Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3 (57). С. 40–50

Д. В. Христич

ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Сформулирована постановка обратной термомеханической задачи, состоящей в определении отклика в виде деформаций анизотропного упругого тела на процесс нагружения и изменения температуры в случае конечных деформаций. Решение термомеханической задачи выполнено в рамках обобщений частного постулата изотропии А.А. Ильюшина на случай конечных деформаций анизотропных тел. На основе термодинамического потенциала Гиббса построены нелинейные определяющие соотношения в виде, разрешённом относительно деформаций.

Ключевые слова: нелинейные определяющие соотношения, анизотропные материалы, частный постулат изотропии, потенциал Гиббса.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.002

УДК: 539.3

1. Обратная термомеханическая задача Многие современные материалы обладают анизотропией свойств и проявляют нелинейное механическое поведение, наблюдаемое уже при малых деформациях [1—3]. В опытах по исследованию упругих свойств часто задаётся программа нагружения образца, а его деформации регистрируются как отклик материала, то есть определяются экспериментальные зависимости вида $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, T)$. Возможность выполнения и обработки таких экспериментов позволяет разрабатывать нелинейные зависимости деформаций от напряжений [4, 5] и программы их конкретизации. Целью работы является построение термодинамически обоснованных соотношений, определяющих зависимость конечных деформаций от напряжений и температуры в анизотропных упругих материалах.

Рассмотрим процесс деформирования и нагружения в некоторой фиксированной точке пространства, которые описываются тензором деформаций Коши—Грина $\boldsymbol{\varepsilon}$, имеющим в отсчётном декартовом базисе $\vec{e}^1$, $\vec{e}^2$, $\vec{e}^3$ диадное разложение $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\vec{e}^i\vec{e}^j$, и

Христич Дмитрий Викторович
`e-mail:` dmitrykhristich@rambler.ru,
доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Поступила 01.12.2023

сопряжённым с ним энергетическим тензором напряжений (вторым тензором Пиолы–Кирхгоффа) $\mathbf{T} = T_{ij}\vec{e}^{i}\vec{e}^{j}$, $\mathbf{T} = e^{\theta}\mathbf{\Phi}^{-T}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{\Phi}^{-1}$, где $e^{\theta} = \frac{dV}{dV_0}$ — относительное изменение элементарного материального объёма, $\mathbf{\Phi}$ — тензор-аффинор деформаций, $\mathbf{S}$ — тензор истинных напряжений Коши.

Поставим в соответствие тензору $\boldsymbol{\varepsilon}$ его векторный образ

$$\vec{e} = e_{\alpha}\vec{i}_{\alpha}, \quad \alpha = 0,\, 1, \ldots,\, 5$$

в шестимерном декартовом пространстве с ортонормированным базисом $\vec{i}_{\alpha}$.

При произвольном ортогональном преобразовании векторных образов в шестимерном пространстве (вращении или отражении) длина векторных образов тензоров деформаций не изменяется, то есть сохраняет своё значение квадратичный инвариант, определяемый свёрткой

$$e^2 = \vec{e}\cdot\vec{e} = \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Базисным векторам $\vec{i}_{\alpha}$ шестимерного пространства соответствуют тензоры $\mathbf{I}^{\alpha}$ трёхмерного пространства, обладающие тем свойством, что любой симметричный тензор второго ранга в пространстве E_3 можно разложить по этим тензорам с коэффициентами, равными координатам его векторного образа в пространстве E_6, то есть тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ можно представить в виде $\boldsymbol{\varepsilon} = e_{\alpha}\mathbf{I}^{\alpha}$. Тензоры $\mathbf{I}^{\alpha}$ образуют обобщённый канонический тензорный базис А.А. Ильюшина [6] и представляются диадными разложениями в виде

$$\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}^1\vec{e}^1 + \vec{e}^2\vec{e}^2 + \vec{e}^3\vec{e}^3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{e}^3\vec{e}^3 - \vec{e}^1\vec{e}^1 - \vec{e}^2\vec{e}^2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^1\vec{e}^1 - \vec{e}^2\vec{e}^2),$$

$$\mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^1\vec{e}^2 + \vec{e}^2\vec{e}^1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^2\vec{e}^3 + \vec{e}^3\vec{e}^2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^3\vec{e}^1 + \vec{e}^1\vec{e}^3).$$

Этот базис является ортонормированным, так как образующие его тензоры удовлетворяют условию $\mathbf{I}^{\alpha}\cdot\cdot\mathbf{I}^{\beta} = \delta^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0,\, 1, \ldots,\, 5$.

Как и тензору деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, тензору напряжений $\mathbf{T}$ ставится в соответствие его шестимерный векторный образ

$$\vec{\sigma} = \sigma_{\alpha}\vec{i}_{\alpha} \quad \alpha = 0,\, 1, \ldots,\, 5,$$

связанный с тензором $\mathbf{T}$ соотношением

$$\sigma^2 = \vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma} = \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{T}.$$

Описание процессов деформирования и нагружения в шестимерном пространстве с помощью векторов $\vec{e}$ и $\vec{\sigma}$ упрощает анализ связей между этими процессами и носит универсальный характер, так как образ процесса может быть построен с использованием и других сопряжённых пар тензоров конечных деформаций и напряжений [7].

Будем исследовать образ термомеханического процесса, построенный в шестимерном пространстве E_6 и состоящий из законов деформирования $\vec{e}(t)$ и нагружения $\vec{\sigma}(t)$ и закона изменения температуры $T(t)$. При рассмотрении упругих материалов в качестве времени может быть использован любой другой монотонно изменяющийся параметр. Рассмотрим однородный неизотермический процесс нагружения некоторого представительного макрообъёма анизотропного материала.

При задании процесса нагружения $\vec{\sigma}(t)$ и закона изменения температуры $T(t)$ в случае, когда откликом упругого тела являются конечные деформации, требуется установить связь в виде функции

$$\vec{e}(t) = \vec{f}\,[\vec{\sigma}(t), T(t)]\,, \tag{1}$$

то есть

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{F}_{\varepsilon}\,[\mathbf{T}(t), T(t)]\,. \tag{2}$$

Мера деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ является инвариантной относительно наложения на процесс деформирования жёсткого поворота, поэтому использование её в определяющих соотношениях позволяет тождественно удовлетворить требованию материальной объективности [7—11]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}^{-1}(t)\cdot\mathbf{F}_{\varepsilon}\left[\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{R}^{-1}(t), T(t)\right]\cdot\mathbf{R}(t), \tag{3}$$

где $\mathbf{R}$ — ортогональный тензор поворота, входящий в полярное разложение аффинора деформаций.

Реакция однородной среды на процессы деформирования и изменения температуры может быть изотропной и анизотропной. Среда называется изотропной, если для любого ортогонального преобразования материального базиса $\vec{\mathrm{x}}'_i = \vec{\mathrm{x}}_i\cdot\mathbf{Q}$ выполняется требование

$$\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{T}(\vec{x},t)\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{H}\left\{\left[\mathbf{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{Q}\right]_{t_0}^{t}, T(\vec{x},t), \vec{x}\right\} \quad \forall\mathbf{Q}\in g, \tag{4}$$

где $\mathbf{H}$ — функционал процесса деформирования и функция температуры, g — полная группа ортогональных преобразований материального пространства, а вместо $\mathbf{T}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ могут использоваться другие пары энергетически сопряжённых тензоров.

Если условие (4) выполняется не при всех $\mathbf{Q}$, то среда называется анизотропной. Анизотропная среда обладает симметрией свойств при выполнении условия

$$\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{T}(\vec{x},t)\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{H}\left\{\left[\mathbf{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{Q}\right]_{t_0}^{t}, T(\vec{x},t), \vec{x}\right\} \quad \forall\mathbf{Q}\in g_A, \tag{5}$$

где g_A — подгруппа полной ортогональной группы, называемая группой анизотропии [7].

Разные анизотропные материалы могут обладать симметрией свойств различного типа. Тип анизотропии (симметрии свойств) среды полностью определяется группой g_A.

Установление связи (1) при удовлетворении требованиям постулатов (3), определениям изотропного или анизотропного материала (4) или (5), составляет обратную термомеханическую задачу.

В случае бесконечно малых деформаций такой процесс определяется законами изменений тензора истинных напряжений $\mathbf{S}(t)$ и абсолютной температуры $T(t)$, а определению подлежит линейный тензор бесконечно малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{\Lambda}(t)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\Lambda}(t) = \mathbf{F}\,[\mathbf{S}(t), T(t)]\,. \tag{6}$$

В линейной теории термоупругости [12, 13] соотношение (6) принимает вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\Lambda} = \mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{S} + \mathbf{A}\cdot(T - T_0), \tag{7}$$

где тензор второго ранга $\mathbf{A}$ определяет температурные деформации материала и образован коэффициентами температурных расширений.

В изотермических процессах из (7) получаются соотношения, обратные закону Гука,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\Lambda} = \mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{S}, \tag{8}$$

поэтому тензор четвёртого ранга $\mathbf{C}$ является тензором упругих податливостей.

2. Формулировки обобщения частного постулата изотропии А.А. Ильюшина Рассмотрим образ термомеханического процесса в шестимерном пространстве. Согласно частному постулату изотропии [8], образ процесса деформирования начально-изотропного тела инвариантен не только относительно ортогональных преобразований, связанных с выбором начальной системы координат, но и относительно произвольных преобразований вращения и отражения в пятимерном девиаторном подпространстве. Так как при таких преобразованиях изменяются третьи инварианты тензоров напряжений и деформаций, то частный постулат требует, чтобы инварианты такого типа явно не входили в функционалы, определяющие свойства материала.

Для формулировки обобщения частного постулата на случай начально-анизотропных тел используется понятие собственных упругих подпространств анизотропных материалов. По определению Я. Рыхлевского [14] собственным упругим состоянием называется тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$, для которого

$$\mathbf{N}\cdot\cdot\boldsymbol{\omega}_\alpha = \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad \boldsymbol{\omega}_\alpha = \left(\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha\right)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha,$$

где $\mathbf{N}$ — тензор упругости четвёртого ранга, связанный с тензором $\mathbf{C}$ соотношением $\mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{N} = \mathbf{I}_2$, где $\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\vec{e}^{\,i}\vec{e}^{\,j}\vec{e}^{\,k}\vec{e}^{\,l}$ — изотропный тензор четвёртого ранга [7, 15], обладающий тем свойством, что для любого тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ второго ранга $\mathbf{I}_2\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}$.

В шестимерном пространстве это определение принимает вид

$$\mathbf{n}\cdot\vec{\omega}_\alpha = \lambda_\alpha\vec{\omega}_\alpha,$$

причём тензор $\mathbf{n}$ является образом тензора $\mathbf{N}$ в шестимерном пространстве, вектор $\vec{\omega}_\alpha$ — образом тензора $\boldsymbol{\omega}_\alpha$.

Если для некоторого материала все шесть собственных значений λ_α различны, то разложение тензора $\mathbf{n}$ по собственному базису имеет вид

$$\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^{6}\lambda_\alpha\vec{\omega}_\alpha\vec{\omega}_\alpha.$$

В общем случае разложение тензора $\mathbf{n}$ по собственному базису представляется в виде

$$\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\mathbf{\Omega}_\alpha, \tag{9}$$

где n — число различных корней характеристического уравнения, базисные тензоры $\mathbf{\Omega}_\alpha$, соответствующие однократному корню λ_α, имеют вид $\mathbf{\Omega}_\alpha = \vec{\omega}_\alpha\vec{\omega}_\alpha$, а соответствующие корню кратности k — $\mathbf{\Omega}_\alpha = \vec{\omega}_\alpha\vec{\omega}_\alpha + \vec{\omega}_{\alpha+1}\vec{\omega}_{\alpha+1} + \ldots + \vec{\omega}_{\alpha+k-1}\vec{\omega}_{\alpha+k-1}$.

Для изотропного и анизотропных материалов различных типов собственные значения и собственные векторы определены в работе [7].

Запишем закон Гука, используя разложение (9), в виде

$$\vec{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\vec{e}_{(\alpha)}, \tag{10}$$

где $\vec{e}_{(\alpha)} = \vec{e} \cdot \mathbf{\Omega}_\alpha$ — проекция вектора деформации в собственное подпространство, соответствующее λ_α.

Вследствие линейности и взаимной однозначности соотношения (10) оно может быть представлено в виде

$$\vec{e} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\alpha} \vec{\sigma}_{(\alpha)}, \tag{11}$$

где $\vec{\sigma}_{(\alpha)} = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{\Omega}_\alpha$ — проекция вектора напряжений в собственное подпространство, соответствующее λ_α.

Из сравнения выражений (11) и (8) следует возможность разложения тензора упругих податливостей по собственным базисам

$$\mathbf{c} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\alpha} \mathbf{\Omega}_\alpha, \tag{12}$$

из которого следует, что собственные подпространства тензоров упругости и податливости совпадают.

Представления для структурных тензоров анизотропии можно получить, исходя из разложений тензоров упругостей (9) и податливостей (12) по собственным базисам. В силу инвариантности собственных значений и собственных тензоров относительно преобразований, входящих в группу анизотропии материала, инвариантными оказываются и базисные тензоры собственных подпространств $\mathbf{\Omega}_\alpha$.

Линейные инварианты относительно группы симметрии материала тензоров деформаций и напряжений можно получить как скалярные произведения их шестимерных образов $\vec{e}$ и $\vec{\sigma}$ и единичного собственного вектора $\vec{\omega}_\alpha$:

$$e_\alpha = \vec{e} \cdot \vec{\omega}_\alpha, \quad \sigma_\alpha = \vec{\sigma} \cdot \vec{\omega}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m$$

или как скалярные произведения векторов $\vec{e}$ и $\vec{\sigma}$ и базисных векторов линейного инвариантного подпространства:

$$e_\alpha = \vec{e} \cdot \vec{i}_\alpha, \quad \sigma_\alpha = \vec{\sigma} \cdot \vec{i}_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{13}$$

Квадратичные инварианты тензоров деформаций и напряжений можно определить через базисные тензоры квадратичных инвариантных подпространств $\mathbf{\Omega}_\alpha$ выражениями [7]

$$s^2_{(\alpha)} = \vec{e} \cdot \mathbf{\Omega}_\alpha \cdot \vec{e}, \quad t^2_{(\alpha)} = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{\Omega}_\alpha \cdot \vec{\sigma}. \tag{14}$$

Каждый из собственных базисных тензоров $\mathbf{\Omega}_\alpha$ инвариантен относительно преобразований вращения и отражения в соответствующем собственном подпространстве, которые в дальнейшем будем называть собственными преобразованиями. Из разложений (9) и (12) следует инвариантность тензоров $\mathbf{n}$ и $\mathbf{c}$ относительно собственных преобразований. Например, для изотропного материала тензоры $\mathbf{n}$ и $\mathbf{c}$ инвариантны относительно всех вращений и отражений в пятимерном девиаторном подпространстве. Таким образом, закон Гука в силу своей линейности удовлетворяет требованиям частного постулата изотропии.

В работах [16, 17] было предложено обобщение частного постулата на процессы нелинейного деформирования начально-анизотропных тел: образ термомеханического процесса с траекторией деформирования, расположенной в собственном подпространстве материала, инвариантен относительно группы собственных ортогональных преобразований.

Из этого обобщения следует, что термомеханический процесс в каждом неодномерном собственном подпространстве определяется только внутренней геометрией траектории и не зависит от ориентации относительно базисных векторов этого подпространства.

Приведём формулировку предельной формы обобщения частного постулата [16, 17]: образ термомеханического процесса с траекторией деформирования, расположенной в собственном подпространстве, также расположен в этом подпространстве. В этом случае связь между напряжениями, деформациями и температурой может быть представлена в виде

$$\vec{e}_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{A}^i_{(\alpha)} \vec{r}_i^{(\alpha)}, \tag{15}$$

где $\tilde{A}^i_{(\alpha)}\left[\vec{\sigma}_{(\alpha)}(t), T(t)\right]$ — функционал процесса нагружения $\vec{\sigma}_{(\alpha)}(t)$ и функция температуры $T(t)$, m и $\vec{r}_i^{(\alpha)}$ — размерность и базис собственного подпространства.

В соответствии с ограничениями, накладываемыми на определяющие соотношения предельной формой частного постулата изотропии в виде (15), связь между напряжениями, деформациями и температурой должна содержать только линейные и квадратичные инварианты, характеризующие материалы различных типов.

3. Решение обратной термомеханической задачи Рассмотрим применение потенциала Гиббса в качестве термодинамического потенциала. Использование потенциала Гиббса позволяет получить нелинейные определяющие соотношения в виде, разрешённом относительно деформаций. Это значительно облегчает обработку экспериментов на растяжение, сжатие и кручение образцов.

Потенциал Гиббса в шестимерном пространстве записывается в виде [7]

$$G = U - ST - \frac{1}{\rho_0}\vec{\sigma} \cdot \vec{e}, \tag{16}$$

где U — удельная внутренняя энергия, S — удельная энтропия, ρ_0 — плотность среды в начальной конфигурации.

С учётом выражения (16) основное термомеханическое соотношение в форме Гиббса принимает вид [7]

$$dG = -\frac{1}{\rho_0}\vec{e} \cdot d\vec{\sigma} - SdT.$$

Из этого выражения с учётом формулы для дифференциала потенциала G

$$dG = \frac{\partial G}{\partial \vec{\sigma}} \cdot d\vec{\sigma} + \frac{\partial G}{\partial T} dT$$

следуют выражения вектора деформаций и энтропии:

$$\vec{e} = -\rho_0 \frac{\partial G}{\partial \vec{\sigma}}, \quad S = -\frac{\partial G}{\partial T}. \tag{17}$$

Для конкретизации выражений (17) меры деформаций и энтропии через меру напряжений и температуру зададим конкретный вид потенциала Гиббса $G = G(\vec{\sigma}, T)$.

Если предположить, что реакция материала удовлетворяет предельной форме частного постулата изотропии, то потенциал Гиббса следует представить в форме квадратичной зависимости следующего вида:

$$\rho_0 G = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} c^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta - \sum_{\gamma=1}^{n} D^\gamma t^2_{(\gamma)} - \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha\sigma_\alpha(T-T_0) + \rho_0 G^{(0)}(T), \qquad (18)$$

где σ_α — линейные инварианты напряжений (13), $t^2_{(\gamma)}$ — квадратичные инварианты напряжений (14), $c^{\alpha\beta}$, D^γ, a^α — константы материала, m и n — соответственно количество линейных и квадратичных инвариантов для некоторого материала.

В соответствии с выражениями (17) и (18) получим

$$\vec{e} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} c^{\alpha\beta}\sigma_\beta\vec{i}_\alpha + \sum_{\gamma=1}^{n} 2D^\gamma\vec{s}_{(\gamma)} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha\vec{i}_\alpha(T-T_0), \qquad (19)$$

$$S = \frac{1}{\rho_0}\sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha\sigma_\alpha - \frac{dG^{(0)}}{dT}.$$

Слагаемое $G^{(0)}(T)$ в представлении потенциала Гиббса (18), зависящее только от температуры, имеет вид $G^{(0)} = -c_\sigma T_0\left(\frac{T}{T_0}\ln\frac{T}{T_0} - \frac{T}{T_0} + 1\right)$, а энтропия определяется выражением

$$S = \frac{1}{\rho_0}\sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha\sigma_\alpha + c_\sigma\ln\frac{T}{T_0}.$$

Соотношение $c_\sigma = c_\varepsilon + \vec{\alpha}\cdot\mathbf{C}^{-1}\cdot\vec{\alpha}$ связывает теплоёмкость при постоянных напряжениях c_σ с теплоёмкостью при постоянных деформациях c_ε [7, 13].

Рассмотрим термомеханический процесс, в котором напряжения отсутствуют. Возникающие в таком процессе деформации называются температурными. Определяемые соотношениями (19) температурные деформации имеют вид

$$\vec{e}^T = \vec{e}\big|_{\vec{\sigma}=\vec{0}} = \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha\vec{i}_\alpha(T-T_0), \qquad (20)$$

откуда следует, что a^α — константы, характеризующие температурные деформации. Из выражения (20) следует, что вектор температурных деформаций содержит в своём разложении только инвариантные относительно группы симметрии данного анизотропного материала базисные векторы.

Если рассматривается изотермический процесс, то из выражения (19) получаются линейные выражения для деформаций:

$$\vec{e} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} c^{\alpha\beta}\sigma_\beta\vec{i}_\alpha + \sum_{\gamma=1}^{n} 2D^\gamma\vec{s}_{(\gamma)}.$$

Запишем соотношения (19) для изотропного материала, когда $m=1$, $\vec{i}_\alpha = \vec{i}_0$, $\sigma_0 = \vec{\sigma}\cdot\vec{i}_0$, $n=1$, $\vec{s}_{(1)} = \vec{\sigma}\cdot\left(\vec{i}_1\vec{i}_1 + \vec{i}_2\vec{i}_2 + \vec{i}_3\vec{i}_3 + \vec{i}_4\vec{i}_4 + \vec{i}_5\vec{i}_5\right) = \vec{\tau}$ — вектор нагружения:

$$\vec{e} = c^{00}\sigma_0\vec{i}_0 + 2D\vec{\tau},$$

где $c^{00} = \dfrac{1}{K}$, $D = \dfrac{1}{4G}$, K — модуль объёмной упругости, G — модуль сдвига. Полученное соотношение при бесконечно малых деформациях является записью закона Гука.

Для трансверсально-изотропного материала при $m = 2\; \vec{i}_\alpha\colon \vec{i}_0, \vec{i}_1, \sigma_0 = \vec{\sigma}\cdot\vec{i}_0, \sigma_1 = \vec{\sigma}\cdot\vec{i}_1$; $n = 2$, $\vec{s}_{(1)} = \vec{\sigma}\cdot\left(\vec{i}_2\vec{i}_2 + \vec{i}_3\vec{i}_3\right) = \sigma_2\vec{i}_2 + \sigma_3\vec{i}_3$, $\vec{s}_{(2)} = \vec{\sigma}\cdot\left(\vec{i}_4\vec{i}_4 + \vec{i}_5\vec{i}_5\right) = \sigma_4\vec{i}_4 + \sigma_5\vec{i}_5$ соотношения (19) принимают вид

$$\vec{e} = \left(c^{00}\sigma_0 + c^{01}\sigma_1\right)\vec{i}_0 + \left(c^{01}\sigma_0 + c^{11}\sigma_1\right)\vec{i}_1 + 2D^1\left(\sigma_2\vec{i}_2 + \sigma_3\vec{i}_3\right) + 2D^2\left(\sigma_4\vec{i}_4 + \sigma_5\vec{i}_5\right).$$

Запишем соотношения (19) в виде

$$\vec{e} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1}\left(c^{\alpha\beta}\sigma_\beta + a^\alpha(T - T_0)\right)\vec{i}_\alpha + \sum_{\gamma=1}^{n} 2D^\gamma\vec{s}_{(\gamma)}. \tag{21}$$

В соответствии с постановкой обратной термомеханической задачи (2) соотношение (21) записывается в тензорно-линейной форме следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1}\left(C^{\alpha\beta}T_\beta + a^\alpha(T - T_0)\right)\mathbf{I}^\alpha + \sum_{\gamma=1}^{n} 2D^\gamma\mathbf{T}_{(\gamma)},$$

а для изотропного материала в изотермических процессах

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{K}\sigma_0\mathbf{E} + \frac{1}{2G}\tilde{\mathbf{T}}.$$

Более сложную термомеханическую модель анизотропного материала, построенную в рамках предельной формы частного постулата, можно получить на основании представления потенциала Гиббса в виде

$$\rho_0 G = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha,\sigma_\beta)\sigma_\alpha\sigma_\beta - \sum_{\gamma=1}^{n} D^\gamma(t^2_{(\gamma)})t^2_{(\gamma)} - \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha\sigma_\alpha(T - T_0) + \rho_0 G^{(0)}(T), \tag{22}$$

где коэффициенты, определяющие упругие свойства материала, полагаются функциями инвариантов напряжений, причём $c^{\alpha\beta}$ зависят только от линейных инвариантов, а D^γ зависят от квадратичных инвариантов в соответствующих неодномерных собственных подпространствах.

Определим деформации и энтропию, исходя из выражений (17) и (22):

$$\vec{e} = -\rho_0\frac{\partial G}{\partial\vec{\sigma}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1}\left(\frac{\partial c^{\alpha\beta}}{\partial\sigma_\alpha}\cdot\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\vec{\sigma}}\sigma_\alpha\sigma_\beta + \frac{\partial c^{\alpha\beta}}{\partial\sigma_\beta}\cdot\frac{\partial\sigma_\beta}{\partial\vec{\sigma}}\sigma_\alpha\sigma_\beta + 2c^{\alpha\beta}\sigma_\beta\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\vec{\sigma}}\right) +$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{n}\left(\frac{\partial D^\gamma}{\partial t^2_{(\gamma)}}\cdot\frac{\partial t^2_{(\gamma)}}{\partial\vec{\sigma}}t^2_{(\gamma)} + D^\gamma\frac{\partial t^2_{(\gamma)}}{\partial\vec{\sigma}}\right) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\vec{\sigma}}(T - T_0),$$

$$\vec{e} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1}\left(\frac{\partial c^{\alpha\beta}}{\partial\sigma_\alpha}\sigma_\alpha\sigma_\beta\vec{i}_\alpha + c^{\alpha\beta}\sigma_\beta\vec{i}_\alpha + a^\alpha\vec{i}_\alpha(T - T_0)\right) + \sum_{\gamma=1}^{n}\left(2\frac{\partial D^\gamma}{\partial t^2_{(\gamma)}}t^2_{(\gamma)}\vec{\sigma}_{(\gamma)} + 2D^\gamma\vec{\sigma}_{(\gamma)}\right),$$

$$\vec{e} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1}\left(\frac{\partial c^{\alpha\beta}}{\partial\sigma_\alpha}\sigma_\alpha\sigma_\beta + c^{\alpha\beta}\sigma_\beta + a^\alpha(T - T_0)\right)\vec{i}_\alpha + 2\sum_{\gamma=1}^{n}\left(D^\gamma + \frac{\partial D^\gamma}{\partial t^2_{(\gamma)}}t^2_{(\gamma)}\right)\vec{\sigma}_{(\gamma)}, \tag{23}$$

$$S=\frac{1}{\rho_0}\sum_{\alpha=0}^{m-1}a^{\alpha}\sigma_{\alpha}+c_{\sigma}\ln\frac{T}{T_0}.$$

Определяющие соотношения (23) удовлетворяют предельной форме частного постулата изотропии, так как процесс нагружения в каждом неодномерном собственном подпространстве $\vec{\sigma}_{(\gamma)}$ не оказывает влияния на процессы в других собственных подпространствах и не зависит от них. Это и позволяет утверждать, что модель (23) удовлетворяет именно предельной форме частного постулата. Если $\vec{\sigma}=\vec{\sigma}_{(\gamma)}$, то $\vec{e}=\vec{e}_{(\gamma)}$; если $\vec{\sigma}=\sigma^{\alpha}\vec{i}_{\alpha}$, то и $\vec{e}=e^{\alpha}\vec{i}_{\alpha}$. Например, для трансверсально-изотропного материала это означает, что нагружение в плоскости изотропии, заданное тензором напряжений $\mathbf{T}=T_{12}(\vec{e}^1\vec{e}^2+\vec{e}^2\vec{e}^1)$ и соответствующим ему вектором напряжений $\vec{\sigma}=\sigma_3\vec{i}_3$, когда процесс происходит в неодномерном собственном подпространстве с базисным тензором $\mathbf{\Omega}=\vec{i}_2\vec{i}_2+\vec{i}_3\vec{i}_3$, не приведёт к появлению составляющих деформаций, выходящих из этого подпространства, так как $\vec{e}=2\vec{\sigma}\left(G^1+\dfrac{\partial G^1}{\partial t^2_{(1)}}t^2_{(1)}\right)$. Кроме того, в этом случае векторы напряжений и деформаций коллинеарны.

Если в соотношении (22) считать, что $c^{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha},\sigma_{\beta})=c_0^{\alpha\beta}+\bar{c}^{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha}+\sigma_{\beta})$, а $D^{\gamma}(t^2_{(\gamma)})=$ $=D^{\gamma}+\bar{D}^{\gamma}t_{(\gamma)}$, где $c_0^{\alpha\beta}$, $\bar{c}^{\alpha\beta}$, D^{γ}, $\bar{D}^{\gamma}$ — константы, то получим следующее выражение для потенциала Гиббса:

$$\rho_0G=-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1}\Big(c_0^{\alpha\beta}+\bar{c}^{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha}+\sigma_{\beta})\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}\Big)-$$
$$-\sum_{\gamma=1}^{n}\left(D^{\gamma}+\bar{D}^{\gamma}t_{(\gamma)}\right)t^2_{(\gamma)}-\sum_{\alpha=0}^{m-1}a^{\alpha}\sigma_{\alpha}(T-T_0)+\rho_0G^{(0)}(T).$$

Определим деформации, исходя из этого представления потенциала Гиббса:

$$\begin{gathered}\vec{e}=\sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1}\Big(c_0^{\alpha\beta}\sigma_{\beta}+2\bar{c}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}+\bar{c}^{\alpha\beta}\sigma_{\beta}^2+a^{\alpha}(T-T_0)\Big)\vec{i}_{\alpha}+\\ +2\sum_{\gamma=1}^{n}\left(D^{\gamma}+\frac{3}{2}\bar{D}^{\gamma}t_{(\gamma)}\right)\vec{\sigma}_{(\gamma)}.\end{gathered}\tag{24}$$

При малых деформациях в случае изотермических процессов эти соотношения представляют собой обобщённый закон Гука:

$$\vec{e}=\sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1}c_0^{\alpha\beta}\sigma_{\beta}\vec{i}_{\alpha}+2\sum_{\gamma=1}^{n}D^{\gamma}\vec{\sigma}_{(\gamma)},$$

то есть константы $c_0^{\alpha\beta}$, D^{γ} образуют тензор упругих податливостей, обратный тензору упругости материала.

В случае изотропного материала, который имеет один линейный инвариант σ_0, e_0 ($m=1$) и один квадратичный инвариант $t^2_{(1)}=\tau^2=\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}$, $s^2_{(1)}=\vec{e}\cdot\vec{e}$ ($n=1$), при постоянной температуре соотношения (24) принимают вид

$$\vec{e}=\left(c_0^{00}\sigma_0+3\bar{c}^{00}\sigma_0^2\right)\vec{i}_0+2\left(D^1+\frac{3}{2}\bar{D}^1\tau\right)\vec{\sigma}_1$$

и представляют собой четырёхконстантную квадратичную модель упругого изотропного тела. При этом зависимости объёмной деформации от гидростатического напряжения и интенсивности формоизменения от интенсивности напряжений описываются следующими выражениями:

$$e_0 = c_0^{00}\sigma_0 + 3\bar{c}^{00}\sigma_0^2, \quad s_{(1)} = 2D^1\tau + 3\bar{D}^1\tau^2.$$

Константы этой модели c_0^{00}, $\bar{c}^{00}$, D^1, $\bar{D}^1$ можно определить из двух экспериментов на всестороннее сжатие и на сдвиг, аппроксимируя экспериментальные кривые параболами.

Таким образом, предложенные определяющие соотношения являются решениями обратной термомеханической задачи. С использованием потенциала Гиббса можно построить и более сложные модели, которые удовлетворяют обобщениям частного постулата изотропии и при этом учитывают взаимное влияние процессов, происходящих в различных собственных подпространствах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jones R. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials // AIAA Journal. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.

[2] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.

[3] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // Composites. 1977. Vol. 8, no. 4. P. 237–243.

[4] Трещёв А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения. Москва, Тула: РААСН; ТулГУ, 2016. 328 с.

[5] Трещёв А.А., Лисицкий В.С. Потенциал деформаций для нелинейно ортотропных разносопротивляющихся материалов // Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики: сборник научных трудов 9-й Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики. 2013. Т. 2. С. 454–458.

[6] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика конечного деформирования анизотропных тел // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2001. Т. 7, № 2. С. 130–137.

[7] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: Физматлит, 2013. 320 с.

[8] Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. Москва: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.

[9] Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. Москва: Наука, 1986. 232 с.

[10] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. Москва: Издательство иностранной литературы, 1963. 311 с.

[11] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. Москва: Мир, 1975. 592 с.

[12] Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 370 с.

[13] Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 872 с.

[14] Рыхлевский Я. О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48, № 3. С. 420–435.

[15] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. Москва: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.

[16] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Нелинейные соотношения анизотропной упругости и частный постулат изотропии // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, № 4. С. 587–594.

[17] Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христич Д.В. Постулат А.А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 38–45.

D. V. Khristich

CONSTRUCTION OF NONLINEAR CONSTITUTIVE RELATIONS FOR ELASTIC ANISOTROPIC MATERIALS

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. The inverse thermomechanical problem, which consists in determining the response in the form of deformations of an anisotropic elastic body to the process of loading and temperature changes is formulated in the case of finite strains. The thermomechanical problem is solved within the framework of generalizations of the particular postulate of isotropy by A.A. Ilyushin for the case of finite strains of anisotropic bodies. On the basis of the Gibbs thermodynamic potential, nonlinear constitutive relations are constructed in the form resolved with respect to strains.

Keywords: nonlinear constitutive relations, anisotropic materials, the particular postulate of isotropy, Gibbs potential.

REFERENCES

[1] Jones R. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials // AIAA Journal. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.
[2] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.
[3] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // Composites. 1977. Vol. 8, no. 4. P. 237–243.
[4] Treschev A. Theory of deformation and strength of materials with initial or induced sensitivity to the type of stress state. Constitutive relations. Moscow, Tula: RAASN; TulSU, 2016. 328 p. (in Russian).
[5] Treschev A., Lisitskii V. Deformation potential for non-linearly orthotropic multiresistance materials // Socio-economic and environmental problems of mining, construction and energy: collection of scientific papers of the 9th International Conference on Mining, Construction and Energy. 2013. Vol. 2. P. 454–458. (in Russian).
[6] Markin A., Sokolova M. Thermomechanics of finite deformation of anisotropic bodies // Izvestiya TulGU. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2001. Vol. 7, no. 2. P. 130–137. (in Russian).
[7] Markin A., Sokolova M. Thermomechanics of elastoplastic deformation. Moscow: FizMatLit, 2013. 320 p. (in Russian).
[8] Ilyushin A. Plasticity. Fundamentals of general mathematical theory. Moscow: USSR Academy of Sciences Publishers, 1963. 272 p. (in Russian).
[9] Pozdeev A., Trusov P., Nyashin Y. Large elastoplastic deformations: theory, algorithms, applications. Moscow: Nauka, 1986. 232 p. (in Russian).
[10] Prager V. Introduction to Continuum Mechanics. Moscow: Publishing House of foreign literature, 1963. 311 p. (in Russian).
[11] Truesdell C. The initial course of rational continuum mechanics. Moscow: Mir Publishers, 1975. 592 p. (in Russian).
[12] Kovalenko A. Fundamentals of thermoelasticity. Kiev: Naukova dumka, 1970. 370 p. (in Russian).
[13] Novatsky V. Theory of elasticity. Moscow: Mir Publishers, 1975. 872 p. (in Russian).
[14] Rychlewsky Y. On the Hooke's law // Applied mathematics and mechanics. 1984. Vol. 48, no. 3. P. 420–435. (in Russian).
[15] Ilyushin A. Continuum mechanics. Moscow: MSU Publishers, 1990. 310 p. (in Russian).
[16] Markin A., Sokolova M. Nonlinear relations of anisotropic elasticity and the particular postulate of isotropy // Applied mathematics and mechanics. 2007. Vol. 71, no. 4. P. 587–594. (in Russian).
[17] Markin A., Sokolova M., Khristich D. A.A. Ilyushin's postulate for anisotropic materials and a variant of constitutive relations // Mechanics of solids. 2011. no. 1. P. 38–45. (in Russian).

Khristich Dmitrii Viktorovich
`e-mail:` dmitrykhristich@rambler.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.