*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3 (57). С. 51–58*

*А. П. Кержаев*[1], *И. В. Меньшова*[1,2], *А. В. Никитин*[3]

# О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ТОРЦЕ

[1] *Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия*
[2] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*
[3] *Чебоксарский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации, г. Чебоксары, Россия*

***Аннотация.*** В статье рассмотрена краевая задача теории упругости для полуполосы со смешанными граничными условиями на ее торце. Граничные условия на длинных сторонах соответствуют периодическому продолжению решения в полуплоскость, т.е. решение представляется в виде тригонометрических рядов Фурье. Построено точное решение задачи, основанное на использовании сопряженных тригонометрических рядов.

***Ключевые слова***: смешанная задача, полуполоса, тригонометрические ряды Фурье, сопряженные ряды.

*DOI*: 10.37972/chgpu.2023.57.3.003

*УДК*: 539.374

**1. Введение.** Смешанные краевые задачи теории упругости относятся к числу наиболее трудных. Им посвящено огромное количество исследований, обзор которых можно найти, например, в [1–4]. Классическим примером является задача для полуполосы со свободными длинными сторонами, часть торца которой жестко защемлена,

---



*Кержаев Александр Петрович*
`e-mail:` alex_kerg@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия.
*Меньшова Ирина Владимировна*
`e-mail:` menshovairina@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия; доцент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.
*Никитин Андрей Витальевич*
`e-mail:` ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных технологий, Чебоксарский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации, г. Чебоксары, Россия

Поступила 20.10.2023

а к другой части приложена нагрузка. Общих методов построения точных решений (не сводящих краевую проблему к бесконечным системам алгебраических уравнений) такого рода задач, насколько нам известно, нет.

Предлагаемый в этой статье метод решения смешанных краевых задач в полуполосе не зависит от вида однородных граничных условий на ее длинных сторонах (свободные стороны, жестко защемленные, подкрепленные ребрами жесткости). Это могут быть тригонометрические ряды или, в общем случае, ряды по собственным функциям Папковича–Фадля [5]. Метод основан на использовании сопряженных рядов. Для перехода к сопряженным рядам вводятся аналитические функции (например, [5]). Окончательное решение задачи будет представляться двойными рядами по собственным функциям краевой задачи.

Чтобы максимально упростить задачу и избежать непринципиальных трудностей, будем считать, что граничные условия на длинных сторонах полуполосы выбраны так, что собственными функциями являются хорошо известные тригонометрические системы функций.

**2. Постановка краевой задачи.** Рассмотрим полуполосу $\{\Pi: \ x \geq 0, \ |y| \leq 1\}$. Будем считать, что на длинных сторонах полуполосы $y = \pm 1$ поперечные перемещения и касательные напряжения равны нулю, т.е.

$$v(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0. \tag{1}$$

На торце полуполосы заданы следующие граничные условия:
при $|y| \leq \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ заданы нормальное и нулевое касательное напряжения

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \ \tau_{xy}(0, y) = 0, \tag{2}$$

а на участках $\alpha < |y| \leq 1$ граничные условия соответствуют скользящей заделке, т.е.

$$u(0, y) = 0, \ \tau_{xy}(0, y) = 0, \tag{3}$$

где $u(x, y)$ – перемещение в направлении оси $x$ (схема задачи показана на рис. 1). Из (2), (3) следует, что на всем отрезке $|y| \leq 1$

$$\tau_{xy}(0, y) = 0. \tag{4}$$

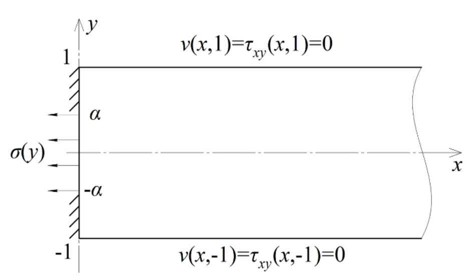


Рис. 1. Схема смешанной задачи для полуполосы

Решение задачи ищется в виде следующих рядов [6]:

$$\sigma_x(x, y) = a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\nu) a_k q_k^3 + 2 b_k q_k^2 + x(1+\nu) b_k q_k^3] e^{q_k x} \cos q_k y,$$

$$\sigma_y(x,y) = \nu a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(1+\nu)a_k q_k^3 + 2(2+\nu)b_k q_k^2 + x(1+\nu)b_k q_k^3]e^{q_k x}\cos q_k y,$$

$$\tau_{xy}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}[(1+\nu)a_k q_k^3 + (3+\nu)b_k q_k^2 + x(1+\nu)b_k q_k^3]e^{q_k x}\sin q_k y, \tag{5}$$

$$U(x,y) = b_0 + \frac{1-\nu}{2}a_0 x - \frac{1+\nu}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[a_k q_k^2 + b_k q_k + x b_k q_k^2]e^{q_k x}\cos q_k y,$$

$$V(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1+\nu}{2}a_k q_k^2 + 2b_k q_k + x\frac{1+\nu}{2}b_k q_k^2]e^{q_k x}\sin q_k y.$$

Здесь $U(x,y)$, $V(x,y)$ – умноженные на модуль сдвига перемещения $u(x.y)$, $v(x,y)$ соответственно; $\nu$ – коэффициент Пуассона; $a_0$, $b_0$, $a_k$, $b_k$ – неизвестные коэффициенты; $q_k = -k\pi$.

**3. Решение задачи.** Примем вначале, что $a_0 = b_0 = 0$. Используя, например, [5], введем функцию

$$F(y) = -\left[(1+\nu)\frac{\partial U(0,y)}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2}\tau_{xy}(0,y)\right] - i\sigma_x(0,y). \tag{6}$$

Подставив сюда (5), получим

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}F(y) &= -\sum_{k=1}^{\infty}[(1+\nu)a_k q_k + 2b_k]q_k^2\sin q_k y, \\ \mathrm{Im}F(y) &= \sum_{k=1}^{\infty}[(1+\nu)a_k q_k + 2b_k]q_k^2\cos q_k y. \end{aligned} \tag{7}$$

Выразим с помощью (4) $b_k$ через $a_k$,

$$b_k = -\frac{1+\nu}{3+\nu}a_k q_k, \tag{8}$$

и подставим в (7). Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}F(y) &= -\sum_{k=1}^{\infty}A_k q_k\sin q_k y, \\ \mathrm{Im}F(y) &= \sum_{k=1}^{\infty}A_k q_k\cos q_k y,\ A_k = \tfrac{(1+\nu)^2}{3+\nu}a_k q_k^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Ряды (7) или (9) называются сопряженными [7, 8]. Если, скажем, первый ряд (9) продифференцировать или проинтегрировать по переменной $y$, то полученный ряд по-прежнему называется сопряженным ко второму ряду (9). Например, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos q_k y \tag{10}$$

сопряжен к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k q_k\cos q_k y. \tag{11}$$

Обозначим $(k, m = 1, 2, ...)$

$$C_{km} = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \cos q_k y \cos q_m y dy = \left\{ \begin{array}{c} \alpha + \frac{\sin\alpha(q_k+q_m)}{q_k+q_m} \ (k = m), \\ \frac{\sin\alpha(q_k+q_m)}{q_k+q_m} + \frac{\sin\alpha(q_k-q_m)}{q_k-q_m} \ (k \neq m) \end{array} \right. \tag{12}$$

и вместо (10), (11) введем сопряженные ряды $(|y|, |t| \leq 1)$

$$\begin{gathered} F_U(y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \cos(q_m y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \cos(q_k t), \\ F_\sigma(y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos(q_m y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \cos(q_k t). \end{gathered} \tag{13}$$

Их можно рассматривать как аналоги рядов (10) и (11). Представление сопряженных рядов с дополнительным параметром $t$ позволяет сделать их не зависящими от вида раскладываемой функции.

Умножим второй ряд (13) на функцию $\sigma(t)$, фигурирующую в (2), и проинтегрируем по $t$ от $-1$ до 1. В результате получим представление функции

$$\sigma_x(0,y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos(q_m y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \sigma_k, \ \sigma_k = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \sigma(t) \cos q_k t dt \tag{14}$$

при $|y| \leq 1$ такое, что при $|y| < \alpha$

$$\sigma(y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos(q_m y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \sigma_k. \tag{15}$$

Учитывая, что в формуле (6) касательные напряжения равны нулю, заключаем, что ряд, сопряженный к ряду (15), является представлением функции $U(0, y)$, т.е.

$$U(0,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \cos(q_m y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \sigma_k. \tag{16}$$

Из сравнения рядов (10), (16) и (11), (15) видно, что

$$A_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \sigma_k. \tag{17}$$

Функция (16) равна нулю при $|y| \geq \alpha$ (это становится очевидным после перестановки порядков суммирования). Но фактически она будет равна некоторой постоянной, что обусловлено самоуравновешенностью базисных функций при $|y| \leq 1$. По этой причине кривая (16) будет лежать выше или ниже оси $y$ и, следовательно, не будет равна нулю при $|y| \geq \alpha$ вопреки граничному условию (3). Сдвинем ее так, чтобы $U(0, \pm\alpha) = 0$. Тогда вместо (17) получим формулу

$$A_k^* = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_m}{q_m} \left( C_{km} - \frac{2\sin q_k \alpha}{q_k} \cos q_m \alpha \right). \tag{18}$$

Поэтому, согласно (9), (8),

$$a_k = -\frac{3+\nu}{(1+\nu)^2} \frac{A_k^*}{q_k^2}, \ b_k = \frac{1}{1+\nu} \frac{A_k^*}{q_k}. \tag{19}$$

Так как на торце полуполосы нормальные напряжения $\sigma_x(0, y)$ всегда самоуравновешены, то $a_0 = 0$, а коэффициент $b_0$ можно считать равным $-U(0, 1)$.

Подставляя (19) в (5), получим решение краевой задачи (1)–(3).

**4. Пример.** Пусть $\sigma(y)$ самоуравновешена и

$$\sigma(y) = y^4 - \frac{6}{5}\alpha^2 y^2 + \frac{1}{5}\alpha^4. \tag{20}$$

Найдем числа $\sigma_m$ из (14), затем числа $A_k^*$ по формуле (18) и, наконец, коэффициенты (19), входящие в решение (5).

Примем $\alpha = 0.5$, $\nu = 0.3$ и приведем некоторые графики, иллюстрирующие полученное решение (рис. 2, 3). Напряжения определялись в сечении $x = 0.01$, а перемещения – при $x = 0$. В формулах для напряжений и перемещений при суммировании удерживалось 100 членов ряда.

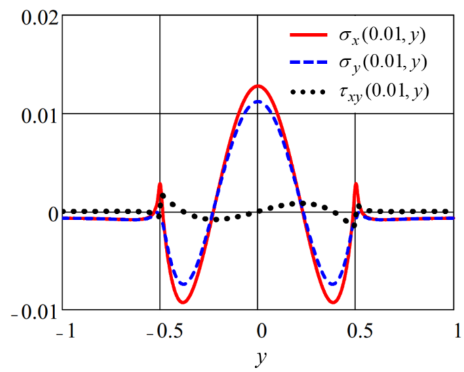


Рис. 2. Распределение напряжений при $x = 0.01$

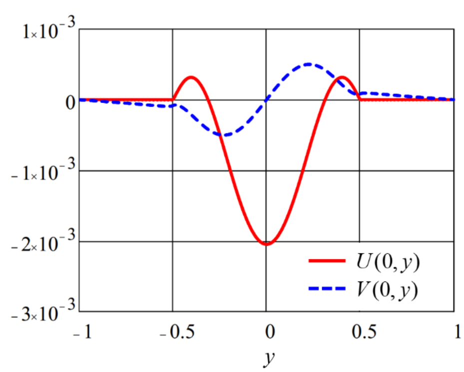


Рис. 3. Распределение перемещений при $x = 0$

Обратим внимание на график функции $U(0, y)$ (рис. 3). Производная этой функции в точках $y = \pm\alpha$ имеет не равное нулю конечное значение. Поэтому напряжения $\sigma_x(\pm\alpha, y)$ и $\sigma_y(\pm\alpha, y)$ будут иметь при $x = \pm\alpha$ логарифмические особенности. Если в формуле (20) заменить $\alpha$ на $\beta$ и считать, что $\beta < \alpha$, т.е. что ненулевые нормальные напряжения $\sigma(y)$ заданы строго внутри интервала $|y| \leq \alpha$, то производная функции $U(0, y)$ при $y = \pm\alpha$ будет равна нулю и, значит, нормальные напряжения в этих точках будут ограничены.

Для того чтобы посчитать напряжения при очень маленьких значениях переменной $x$, в том числе при $x = 0$, нужно взять больше членов ряда. Однако решающее значение имеет точность собственных значений.

## 5. Выводы.

(1) Основным недостатком полученного решения является то, что коэффициенты разложений в смешанной краевой задаче не выражаются через элементарные функции, а представляются в виде бесконечных рядов. Это приводит к определенным трудностям вычислительного характера при подсчете напряжений на торце полуполосы, т.к. в этом случае требуется высокая точность в определении собственных значений (десятки значащих цифр после запятой).

(2) Несомненным достоинством решения является то, что оно представляется в простом замкнутом виде. При этом не возникает необходимости в исследовании и решении интегральных уравнений или бесконечных систем алгебраических уравнений.

(3) Аналогично решаются более сложные задачи, например, когда часть торца полуполосы жестко защемлена, а на другой части действуют нагрузки, когда на торце полуполосы имеются одномерные упругие накладки, через которые передается нагрузка и т.д.

(4) Метод применим для любых однородных граничных условий на длинных сторонах полуполосы (свободные стороны, жестко защемленные и т.д.). В общем случае вместо тригонометрических функций в представлении решений будут фигурировать собственные функции Папковича–Фадля, теория которых была развита в статьях [9–12].

## ЛИТЕРАТУРА


[1] The plane mixed problem for an elastic semi-strip under different load types at its short edge / O. Menshykov, O. Reut, V. Reut et al. // International Journal of Mechanical Sciences. 2018. Vol. 144. P. 526–530.

[2] Pozhylenkov O., Vaysfeld N. Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions // Procedia Structural Integrity. 2020. Vol. 28. P. 458–463.

[3] Ngoc N. V. On a mixed boundary value problem for the biharmonic equation in a strip // Acta Mathematica Vietnamica. 2017. Vol. 42. P. 395–411.

[4] Read W. W. An analytic series method for Laplacian problems with mixed boundary conditions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. Vol. 209, no. 1. P. 22–32.

[5] A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, A. P. Kerzhaev et al. // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2020. Vol. 71, no. 6. p. 199.

[6] Меньшова И. В. О периодических решениях Файлона–Рибьера в двумерной задаче теории упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 106–131.

[7] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

[8] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1, 2.

[9] Kerzhaev A. P., Kovalenko M. D., Menshova I. V. Borel transform in the class W of quasi-entire functions // Complex Analysis and Operator Theory. 2018. Vol. 12, no. 3. P. 571–587.

[10] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2018. Vol. 69, no. 5. p. 121.
[11] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 121–144.
[12] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.

*A. P. Kerzhaev*[1], *I. V. Menshova*[1,2], *A. V. Nikitin*[3]

## ON SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR AN ELASTIC HALF-STRIP WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS AT THE END

[1] *Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[2] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*
[3] *Cheboksary Cooperative Institute (Branch) of the Russian University of Cooperation, Cheboksary, Russia*

***Abstract.*** The paper deals with a boundary value problem of the theory of elasticity for a half-strip with mixed boundary conditions at its end. The boundary conditions on the long sides correspond to the periodic continuation of the solution into a half-plane, i.e. the solution is represented in the form of trigonometric Fourier series. An exact solution to the problem based on the use of conjugate trigonometric series is constructed.

***Keywords***: mixed problem, half-strip, trigonometric Fourier series, conjugate series.

## REFERENCES

[1] The plane mixed problem for an elastic semi-strip under different load types at its short edge / O. Menshykov, O. Reut, V. Reut et al. // International Journal of Mechanical Sciences. 2018. Vol. 144. P. 526–530.
[2] Pozhylenkov O., Vaysfeld N. Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions // Procedia Structural Integrity. 2020. Vol. 28. P. 458–463.
[3] Ngoc N. V. On a mixed boundary value problem for the biharmonic equation in a strip // Acta Mathematica Vietnamica. 2017. Vol. 42. P. 395–411.
[4] Read W. W. An analytic series method for Laplacian problems with mixed boundary conditions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. Vol. 209, no. 1. P. 22–32.
[5] A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, A. P. Kerzhaev et al. // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2020. Vol. 71, no. 6. p. 199.
[6] Menshova I. V. On periodic Filon–Ribiere solutions in a two-dimensional problem of elasticity theory // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2015. no. 1 (23). P. 106–131.
[7] Bari N. K. A treatise on trigonometric series. Oxford: Pergamon Press, 1964. Vol. I, II.

*Kerzhaev Alexander Petrovich*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
*Menshova Irina Vladimirovna*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.
*Nikitin Andrey Vitalievich*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Cheboksary Cooperative Institute (Branch) of the Russian University of Cooperation, Cheboksary, Russia.

[8] Zygmund A. Trigonometric series. Cambridge: Cambridge University Press, 1959. Vol. I, II.
[9] Kerzhaev A. P., Kovalenko M. D., Menshova I. V. Borel transform in the class W of quasi-entire functions // Complex Analysis and Operator Theory. 2018. Vol. 12, no. 3. P. 571–587.
[10] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2018. Vol. 69, no. 5. p. Art. 121.
[11] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Shulyakovskaya T. D. Expansions in Fadle–Papkovich functions: examples of solutions in a half-strip // Mechanics of Solids. 2013. Vol. 48, no. 5. P. 584–602.
[12] Kovalenko M. D., Shulyakovskaya T. D. Expansions in Fadle–Papkovich functions in a strip. Theory foundations // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46, no. 5. P. 721–738.