Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3 (57). С. 59–65

А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова

ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено многослойное вязкоупругое сферическое тело с заполнителем сложной структуры при динамическом деформировании. Дана общая постановка задачи. Получены точные решения для полей напряжений, деформаций и перемещений в упругой, пластической и вязкой областях.

Ключевые слова: вязкоупругость, пластичность, сложная реология, многослойное сферическое тело, осесимметричное состояние, напряжения, перемещения.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.004

УДК: 539.3

Элементами многих технологических объектов являются сферические оболочки [1–3]. При этом они могут испытывать динамические нагрузки. Для безопасной эксплуатации таких оболочек необходимо производить расчеты их поведения при динамическом нагружении. Работа [4] посвящена исследованию динамического деформирования сферической вязкоупругой оболочки с упругопластическим заполнителем [5], упруговязкопластический заполнитель [6] рассматривался в работе [7]. В [4] получено точное аналитическое решение, в работе [7] получено приближенное решение в интегральной форме. В данной работе рассматривается квазистатическая постановка задачи динамического деформирования многослойного вязкоупругого тела с заполнителем сложной структуры.

Спорыхин Анатолий Николаевич
`e-mail:` anatoli.sporyhin@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Щеглова Юлия Дмитриевна
`e-mail:` scheglova@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.12.2023

Постановка задачи

Рассмотрим сферическое многослойное вязкоупругое тело с заполнителем толщины h. По внутренней полости тела радиуса a равномерно распределена динамическая нагрузка P. По внешней оболочке радиуса b равномерно распределена нагрузка p. Выражения для этих нагрузок имеют вид

$$P = P_0 e^{\hat{a}t}, \ p = p_0, \ t_* \leqslant t < t_0 \ , \tag{1}$$

где $\hat{a}$ - известная константа.

Для определения напряженно-деформированного состояния данного тела будем использовать соотношения геометрически линеной теории.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_i \sigma^i_j = 0 \ , \tag{2}$$

где ∇_i обозначает ковариантную производную по i - компонете.

Граничные условия в напряжениях на внутренней и внешней оболочках в общем виде таковы

$$\sigma^j_i n_j = p_i \ , \tag{3}$$

где n_j -– орты нормали к поверхности тела, p_i -– составляющие вектора поверхностных сил.

В качестве геометрических соотношений будем использовать соотношения Коши

$$\varepsilon^j_i = \frac{1}{2}\left(\nabla_i w^j + \nabla_j w^i\right) \ . \tag{4}$$

Будем считать, что заполнитель может находиться в упругопластическом состоянии. Следовательно, на границе γ раздела упругой и пластической областей будут выполняться условия сплошности. Эти же условия выполняются и на границе $b-h$ контакта заполнитель-оболочка

$$[w_i]\,| = 0 \ , \tag{5}$$

$$\left[\sigma^j_i\right]| = 0 \ . \tag{6}$$

Такие же условия справедливы и на границах жесткого контакта вязкоупругих слоев, то есть при

$$r = a + h + \sum_{\alpha=1}^{m} h_\alpha \ , \tag{7}$$

где α - определяет количество вязкоупругих слоев сферического тела.

Зарождение пластической зоны в заполнителе начинается от границы внутренней полости, что соответствует моменту времени $t = t_*$. Тогда начальные условия будут иметь форму

$$\gamma|_{t=t_*} = a \ , \quad \varepsilon^p_{ij}|_{t=t_*} = 0 \ , \quad \varepsilon^\alpha_{ij}|_{t=t_*} = 0 \ , \quad \alpha = 1, \ 2, \ ..., \ m \ . \tag{8}$$

Определим уравнения состояния в упругой, пластической и вязкоупругих зонах деформирования.

В упругой зоне будем моделировать среду несжимаемым телом Гука

$$S_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \ , \quad \varepsilon^e_{kk} = 0 \ . \tag{9}$$

В пластической зоне заполнителя примем соотношения упруговязкопластического тела Спорыхина [6], для которого функция нагружения имеет вид

$$\left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^{p} - \eta\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}\right)\left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^{p} - \eta\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}\right) = k^2 \ . \tag{10}$$

И ассоциированный закон пластического течения будет следующим

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \bar{\lambda}\left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^{p} - \eta\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}\right) \ , \tag{11}$$

где η - коэффициент вязкости, c - коэффициент упрочнения, k - предел текучести, $\bar{\lambda}$ - положительный скалярный множитель.

Полная деформация в пластической области включения является суммой упругой ε_{ij}^{e} и пластической ε_{ij}^{e} составляющих

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p} \ . \tag{12}$$

Также как в упругой зоне примем, что объемная деформация удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{kk} = 0 \ . \tag{13}$$

В пластической зоне в качестве второго варианта среды будем также использовать модель [5] с поверхностью нагружения вида

$$\left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^{p}\right)\left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^{p}\right) = k^2 \tag{14}$$

и ассоциированным законом пластического течения в форме

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \bar{\lambda}\left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^{p}\right) \ . \tag{15}$$

Очевидно, что соотношения (14) и (15) следуют из (10) и (11) при $\eta = 0$.

Вязкоупругие слои оболочки будем представлять несжимаемым телом Кельвина-Фойхта [8]

$$S_{ij}^{\alpha} = 2\mu_{\alpha}\varepsilon_{ij}^{\alpha} + 2\eta_{\alpha}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\alpha} \ , \quad \varepsilon_{kk}^{\alpha} = 0 \ , \tag{16}$$

где нет суммирования по $\alpha = 1, \ 2, \ldots \ , m$, и каждый слой имеет свои физико-механические параметры.

Системы уравнений (1)-(13) и (16) или (1)-(9) и (12)-(16) представляют собой замкнутые математические задачи для определения напряженно-деформированного состояния неоднородного вязкоупругого сферического тела с включением.

Общий вид решения при осесимметричном состоянии

Для решения поставленной задачи воспользуемся сферической системой координат r, θ, φ. В силу осесимметричности поставленной задачи ее решение будет следующим.

В упругой области включения V^e из соотношений (2), (4) и (9) будем иметь

$$\sigma_r = -4\mu\frac{A_1}{r^3} + A_2 \ , \quad \sigma_\theta = 2\mu\frac{A_1}{r^3} + A_2 \ , \quad w = \frac{A_1}{r^2} \ . \tag{17}$$

В пластической области включения V^p из соотношений (2), (4) и (9)-(13) с учетом начального условия (8) получим

$$\sigma_r = -2\mu\left[3\tilde{k}E\ln r + 2B_1\left(1-2\mu E\right)\frac{1}{r^3}\right] + B_2\ ,$$
$$\sigma_\theta = -3\mu\tilde{k}E\left(1+2\ln r\right) + 2\mu B_1\left(1-2\mu E\right)\frac{1}{r^3} + B_2\ , \qquad (18)$$
$$\varepsilon_r^p = \left(\tilde{k} + \frac{4\mu B_1}{r^3}\right)E\ ,$$

где

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{2}{3}}k\ , \quad E = \left(1-\ e^{\frac{2\mu+c}{\eta}t_*}e^{-\frac{2\mu+c}{\eta}t}\right)\left(\frac{1}{2\mu+c}\right)\ . \qquad (19)$$

Для тела Ишлинского-Ивлева, представленного (14) и (15), решение будет также определяться соотношениями (18), где

$$E = \frac{1}{2\mu+c}\ . \qquad (20)$$

Для вязкоупругих слоев оболочки из соотношений (2), (4) и (16) получим напряженно-деформированное состояние в виде

$$\sigma_r^\alpha = -\frac{4\left(\mu_\alpha C_1^\alpha + \eta_\alpha \dot{C}_1^\alpha\right)}{r^3} + C_2^\alpha\ , \quad \sigma_\theta^\alpha = \frac{2\left(\mu_\alpha C_1^\alpha + \eta_\alpha \dot{C}_1^\alpha\right)}{r^3} + C_2^\alpha\ ,$$
$$w^\alpha = \frac{C_1^\alpha}{r^2}\ , \quad \varepsilon_r^\alpha = -\frac{2C_1^\alpha}{r^3}\ , \quad \varepsilon_\theta^\alpha = \varepsilon_\varphi^\alpha = \frac{C_1^\alpha}{r^3}\ , \quad \dot{C}_1^\alpha = \frac{dC_1^\alpha}{dt}\ , \qquad (21)$$

где нет суммирования по $\alpha = 1,\ 2, \dots ,\ m$.

Неизвестные интегрирования $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ C_1^\alpha,\ C_2^\alpha$ ($\alpha = 1,\ 2, \dots,\ m$), а также радиус упругопластической границы заполнителя γ определяются из условий (1), (3), (5), (6) и (8), которые будут иметь вид

- граничные условия

$$\sigma_r^p = -P_0 e^{\hat{a}t} \quad \text{при} \quad r = a\ ,$$
$$\sigma_r^m = -p_0 \quad \text{при} \quad r = b\ , \qquad (22)$$

- условия сопряжения на упругопластической границе

$$w^e = w^p \quad \text{при} \quad r = \gamma\ ,$$
$$\sigma_r^e = \sigma_r^p \quad \text{при} \quad r = \gamma\ , \qquad (23)$$
$$\sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p \quad \text{при} \quad r = \gamma\ ,$$

- условия контакта на границе оболочка-включение

$$w^1 = w^e \quad \text{при} \quad r = a + h\ ,$$
$$\sigma_r^1 = \sigma_r^e \quad \text{при} \quad r = a + h\ , \qquad (24)$$

- условия на поверхностях контакта вязкоупругих слоев

$$w^\alpha = w^{\alpha+1} \quad \text{при} \quad r = a + h + \sum_{\alpha=1}^{m} h_\alpha\ ,$$
$$\sigma_r^\alpha = \sigma_r^{\alpha+1} \quad \text{при} \quad r = a + h + \sum_{\alpha=1}^{m} h_\alpha\ , \qquad (25)$$

- начальные условия

$$\begin{gathered}\gamma = a \quad \text{при} \quad t = t_* \ , \\ \varepsilon_r^\alpha = 0 \quad \text{при} \quad t = t_* \quad \alpha = 1,\ 2, ...,\ m \ . \end{gathered} \tag{26}$$

Решение задачи для двухслойной оболочки

Рассмотрим случай двухслойной оболочки, когда $m = 2$. В этом случае для определения постоянных интегрирования и границы γ из (22)-(26) получим следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}-\frac{\delta_2}{b^3} - p_0 = C_2^2 \ , \quad -\frac{\delta_1}{(a+h+h_1)^3} + C_2^1 = -\frac{\delta_2}{(a+h+h_1)^3} + C_2^2 \ , \\ -2\mu\left[3\tilde{k}E\ln a + 2C_1^1(1-2\mu E)\frac{1}{a^3}\right] + B_2 = -P_0 e^{\hat{a}t} \ , \\ 4\mu\frac{C_1^1}{\gamma^3} + A_2 = -2\mu\left[3\tilde{k}E\ln\gamma + 2C_1^1(1-2\mu E)\frac{1}{\gamma^3}\right] + B_2 \ , \\ -\frac{4\delta_1}{(a+h+h_1)^3} + C_2^1 = -\frac{4\delta_2}{(a+h+h_1)^3} + C_2^2 \ , \\ 2\mu\frac{C_1^1}{\gamma^3} + A_2 = -\mu\left[3\tilde{k}E(1+2\ln\gamma) - 2C_1^1(1-2\mu E)\frac{1}{\gamma^3}\right] + B_2 \ , \end{gathered} \tag{27}$$

где $A_1 = B_1 = C_1^1 = C_1^2$ и введены обозначения

$$\delta_1 = 4\left(\mu_1 C_1^1 + \eta_1 \dot{C}_1^1\right) \ , \quad \delta_2 = 4\left(\mu_2 C_1^1 + \eta_2 \dot{C}_1^1\right) \ .$$

Неизвестная интегрирования C_1^1 определяется из дифференциального уравнения

$$\dot{C}_1^1 + \alpha_1 C_1^1 = \alpha_2 - \frac{1}{4\alpha_0} P_0 e^{\hat{a}t} \ , \tag{28}$$

где обозначено

$$\alpha_0 = \eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2 \ , \quad \xi_1 = \frac{1}{(a+h+h_1)^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \ , \quad \xi_2 = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h+h_1)^3} \ ,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0}\left[(\mu_1\xi_1 + \mu_2\xi_2) + \mu\left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{(a+h)^3}\right) + \mu(1-2\mu E)\left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{a^3}\right)\right] \ ,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4\alpha_0}\left[p_0 + 6\mu\tilde{k}E\left(\ln a - \ln\gamma\right)\right] \ .$$

В этих соотношениях E определено формулой (19), когда пластическая область заполнителя моделируется телом Спорыхина [6]. В этом случае согласно [7] решение уравнения (28) представляется в интегральной форме. Если же пластическая область есть тело Ишлинского-Ивлева [5], то E вычисляется по формуле (20), и тогда уравнение (28) имеет точное решение следующего вида [9]

$$C_1^1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{P_0 e^{\hat{a}t}}{4\alpha_0\left(\hat{a}+\alpha_1\right)} + e^{-\alpha_1 t}\tilde{C}_1^1 \ . \tag{29}$$

Неизвестная $\tilde{C}_1^1$ определяется из условия (26) и имеет вид

$$\tilde{C}_1^1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{\alpha_1 t_*} + \frac{P_0}{4\alpha_0 (\hat{a} + \alpha_1)} e^{(\hat{a}+\alpha_1)t_*} \ . \qquad (30)$$

Таким образом, в случае модели Ишлинского-Ивлева [5] из соотношений (27) неизвестные интегрирования $A_1 = B_1 = C_1^1 = C_1^2,\ A_2,\ B_2,\ C_2^1,\ C_2^2$ определяются в аналитическом виде и, следовательно, аналитический вид имеют решения (17), (18) и (21) поставленной задачи.

Последнее уравнение (27) путем ряда преобразований можно привести к уравнению для определения радиуса поверхности, разделяющей упругую и пластическую области деформирования включения

$$\begin{gathered} 4\eta_1 \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) \dot{C}_1^1 + \left\{ 4\mu_1 \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) - \frac{4\mu}{(a+h)^3} - 4\mu \left(1 - 2\mu E\right) \frac{1}{a^3} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\gamma^3} \left[\mu - \mu \left(1 - 2\mu E\right) \right] \right\} C_1^1 + 3\mu \tilde{k} E \left(1 + 2 \ln \gamma\right) - 6\mu \tilde{k} E \ln a - p_0 + P_0 e^{\hat{a}t} = 0 \ . \end{gathered} \qquad (31)$$

Откуда, полагая в соотношении (29) $\gamma = a$ при $t = t_*$, приходим к уравнению

$$4\eta_1 \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) \left[\alpha_2^* + P_0 e^{\hat{a}t_*} \left(1 - \frac{\hat{a}}{4\alpha_0^* (\hat{a} + \alpha_1^*)} + \frac{\alpha_1^*}{4 (\hat{a} + \alpha_1^*)} \right) \right] + 3\mu \tilde{k} E - p_0 = 0 \ ,$$

где

$$\alpha_0^* = \frac{\eta_2}{b^3} - \frac{\eta_1}{(a+h)^3} \ , \quad \alpha_1^* = \frac{1}{\alpha_0^*} \left[\frac{\mu_2}{b^3} - \frac{\mu_1}{(a+h)^3} + \mu \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) \right] \ , \quad \alpha_2^* = \frac{p_0}{4\alpha_0^*} \ ,$$

из которого можно определить нагрузки, при которых при заданных геометрических и физико-механических параметрах на внутренней поверхности включения сферического тела возникает пластическое состояние.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Спорыхин А. И. Шашкин. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. Москва: Физматлит, 2004. 232 с.

[2] Спорыхин А. Н. Неконсервативные задачи трехмерной теории неупругой устойчивости в геомеханике. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. 372 с.

[3] Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование полупространства со сферической полостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 4(42). С. 21–24.

[4] Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование кусочно-неоднородного сферического тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). С. 110–114.

[5] А. Ю. Ишлинский Д. Д. Ивлев. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 701 с.

[6] Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел // ПМТФ. 1967. № 4. С. 52–58.

[7] Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование сферического вязкоупругого тела с упруговязкопластическим заполнителем // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 99–105.

[8] Рейнер М. Реология. Москва: Наука, 1965. 223 с.

[9] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (4-е издание). Москва: Наука, 1971. 589 с.

A. N. Sporykhin, Yu.D. Shcheglova

DEFORMATION OF A MULTILAYER VISCOELASTIC SPHERICAL BODY WITH AN INCLUSION UNDER DYNAMIC LOADING

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The paper considers a multilayer viscoelastic spherical body with a filler of complex structure under dynamic deformation. The general formulation of the problem is given. Exact solutions were obtained for the fields of stresses, strains and displacements in the elastic, plastic and viscous regions.

Keywords: viscoelasticity, plasticity, complex rheology, multilayer spherical body, axisymmetric state, stresses, displacements.

REFERENCES

[1] A. N. Sporykhin A. I. Shashkin. Stability of equilibrium of spatial bodies and problems of rock mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2004. 232 c.
[2] Sporykhin A. N. Non-conservative problems of the three-dimensional theory of inelastic stability in geomechanics. Voronezh: VSU Publishing House, 2015. 372 c.
[3] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a half-space with a spherical cavity // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. № 4(42). C. 21–24.
[4] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a piecewise inhomogeneous spherical body // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2022. № 1(51). C. 110–114.
[5] A. Yu. Ishlinsky D. D. Ivlev. Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 701 c.
[6] Sporykhin A. N. On the stability of deformation of elastoviscoplastic bodies // PMTF. 1967. № 4. C. 52–58.
[7] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a spherical viscoelastic body with an elastoviscoplastic filler // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2022. № 2(52). C. 99–105.
[8] Rayner M. Rheology. Moscow: Science, 1965. 223 c.
[9] Kamke E. Handbook of Ordinary Differential Equations (4th Edition). Moscow: Science, 1971. 589 c.

Sporykhin Anatoliy Nikolaevich, Dr. Sci. Phys. and Math.,Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.
Shcheglova Yuliya Dmitrievna, Candidate Sci. Phys. and Math., Ass. Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.