так как в этой точке скорость перемещения цилиндра по нормали к границе контакта равна нулю. При наличии трения  $\mu > 0$ ,  $\gamma < \pi/4$ , сжимающее среднее напряжение и контактное давление в точке  $O$  снижаются, и жесткая область клина с вершиной в точке  $O$  не нагружена до пластического состояния.

Граничные условия (11) и (13) в сингулярной точке  $A$  на границах  $AB$  при  $\beta = \beta_A$  и  $OA$  при  $\alpha = \alpha_A$  определяют угол веера  $\psi$  линий скольжения  $\eta$  в точке  $A$ , которая представляет вырожденную линию скольжения  $\xi$

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \gamma - \alpha_A + \beta_A. \quad (15)$$

Из второго соотношения (6) находим изменения  $\sigma$  и  $\varphi$  в точке  $A$  от границы  $AB$  до границы  $OA$  и значения напряжения  $\sigma_A$  и давления  $p_A$  в точке  $A$  на границе контакта

$$\sigma = -\left(\frac{1}{2} + \theta\right), \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \beta_A - \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \psi; \quad (16)$$

$$\sigma_A = -\left(\frac{1}{2} + \psi\right), \quad \varphi_A = \alpha_A - \gamma, \quad p_A = \psi + \frac{1}{2}(1 + \sin 2\varphi_A). \quad (17)$$

В области  $AOD$  линии скольжения и значения  $\sigma$  и  $\varphi$  находим решением задачи Коши для уравнений (6) и (7) с соотношениями Генки при заданном распределении  $\sigma$  в условиях (13) на границе  $OA$ . Затем в области  $ADC$  решаем задачу Гурса при известных значениях  $\sigma$  и  $\varphi$  на  $\eta$  линии скольжения  $AD$  и в сингулярной точке  $A$

в уравнениях (16). Линии скольжения и значения  $\sigma$  и  $\varphi$  в области  $ACB$  находим решением обратной задачи Коши по известным значениям  $\sigma$  и  $\varphi$  на  $AC$  и условиям (11) на границе  $AB$  при заданном значении угла  $\beta_A$  в точке  $A$ . При этом определяется криволинейная граница  $AB$  по условиям (12) при  $y = 0, \beta = 0$  в точке  $B$ .

Скорости перемещений находим решением уравнений Гейрингер при условии непрерывности скоростей  $V_x = -1, V_y = 0$  на жесткопластической границе  $O-B$  в уравнениях (10)

$$V_\xi = -\cos \varphi, \quad V_\eta = -\sin \varphi \quad \text{на } O-B, \quad (18)$$

и равенства нулю скорости по нормали к границе  $OA$

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{ctg} \gamma \quad \text{на } OA. \quad (19)$$

**3. Численное решение.** В рассматриваемой задаче поля напряжений и скоростей связаны условием стационарности пластического течения (11) на границе  $AB$ . Уравнения Генки в (6) и (7) не содержат скоростей и образуют замкнутую систему для вычисления линий скольжения и переменных  $\sigma$  и  $\varphi$  по граничным условиям для напряжений. Уравнения Гейрингер содержат угол  $\varphi$ , и скорости определяется граничными условиями (18) и (19) после вычисления линий скольжения по граничным условиям (13)-(17) по значениям  $\sigma$  на границе  $OA$  и углу  $\beta_A$  в точке  $A$ , который фигурирует в соотношениях (15), (16) для напряжений и в условии (11) стационарности пластического течения.

При малой длине границы  $OA$  и  $\alpha_A \rightarrow 0$  в точке  $A$  линии скольжения приближаются к задаче о скольжении плоского штампа с однородным распределением  $\sigma$  на границе  $OA$  и граница  $AB$ , совпадает с границей полупространства при  $\beta \equiv 0$  в (11). При малых углах  $\alpha_A$  и малой кривизне границы контакта линейное распределение  $\sigma$  в зависимости от угла  $\alpha$  на границе  $OA$

$$\sigma(\alpha) = \sigma_O + \alpha(\sigma_A - \sigma_O)/\alpha_A, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A \quad (20)$$

приводит к погрешности нарушения первого соотношения в (11) порядка  $10^{-3} \div 10^{-2}$  после вычисления линий скольжения и поля скоростей по приведенным выше граничным условиям. При увеличении угла контакта  $\alpha_A$  нелинейное распределение  $\sigma(\alpha)$  аппроксимируем параболической зависимостью, задавая производную

$$\sigma'(\alpha_A) = \lambda(\sigma_A - \sigma_O)/\alpha_A \quad \text{в точке } A$$

$$\sigma(\alpha) = \sigma_O + \frac{\alpha}{\alpha_A}(\sigma_A - \sigma_O) \left[ \frac{\alpha}{\alpha_A}(\lambda - 1) - \lambda + 2 \right], \quad \lambda \geq 1. \quad (21)$$

Уравнение (21) переходит в линейную зависимость (20) при  $\lambda = 1$ .

Для вычислений написана ФОРТРАН – программа для решения задач Коши, Гурса и смешанного типа с конечно-разностной аппроксимацией уравнений (6), (7) в регулярных узлах сетки линий скольжения [8]. Значения  $x, y, \sigma, \varphi, V_\xi, V_\eta$ , необходимые для решения последовательности краевых задач, сохраняются на линиях скольжения  $\xi$  и  $\eta$  с целью уменьшения оперативной памяти компьютера, и выводятся на экран монитора с использованием графических программ ФОРТРАНа.

Линии скольжения в области  $ACB$  находим интегрированием дифференциального уравнения границы  $AB$   $dy/dx = \operatorname{tg} \beta$  от точки  $A$  с углом наклона касательной  $\beta_A$  и значениями  $x, y, \sigma, \varphi$  на линии скольжения  $AC$ . На рис. 1а показан треугольный элемент сетки линий скольжения  $\xi$  и  $\eta$  на отрезке  $2-P$  пересечения с границей  $AB$ .

Углы  $\varphi$  и  $\beta$  в точке  $P$  на границе  $AB$  находим из уравнения Генки (6) на  $\xi$  линии скольжения 1- $P$  и условий  $\sigma = -1/2, \varphi = \pi/4 + \beta$  на  $AB$

$$\varphi = \varphi_1 - (1/2 + \sigma_1), \quad \beta = \varphi - \frac{\pi}{4}, \quad (22)$$

где  $\sigma_1$  и  $\varphi_1$  – значения  $\sigma$  и  $\varphi$  в точке 1. Точку  $P$  находим по конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений для  $\xi$  линии скольжения 1- $P$  и границы  $AB$  на отрезке 2- $P$ , которая приводит к линейным уравнениям для координат  $x, y$

$$\begin{aligned} x \operatorname{tg} \tilde{\varphi} - y &= x_1 \operatorname{tg} \tilde{\varphi} - y_1, & \tilde{\varphi} &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi), \\ x \operatorname{tg} \tilde{\beta} - y &= x_2 \operatorname{tg} \tilde{\beta} - y_2, & \tilde{\beta} &= \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta), \end{aligned} \quad (23)$$

где нижние индексы 1 и 2 относятся к известным значениям переменных в точках 1 и 2.

Точка 2 первого треугольника совпадает с точкой  $A$ , в которой угол  $\beta_A$  наклона касательной к  $AB$  в (15) задан в виде  $\beta_A = -\kappa\alpha_A$ ,  $\kappa > 1$  и 1 – точка на линии скольжения  $AC$ , ближайшая к точке  $A$ . По значениям  $x, y, \sigma, \varphi$  в точке  $B$  и на линии скольжения  $AC$  вычисляем линию скольжения  $\eta$ , проходящую через точку  $P$  до границы  $CB$ . Известные значения переменных в точке  $P$  и на линии скольжения  $\eta$ , проходящую через эту точку, переносим в точки 1 и 2 следующего треугольника на границе  $AB$  и продолжаем эти вычисления до последнего треугольника, в котором точка  $P$  совпадает с точкой  $B$  на границе полупространства. Условия  $y = 0, \beta = 0$  и  $\varphi = \pi/4$  в точке  $B$  выполняются с точностью  $10^{-5}$  при изменении коэффициента  $\kappa$  в исходных данных программы.

Поле скоростей находим численным интегрированием дифференциальных уравнений Гейрингер в (6), (7) с граничными условиями (18), (19) на жесткопластической границе  $O-B$  и на границе контакта  $OA$  с известными значениями  $x, y, \sigma, \varphi$  после вычисления сетки линий скольжения. Скорости  $V_\xi$  и  $V_\eta$  в точках на границе контакта находим по конечно-разностной аппроксимации уравнения Гейрингер на линии скольжения  $\eta$ , проходящей через ближайшую точку линии скольжения  $\xi$  начиная с границы  $O-B$ . Заменяя  $V_\xi$  средним значением на отрезке 2- $P$ , где 2 – точка на линии скольжения  $\xi$ , находим  $V_\eta$  и  $V_\xi$  в точке  $P$  на границе  $OA$

$$V_\eta = [V_{\eta 2} - \frac{1}{2}V_{\xi 2}(\varphi - \varphi_2)] \cdot [1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \gamma(\varphi - \varphi_2)]^{-1}, \quad V_\xi = V_\eta \operatorname{ctg} \gamma, \quad (24)$$

где значения  $V_\xi, V_\eta$  и  $\varphi$  с нижним индексом 2 относятся к точке 2 на линии скольжения  $\xi$ . Затем вычисляем скорости  $V_\xi, V_\eta$  на линии скольжения  $\xi$ , проходящей через точку  $P$  до границы  $AB$ , численным решением задачи Гурса по конечно-разностной аппроксимации уравнений (6) и (7) для напряжений и скоростей [8]. Выполняя такие вычисления для последующих точек на границе  $OA$  до сингулярной точки  $A$ , находим скорости  $V_\xi, V_\eta$  в пластической области и на границе  $AB$ .

Скорости  $V_x, V_y$  находим по уравнениям (9). Поле скоростей отображаем на экране монитора на плоскости годографа, и в файл выходных данных программы записываем табличную функцию погрешности выполнения условия (11) на границе  $AB$

$$V_y/V_x - \operatorname{tg} \beta = 0. \quad (25)$$

Изменяя параметр  $\lambda$  в параболической аппроксимации (21) распределения  $\sigma(\alpha)$  на границе  $OA$  и параметр  $\kappa$ , определяющий угол  $\beta_A$  в точке  $A$ , получаем среднюю

погрешность абсолютных значений табличной функции (25) порядка  $10^{-3}$  при числе точек на границах  $OA$  и  $AB$  до 20 и угловом шаге 0.075 веера линий скольжения в точке  $A$ .

В программу включены процедуры численного интегрирования дифференциального уравнения линий тока  $dy/dx = V_y/V_x$ , проходящих через пластическую область, с вычислениями напряжений в точках пересечения с линиями скольжения, эквивалентной скорости деформаций, накопленной пластической деформации и искривления координатной сетки при перемещении материальных точек по линиям тока. Так как скорость полупространства  $V_x$  принята за единицу, то приращение  $dx$  равно приращению времени  $dt$ , и зависимости  $t_i(x)$  на  $n$  линиях тока находим численным интегрированием выражений

$$t_i(x) = \int_{x_B}^x dx/V_x, \quad x_B \geq x \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (26)$$

где индексом  $i$  обозначены номера линий тока от горизонтальной линии, касающейся нижней точки жесткопластической границы  $O-B$  при  $i = 1$ , до линии тока  $BAO$  при  $n$ . Интегралы (26) при  $x = 0$  определяют значения времени  $T_i = t_i(0)$  возрастающие до максимального значения  $T_n$  на линии тока  $BAO$ . Из табличных функций  $t_i(x)$  находим координаты  $x$  и  $y$  на линиях тока деформированной координатной сетки для  $m$  материальных точек по значениям времени  $0 \leq t \leq T_n$  изменяющимся с шагом  $\Delta t = T_n/m$ .

Нагрузки  $Q_x$ ,  $Q_y$  и момент  $M$  относительно точки  $(0, 1)$ , приложенные к цилиндру на длине  $b = 1$  вдоль его оси, находим интегрированием распределения давления  $p(x, y)$  и касательного напряжения  $\mu = const$  на границе контакта  $OA$

$$Q_x = \mu x_A + \int_O^A p dy, \quad Q_y = \mu y_A - \int_O^A p dx,$$

$$M = \mu \int_O^A (x dy + (1 - y) dx) + \int_O^A p ((1 - y) dy - x dx);$$

где координаты  $x, y$  точек границы  $OA$  определяются по формулам (4) в зависимости от угла наклона касательной  $0 \leq \alpha < \alpha_A$ .

**4. Численные результаты.** Ниже приведены результаты расчета скольжения гиперболического цилиндра с длинами полуосей гиперболы  $a = b = 1$ . На границе контакта  $OA$  учитываем трение по Прандтлю с коэффициентами  $\mu = 0$  и  $\mu = 0.1$  при задании угла наклона касательной  $\alpha_A < \alpha^* = \frac{\pi}{4}$  в точке  $A$ . Линии скольжения и годографы скоростей получены изменениями коэффициентов  $\lambda$  и  $\kappa$  в исходных данных вычислительной программы, при которых определяется граница пластической области  $AB$  при стационарном пластическом течении. Сетки линий скольжения вычислены с числом точек  $N = 20$  на границах  $OA$  и  $AB$  с шагом  $\Delta\varphi = 0.075$  веера  $\eta$  линий скольжения в точке  $A$ . При выводе на экран монитора пластической области и линий скольжения за единицу принята длина дуги контакта  $L$  в нормальном сечении цилиндра при заданном значении угла  $\alpha_A$ .

На рис. 1 и 2 показаны линии скольжения и годограф скоростей при стационарном пластическом течении поверхностного слоя полупространства при скольжении цилиндра с коэффициентом трения  $\mu = 0.1$  и  $\alpha_A = 0.25$  при длине границы контакта

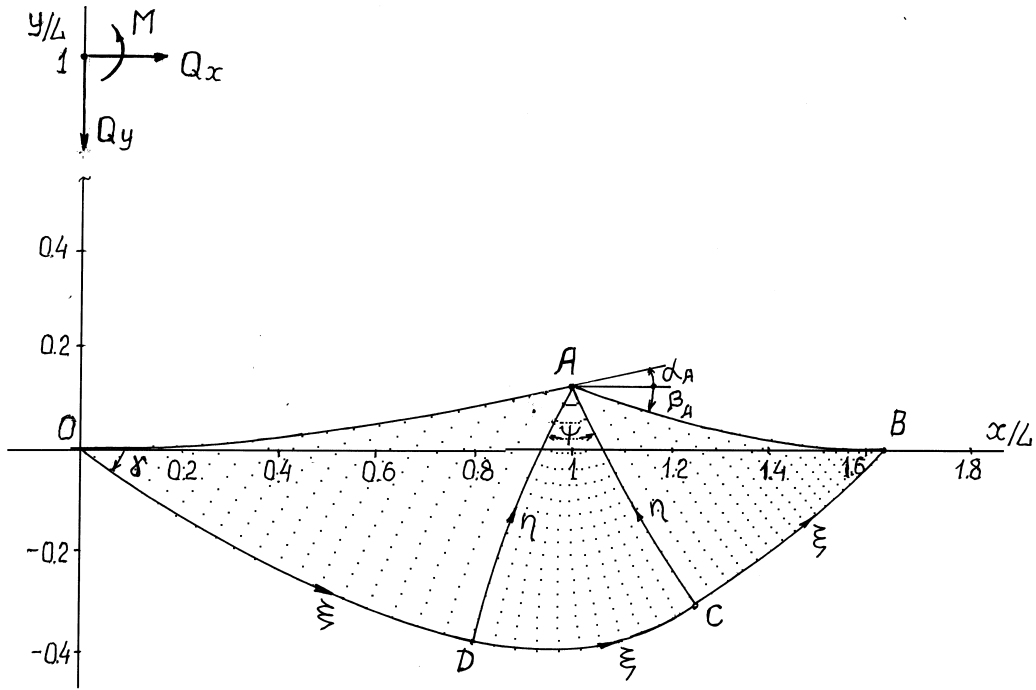


Рис. 1. Линии скольжения при скольжении гиперболического цилиндра по границе пластического полупространства.  $a = 1$ ,  $\alpha_A = 0.25$ ,  $\mu = 0.1$ .

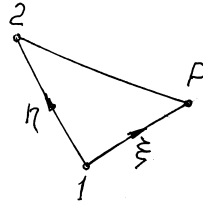


Рис. 1а. Элемент сетки линий скольжения на границе  $AB$  (рис.1).

$L = 0.267$ . Линии скольжения и годограф скоростей вычислены при  $\lambda = 1$  для распределения  $\sigma(\alpha)$  на границе  $OA$  в уравнении (21) и  $\kappa = 1.365$  в соотношении  $\beta_A = -\kappa\alpha_A$ , при  $\psi = 0.879$ ,  $\beta_A = -0.341$ ,  $x_A = 0.264$ ,  $y_A = 0.034$ ,  $x_B = 0.435$ ,  $y_B = 4.75 \cdot 10^{-7}$  и  $\beta_B = -1.79 \times 10^{-7}$  в точке  $B$ . На годографе скоростей (рис.2) жесткопластическая граница  $ODCB$  вырождается в точку  $(-1,0)$  по граничным условиям (18) с углом вера  $\psi$  при отображении линий скольжения  $\eta'$  области  $ACD$  на плоскости годографа. Модуль вектора скорости на границе  $AB$  уменьшается от точки  $B$  к точке  $A$  при напряжении сжатия  $\sigma_2 = -1$  на этой границе. В сингулярной точке  $A$  вектор скорости меняет направление от касательной к границе  $AB$  до касательной к границе  $OA$  при увеличении модуля скорости от точки  $A$  до единицы в точке  $O$  на выходе из пластической области. Диссипативная функция в пластической области положительна.



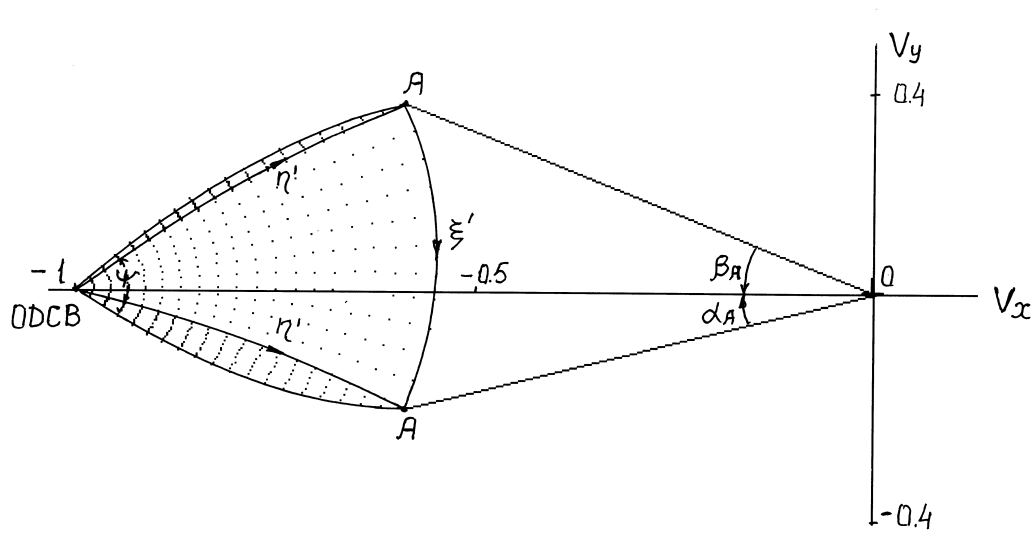


Рис. 2. Годограф скоростей в пластической области.  $a = 1, \alpha_A = 0.25, \mu = 0.1$ .

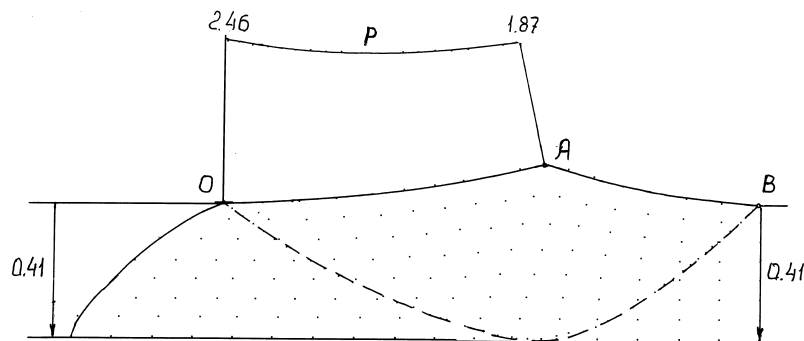


Рис. 3. Линии тока, искривление координатной сетки и контактное давление на границе  $OA$ . --- Граница пластической области.  $a = 1, \alpha_A = 0.25, \mu = 0.1$ .

На рис. 3 показаны линии тока и линии координатной сетки при движении материальных точек через пластическую область, вычисленные по линиям скольжения и полю скоростей на рис. 1 и 2, и распределение контактного давления на границе  $OA$  возрастающее от 1.89 в точке  $A$  до 2.46 в точке  $O$ . Толщина пластического слоя 0.41 отнесена к длине границы контакта  $L = 0.267$ .

На рис. 4 и 5 показаны линии скольжения и годограф скоростей при скольжении гладкого цилиндра при  $\mu = 0, \alpha_A = 0.25$ , вычисленные для параметров  $\lambda = 1.19, \kappa = 1.33$ , при  $\psi = 0.988, \beta_A = -0.332$  и  $x_B = 0.467, y_B = 1.2 \times 10^{-4}, \beta_B = -1.79 \times 10^{-7}$  в

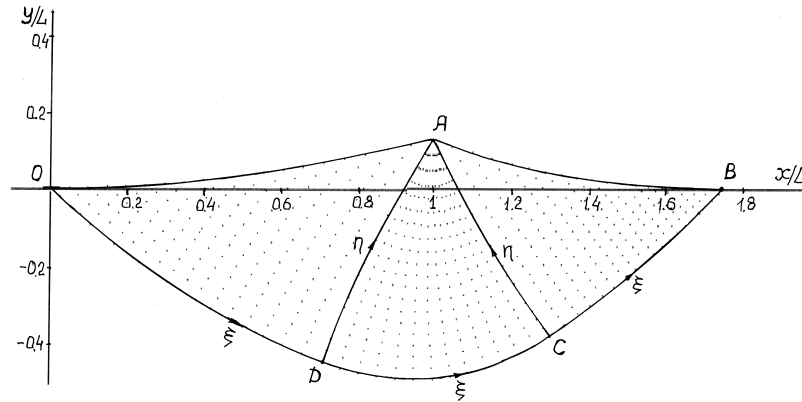


Рис. 4. Линии скольжения при скольжении гладкого цилиндра.  $a = 1$ ,  $\alpha_A = 0.25$ ,  $\mu = 0$ .

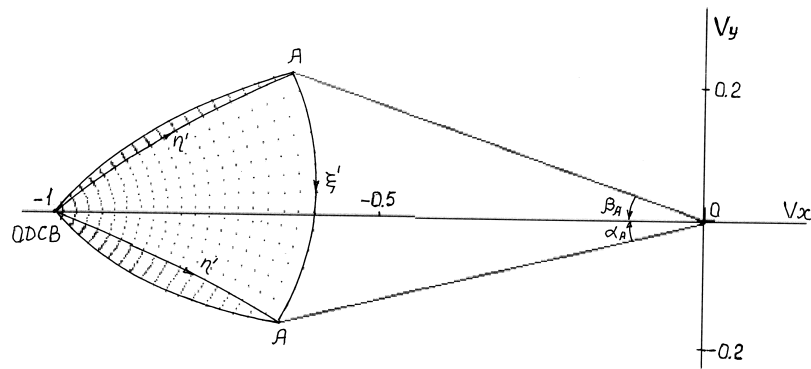


Рис. 5. Годограф скоростей в пластической области.  $a = 1$ ,  $\alpha_A = 0.25$ ,  $\mu = 0$ .

точке  $B$ . На рис. 6 показаны линии тока и координатной сетки в пластической области и распределение контактного давления на границе  $OA$ , которые увеличиваются по сравнению со скольжением цилиндра при  $\mu = 0.1$  на рис 3. Толщина пластического слоя  $0.49$  отнесена к длине границы контакта  $L = 0.267$ .

В табл. 1 приведены координаты  $x$ ,  $y$ , границы  $AB$ , углы наклона касательной  $\beta$ , вектора скорости  $\beta_V$  в точках границы  $AB$  и погрешность условия стационарности пластического течения  $f = \operatorname{tg} \beta - V_y/V_x$  на этой границе для линий скольжения и годографов скоростей, показанных на рис. 1, 2 и 4, 5. При малых углах  $\alpha_A$  границы контакта модули  $f$  находятся в пределах  $10^{-3} \div 10^{-2}$ .

В табл. 2 приведены распределения пластических деформаций и напряжений по толщине пластического слоя, вычисленные на линиях тока при выходе материальных точек из пластической области. При нагрузках на цилиндр, вычисленных по распределению контактного давления с учетом напряжения контактного трения  $\mu$ , возникают большие накопленные эффективные  $\epsilon_p$  и сдвиговые  $\gamma$  пластические деформации и

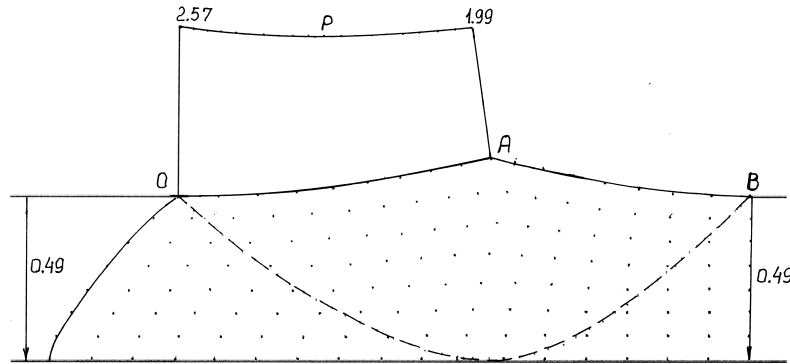


Рис. 6. Линии тока, искривление координатной сетки и контактное давление на границе  $OA$ .  
 - - - - Граница пластической области.  $a = 1, \alpha_A = 0.25, \mu = 0$ .

| $x$                                      | $y \cdot 10^{-1}$ | $-\beta$ | $-\beta_V$ | $f \cdot 10^{-2}$ |
|--|-------------------|----------|------------|-------------------|
| $\mu = 0, \lambda = 1.19, \kappa = 1.33$ |                   |          |            |                   |
| 0.279                                    | 0.294             | 0.309    | 0.305      | 0.516             |
| 0.306                                    | 0.212             | 0.265    | 0.262      | 0.317             |
| 0.331                                    | 0.150             | 0.223    | 0.222      | 0.106             |
| 0.355                                    | 0.102             | 0.184    | 0.185      | 0.092             |
| 0.376                                    | 0.066             | 0.147    | 0.150      | -0.252            |
| 0.396                                    | 0.040             | 0.113    | 0.117      | -0.362            |
| 0.415                                    | 0.022             | 0.081    | 0.085      | -0.405            |
| 0.433                                    | 0.010             | 0.052    | 0.055      | -0.367            |
| 0.450                                    | 0.003             | 0.025    | 0.027      | -0.235            |
| 0.467                                    | 0.001             | 0.000    | 0.000      | 0.000             |
| $\mu = 0.1, \lambda = 1, \kappa = 1.365$ |                   |          |            |                   |
| 0.277                                    | 0.297             | 0.323    | 0.351      | -3.080            |
| 0.302                                    | 0.219             | 0.287    | 0.300      | -1.370            |
| 0.325                                    | 0.157             | 0.251    | 0.253      | -0.192            |
| 0.345                                    | 0.107             | 0.215    | 0.210      | 0.598             |
| 0.364                                    | 0.069             | 0.180    | 0.170      | 1.050             |
| 0.381                                    | 0.041             | 0.144    | 0.132      | 1.240             |
| 0.397                                    | 0.022             | 0.108    | 0.096      | 1.210             |
| 0.411                                    | 0.009             | 0.072    | 0.062      | 0.980             |
| 0.424                                    | 0.002             | 0.036    | 0.030      | 0.575             |
| 0.435                                    | 0.000             | 0.000    | 0.000      | 0.000             |

Таблица 1. Углы наклона касательной  $\beta$ , вектора скорости  $\beta_V$  и погрешность условия стационарности пластического течения  $f = \text{tg} \beta - V_y/V_x$  на границе  $AB$ .  $a = 1, \alpha_A = 0.25$ .

| $x$         | $-y$  | $-\sigma$ | $-\sigma_x$ | $e_p$ | $e_x$  | $\gamma$ |
|-------------|-------|-----------|-------------|-------|--------|----------|
| $\mu = 0$   |       |           |             |       |        |          |
| 0.000       | 0.000 | 2.071     | 1.571       | 1.152 | 0.027  | 0.439    |
| 0.020       | 0.019 | 1.989     | 1.491       | 0.929 | 0.030  | 0.587    |
| 0.043       | 0.038 | 1.930     | 1.433       | 0.755 | 0.017  | 0.636    |
| 0.069       | 0.058 | 1.872     | 1.401       | 0.600 | 0.004  | 0.631    |
| 0.099       | 0.077 | 1.815     | 1.366       | 0.457 | 0.001  | 0.564    |
| 0.133       | 0.096 | 1.759     | 1.339       | 0.316 | 0.005  | 0.447    |
| 0.172       | 0.114 | 1.704     | 1.319       | 0.188 | 0.000  | 0.325    |
| 0.253       | 0.132 | 1.285     | 1.285       | 0.000 | 0.000  | 0.000    |
| $\mu = 0.1$ |       |           |             |       |        |          |
| 0.000       | 0.000 | 1.970     | 1.479       | 1.344 | 0.035  | 0.695    |
| 0.020       | 0.016 | 1.883     | 1.406       | 1.092 | 0.041  | 0.833    |
| 0.044       | 0.032 | 1.827     | 1.370       | 0.901 | 0.021  | 0.878    |
| 0.071       | 0.048 | 1.769     | 1.340       | 0.725 | 0.002  | 0.834    |
| 0.101       | 0.064 | 1.714     | 1.316       | 0.557 | 0.005  | 0.736    |
| 0.137       | 0.080 | 1.659     | 1.298       | 0.397 | 0.000  | 0.603    |
| 0.178       | 0.095 | 1.606     | 1.286       | 0.234 | -0.005 | 0.411    |
| 0.247       | 0.110 | 1.285     | 1.285       | 0.000 | 0.000  | 0.000    |

Таблица 2. Напряжения и деформации в поверхностном слое полупространства на границе выхода из пластической области.  $a = 1$ ,  $\alpha_A = 0.25$ .

сжимающие напряжения, которые после упругой разгрузки определяют остаточные деформации и напряжения в поверхностном слое.

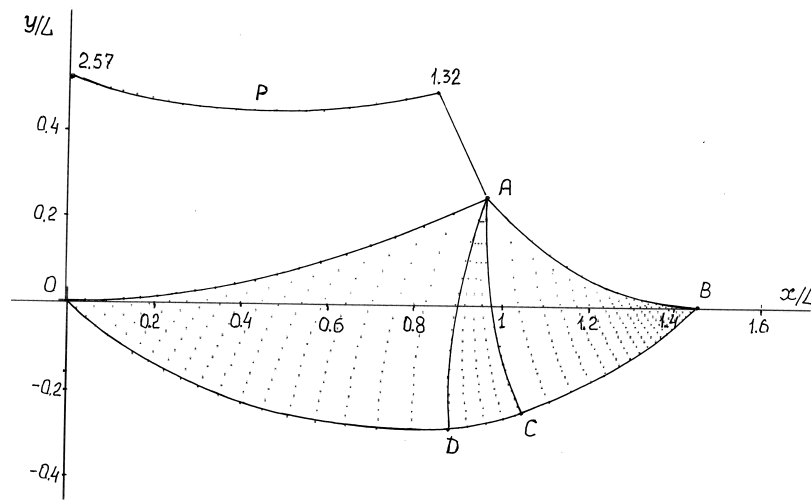


Рис. 7. Линии скольжения и распределение контактного давления при скольжении гладкого цилиндра.  $a = 1$ ,  $\alpha_A = 0.45$ ,  $\mu = 0$ .

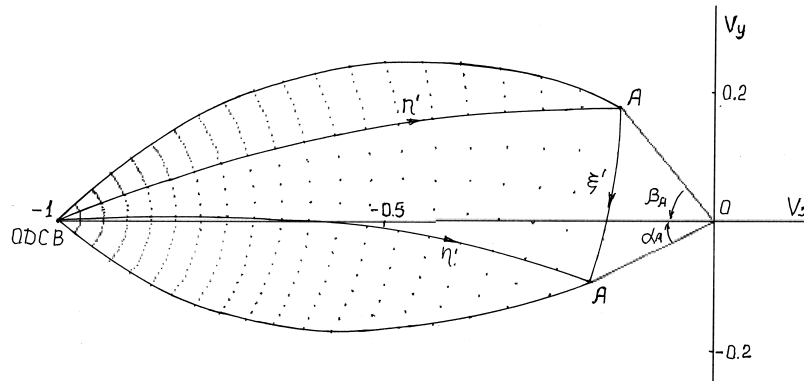


Рис. 8. Годограф скоростей в пластической области.  $a = 1, \alpha_A = 0.45, \mu = 0$ .

На рис. 7 и 8 показаны линии скольжения с распределением контактного давления и годограф скоростей при скольжении гладкого цилиндра с углом  $\alpha_A = 0.45$  на границе контакта. В этом случае угол веера линий скольжения в точке  $A$  уменьшается до  $\psi = 0.32$ . Модуль угла наклона границы  $AB$  в точке  $A$  увеличивается при  $\beta_A = -0.801$ . Вследствие уменьшения кривизны гиперболы на границе  $OA$  линии скольжения и граница  $AB$  в окрестности точки  $A$  приближаются к прямым линиям. Кривизна границы  $AB$  при приближении к точке  $B$  увеличивается вследствие увеличения кривизны гиперболы на границе  $OA$  при приближении к точке  $O$  и увеличении контактного давления в этой точке.

| $\alpha_A$  | $\psi$ | $-\beta_A$ | $L$   | $x_A$ | $y_A$ | $x_B$ | $y_B$ | $h_p$ | $Q_x$ | $Q_y$ | $M$   |
|-------------|--------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mu = 0$   |        |            |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 0.20        | 1.112  | 0.259      | 0.208 | 0.207 | 0.021 | 0.376 | 0.0   | 0.113 | 0.048 | 0.487 | 0.097 |
| 0.25        | 0.988  | 0.333      | 0.267 | 0.264 | 0.034 | 0.467 | 0.0   | 0.133 | 0.075 | 0.605 | 0.150 |
| 0.30        | 0.854  | 0.417      | 0.331 | 0.325 | 0.052 | 0.559 | 0.0   | 0.149 | 0.109 | 0.723 | 0.217 |
| 0.35        | 0.714  | 0.506      | 0.401 | 0.392 | 0.074 | 0.652 | 0.0   | 0.161 | 0.149 | 0.842 | 0.297 |
| 0.40        | 0.519  | 0.652      | 0.481 | 0.466 | 0.104 | 0.734 | 0.0   | 0.167 | 0.195 | 0.959 | 0.390 |
| 0.45        | 0.320  | 0.801      | 0.575 | 0.552 | 0.142 | 0.838 | 0.0   | 0.167 | 0.249 | 1.077 | 0.497 |
| $\mu = 0.1$ |        |            |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 0.20        | 0.975  | 0.295      | 0.208 | 0.207 | 0.021 | 0.352 | 0.0   | 0.096 | 0.066 | 0.463 | 0.071 |
| 0.25        | 0.879  | 0.341      | 0.267 | 0.264 | 0.034 | 0.435 | 0.0   | 0.110 | 0.097 | 0.573 | 0.116 |
| 0.30        | 0.648  | 0.522      | 0.331 | 0.325 | 0.052 | 0.516 | 0.0   | 0.119 | 0.133 | 0.679 | 0.169 |
| 0.35        | 0.452  | 0.669      | 0.401 | 0.392 | 0.074 | 0.594 | 0.0   | 0.122 | 0.174 | 0.783 | 0.232 |
| 0.40        | 0.250  | 0.820      | 0.481 | 0.466 | 0.104 | 0.670 | 0.0   | 0.122 | 0.220 | 0.884 | 0.304 |

Таблица 3. Скольжение гиперболического цилиндра по границе идеально пластического полупространства.  $a = 1$ .

В табл. 3 приведены основные размеры пластической области, толщины пластического слоя  $h_p$ , нагрузок  $Q_x, Q_y$  и момента  $M$  относительно точки  $(0, 1)$ , приложенных

к цилиндру при скольжении по границе пластического полупространства в зависимости от угла наклона касательной  $\alpha_A$  и коэффициентов контактного трения  $\mu = 0$  и  $\mu = 0.1$ . Линейные размеры отнесены к длине полуоси гиперболы по оси  $y$ . Нагрузки и момент отнесены к единице длины по оси цилиндра при напряжении текучести  $\sigma_Y$  принятом за единицу. При увеличении угла  $\alpha_A$  угол вера линий скольжения  $\psi$  уменьшается. Распределение контактного давления на большой длине около точки  $A$  приближается к однородному. При приближении угла  $\alpha_A$  к углу наклона асимптоты гиперболы  $\alpha^*$  криволинейная часть контактной границы стягивается в угловую точку  $O$  клина с углом наклона границы  $\alpha^*$ , разрывом скорости на жесткопластической границе  $ODCB$  и наклонной прямолинейной границей  $AB$  при скольжении клина по границе пластического полупространства [4].

**Заключение.** Приведено моделирование стационарного пластического течения поверхностного слоя идеально пластического полупространства при скольжении жесткого гиперболического цилиндра на основе численного интегрирования дифференциальных уравнений теории плоской деформации с учетом контактного трения по Прандтлю. Условия стационарности пластического течения на криволинейной границе пластической области выполняются с точностью  $10^{-3} \div 10^{-2}$  при параболической аппроксимации распределения давления на границе контакта в зависимости от угла наклона касательной и изменении угла вера линий скольжения в сингулярной точке. Вычисляются напряжения и деформации в пластической области при движении материальных точек по линиям тока.

Показано изменение пластической области, толщины пластического слоя и нагрузки на цилиндр в зависимости от угла наклона касательной на границе контакта и контактного трения. При малых углах контакта задача приближается к скольжению плоского штампа с уменьшением толщины пластического слоя и пластических деформаций с контактным давлением по Прандтлю и сдвигом по границе контакта при наличии трения. При увеличении длины границы контакта и приближении угла наклона касательной к углу наклона асимптоты гиперболы задача приближается к скольжению клина с однородным распределением контактного давления. Криволинейный участок границы стягивается в вершину клина с разрывом скорости по жесткопластической границе при наклонной прямолинейной свободной границей пластической области.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шнейдер Ю.Г. Технология финишной обработки давлением: Справочник. Политехника, 1998.
- [2] Справочник по процессам поверхностного пластического деформирования / под ред. С.А. Зайдес. ИРНИТУ, 2021.
- [3] Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [4] Непершин Р.И. О скольжении тупого клина по границе идеально пластического полупространства // Доклады РАН. 2001. Т. 381, № 4. с. 496.
- [5] Challen J., Oxley P. Some new thoughts on the mechanisms of sliding and sticking friction in metal working processes // Advanced Technology of Plasticity. 1984. Vol. 1. p. 127.
- [6] Непершин Р.И. Качение и скольжение цилиндра по границе идеально пластического полупространства // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, № 2. с. 326.
- [7] Непершин Р.И. Скольжение эллиптического цилиндра по границе идеально пластического полупространства // Проблемы механики (к 90 – летию академика А.Ю. Ишлинского). Физматлит, 2003. с. 584.
- [8] Nepershin R. Applied Problems of Plasticity. MSTU “STANKIN”, 2016.

R. I. Nepershin

## SLIDING OF THE HYPERBOLIC CYLINDER ALONG IDEAL PLASTIC HALF-SPACE BOUNDARY

*Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia*

**Abstract.** Numerical simulation of surface layer steady-state plastic flow during sliding of rigid hyperbolic cylinder along ideal plastic half-space boundary with Prandtl's contact friction consideration is presented. Slip lines and velocities on the hodograph plane are defined by numerical integration of differential equations for stresses and velocities of plane strain plastic flow theory with Mises yield criterion. Plastic region with curved boundary before sliding cylinder is found from the steady-state plastic flow condition defined by pressure distribution on cylinder contact boundary. Loads and torque applied to cylinder, stream lines, stresses and plastic strains distributions in the plastic layer are calculated. The simulation can be used in technology of surface layer plastic work hardening to increase of machine parts wear and strength resistance.

**Keywords:** ideal plastic half-space, steady-state plastic flow, sliding of hyperbolic cylinder, plane strain theory, contact friction, slip lines, velocities hodograph, stream lines.

### REFERENCES

- [1] Shneider Y. Technology of final working by pressure: Handbook. Politechnica, 1998. p. 414. In Russian.
- [2] Handbook of surface plastic deformation processes / Ed. by S. Zides. IRNITU, 2021. p. 504. In Russian.
- [3] Ishlinskii A., Ivlev D. Mathematical Theory of Plasticity. Fizmatlit, 2001. p. 704. In Russian.
- [4] Nepershin R. On sliding an obtuse wedge along the boundary of a perfectly plastic half-space // Doklady Physics. 2001. Vol. 46, no. 12. p. 885.
- [5] Challen J., Oxley P. Some new thoughts on the mechanisms of sliding and sticking friction in metal working processes // Advanced Technology of Plasticity. 1984. Vol. 1. p. 127.
- [6] Nepershin R. Rolling and sliding of rigid cylinder along the rigid-plastic half-space boundary // J. Appl. Maths. Mechs. 2003. Vol. 67, no. 2. p. 293.
- [7] Nepershin R. Sliding of elliptical cylinder along the ideal plastic half-space boundary // Problems of Mechanics. A.Yu. Ishlinskii 90th Anniversary. Fizmatlit, 2003. p. 582. In Russian.
- [8] Nepershin R. Applied Problems of Plasticity. MSTU "STANKIN", 2016. p. 310.

---

*Nepershin Rostislav Ivanovich*, Doctor of technical sciences, Professor of the Plastic Deformation Systems Dep., Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.