Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3 (57). С. 66–73

В. Э. Богачева

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛА УПРУГОСТИ ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ КОМПОЗИТА ПРИ ЕГО НАГРУЖЕНИИ НОРМАЛЬНЫМ ОТРЫВОМ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Исследуется деформирование под действием нормального отрыва композитной пластины, состоящей из двух консолей, связанных адгезионным слоем в состоянии плоской деформации. Из общей вариационной постановки с учетом теории Миндлина—Рейсснера получена постановка в дифференциальном виде. Исследуется аналитическое решение, полученное при комплексных корнях характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений второго порядка. Используя критерий Треска—Сен-Венана, найдено значение внешней нагрузки, соответствующее пределу упругости и началу пластических деформаций в адгезионном слое.

Ключевые слова: адгезионный слой, композит, слой взаимодействия, нормальный отрыв, упругое деформирование, критерий Треска—Сен-Венана.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.005

УДК: 539.375

Введение. В настоящее время происходит активное развитие такого раздела механики деформируемого твердого тела как механика композиционных материалов. При проведении экспериментов на трещиностойкость адгезионных слоев обычно исследуют двухконсольную балку (ДКБ-образец), а слой моделируют в виде математического разреза.

Однако адгезивы наряду с упругими свойствами могут проявлять и выраженные пластические свойства, поэтому необходимо использовать критерий перехода из упругого деформирования в упругопластическое. В этом случае рассмотрение определяющих соотношений адгезионного слоя приведет к более корректной постановке упругопластической задачи, что возможно только при конечной толщине адгезива [1–5]. В

Богачева Виктория Эдуардовна
`e-mail:` v.boga4eva2014@yandex.ru, аспирант кафедры вычислительной механики и математики, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Поступила 10.12.2023

данной работе используется модель, в которой адгезионный слой заменяют "слоем взаимодействия" [5] с механическими свойствами адгезива и толщиной в виде линейного параметра δ_0.

1. Постановка задачи. Рассматривается образец в виде слоистого композита, общая длина которого $\ell + a$ (рис. 1). Пластины 1 и 2 идентичны по механическим свойствам и имеют толщину h. По участку длиной ℓ консоли связаны адгезионным слоем 3, толщина которого δ_0. Правый торец композита закреплен от перемещений, на левых торцах пластин 1 и 2 действует антисимметричная распределенная нагрузка интенсивностью P.

Предполагается жесткое сцепление границ слоя с пластинами, а также равенство противоположность векторов напряжений по границам слоя.

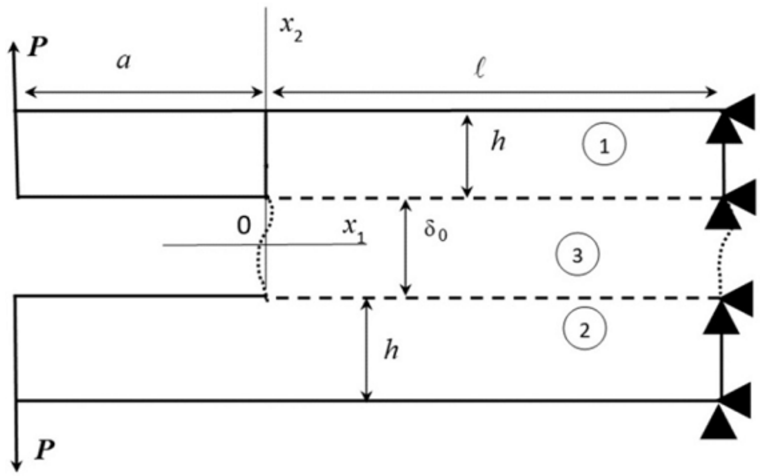

Рис. 1. Схема нагружения образца

На остальную поверхность композита не приложена внешняя нагрузка. Образец находится в состоянии плоской деформации. Поведение консолей 1 и 2 рассматриваем в рамках линейной теории упругости, а материал адгезионного слоя 3 считаем упругопластическим.

Для описания взаимодействия адгезионного слоя 3 с консолями 1 и 2 применим концепцию "слоя взаимодействия" [5]. В силу симметрии рассматриваемого образца получим следующее поле перемещений границ адгезива: $u_1^+ = u_1^-$, $u_2^+ = -u_2^-$, где u_n^+, u_n^- — соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ, $n = 1, 2$ здесь и далее, и нулевое касательное напряжение в слое $\bar{\sigma}_{12} = 0$. Поэтому запишем уравнение равновесия в вариационной форме только для пластины 1:

$$\int\limits_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int\limits_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5\delta_0 \int\limits_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int\limits_{L_1} \boldsymbol{P} \cdot \delta \boldsymbol{u} dl, \tag{1}$$

где $\cdot\cdot$ — двойное скалярное умножение; $\cdot$ — скалярное умножение; S_1 — площадь поперечного сечения тела 1; L_1 — граница приложения внешней нагрузки для тела 1; $\boldsymbol{\sigma}$,

$\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — тензоры средних напряжений и деформаций адгезионного слоя с компонентами: $\bar{\sigma}_{11}=\frac{1}{\delta_0}\int\limits_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0}\sigma_{11}dx_2$, $\bar{\sigma}_{22}=\frac{1}{\delta_0}\int\limits_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0}\sigma_{22}dx_2$, $\bar{\sigma}_{12}=\bar{\sigma}_{21}=\frac{1}{\delta_0}\int\limits_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0}\sigma_{21}dx_2$, $\bar{\varepsilon}_{11}\left(x_1\right)=\frac{du_1^+}{dx_1}$, $\bar{\varepsilon}_{22}\left(x_1\right)=\frac{2u_2^+}{\delta_0}$, $\bar{\varepsilon}_{12}=\bar{\varepsilon}_{21}=0$.

Уравнение (1) замкнем законом Гука:

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\delta_{ij}\right), \bar{\sigma}_{ij}=\frac{E_3}{1+\nu_3}\left(\bar{\varepsilon}_{ij}+\frac{\nu_3}{1-2\nu_3}\bar{\varepsilon}\delta_{ij}\right), \tag{2}$$

где E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона консоли 1; E_3, ν_3 — модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезионного слоя 3; $\varepsilon=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$, $\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}_{11}+\bar{\varepsilon}_{22}+\bar{\varepsilon}_{33}$ — объемные деформации; δ_{ij} — символ Кронекера; $i,j=1,2,3$.

Для того чтобы найти аналитическое решение вариационного уравнения (1), определяем поле перемещений в пластине 1 согласно теории Миндлина [6]:

$$\begin{gathered}u_1\left(x_1,x_2\right)=u_1^+\left(x_1\right)-\varphi\left(x_1\right)\left(x_2-\delta_0/2\right),\\ u_2\left(x_1,x_2\right)=u_2^+\left(x_1\right).\end{gathered} \tag{3}$$

Учитывая теорию Миндлина—Рейсснера [7], из (2) получим вариант определяющих соотношений для консоли 1:

$$\sigma_{11}=D\left(\frac{du_1^+}{dx_1}-\frac{d\varphi}{dx_1}\left(x_2-\delta_0/2\right)\right), \sigma_{12}=L\left(\frac{du_2^+}{dx_1}-\varphi\right), \tag{4}$$

где $L=k\frac{E}{2(1+\nu)}$; $k=\frac{5}{6}$; $D=\frac{E}{(1-\nu^2)}$,
и слоя взаимодействия:

$$\bar{\sigma}_{11}=D_1\frac{du_1^+}{dx_1}+D_2u_2^+, \bar{\sigma}_{22}=C_1u_2^++C_2\frac{du_1^+}{dx_1}, \bar{\sigma}_{33}=\nu_3\left(\bar{\sigma}_{11}+\bar{\sigma}_{22}\right), \tag{5}$$

где $D_1=\frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$; $D_2=\frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$; $C_1=\frac{2D_1}{\delta_0}$; $C_2=\frac{\delta_0 D_2}{2}$.

Таким образом, приходим к двум системам дифференциальных уравнений для пластины 1:

$$\begin{cases}\dfrac{dM_{11}}{dx_1}-Q_{12}=0;\ \dfrac{dQ_{11}}{dx_1}=0;\ \dfrac{dQ_{12}}{dx_1}=0;\ x_1\in[-a;0),\\ \dfrac{dM_{11}}{dx_1}-Q_{12}=0;\ \dfrac{dQ_{11}}{dx_1}+0.5\delta_0\dfrac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1}=0;\ \dfrac{dQ_{12}}{dx_1}=\bar{\sigma}_{22};\ x_1\in(0;\ell],\end{cases} \tag{6}$$

где $Q_{11}=Dh\left(\frac{du_1^+}{dx_1}-\frac{h}{2}\frac{d\varphi}{dx_1}\right)$, $Q_{12}=Lh\left(\frac{du_2^+}{dx_1}-\varphi\right)$, $M_{11}=Dh^2\left(\frac{1}{2}\frac{du_1^+}{dx_1}-\frac{h}{3}\frac{d\varphi}{dx_1}\right)$ — обобщенные силы и обобщенный момент.

Система (6) замкнута граничными условиями:

$$u_n^+\big|_{x_1=\ell}=0, \varphi|_{x_1=\ell}=0, M_{11}|_{x_1=-a}=0, Q_{11}|_{x_1=-a}=0, Q_{12}|_{x_1=-a}=-Q_2, \tag{7}$$

где $Q_2=P/b$, b — толщина образца в направлении нормали к рассматриваемому сечению (рис. 1),
и условия сопряжения в точке $x_1=0$:

$$\begin{gathered}u_n^+\big|_{x_1=-0}=u_n^+\big|_{x_1=+0}, \varphi|_{x_1=-0}=\varphi|_{x_1=+0}, M_{11}|_{x_1=-0}=M_{11}|_{x_1=+0},\\ Q_{11}|_{x_1=-0}=\left(Q_{11}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)|_{x_1=+0}, Q_{12}|_{x_1=-0}=Q_{12}|_{x_1=+0}.\end{gathered} \tag{8}$$

Для анализа напряженно-деформированного состояния слоя можно ограничиться рассмотрением только участка $(0;\, \ell]$, используя следующие граничные условия:

$$\begin{gathered} u_n^+\big|_{x_1=\ell} = 0,\ \varphi|_{x_1=\ell} = 0,\ M_{11}|_{x_1=+0} = -Q_2 a, \\ (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0} = 0,\ Q_{12}|_{x_1=+0} = -Q_2. \end{gathered} \tag{9}$$

Решение поставленной задачи определяет три неизвестные функции u_1^+, u_2^+, φ.

2. Решение упругой задачи. В работе [8] найдено общее решение системы (6) на участке $(0;\, \ell]$ для таких толщин адгезионного слоя 3, при которых дискриминант характеристического уравнения системы (6) отрицательный $d = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4 < 0$, где $m_1 = 1 + \frac{DhC_2}{2LS_2}$; $m_2 = \frac{1}{Lh}\left(C_1 - \frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2}\right)$; $m_3 = -\frac{3(\delta_0 D_2 Dh + 4LS_2)}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $m_4 = \frac{12LS_2}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $S_2 = Dh + 0.5\delta_0 D_1$. Данное решение имеет вид:

$$\begin{gathered} u_1^+ = \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1}\begin{bmatrix} -R_9\cos(R_2x_1) + \\ +R_{10}\sin(R_2x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1}\begin{bmatrix} R_{10}\cos(R_2x_1) + \\ +R_9\sin(R_2x_1) \end{bmatrix} - \\ -\tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1}\begin{bmatrix} R_9\cos(R_2x_1) + \\ +R_{10}\sin(R_2x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1}\begin{bmatrix} -R_{10}\cos(R_2x_1) + \\ +R_9\sin(R_2x_1) \end{bmatrix} + \\ + \left[\frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2(C_1S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2)} + \frac{1}{S_2}\right]\tilde{C}_1 x_1 + \tilde{C}_6, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} u_2^+ = \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1}\begin{bmatrix} R_1\cos(R_2x_1) - \\ -R_2\sin(R_2x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1}\begin{bmatrix} R_2\cos(R_2x_1) + \\ +R_1\sin(R_2x_1) \end{bmatrix} - \\ -\tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1}\begin{bmatrix} R_1\cos(R_2x_1) + \\ +R_2\sin(R_2x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1}\begin{bmatrix} -R_2\cos(R_2x_1) + \\ +R_1\sin(R_2x_1) \end{bmatrix} - \\ -\frac{C_2}{C_1S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2}\tilde{C}_1, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \varphi = -\tilde{C}_2 e^{R_1 x_1}\begin{bmatrix} R_3\cos(R_2x_1) + \\ +R_4\sin(R_2x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1}\begin{bmatrix} -R_4\cos(R_2x_1) + \\ +R_3\sin(R_2x_1) \end{bmatrix} + \\ +\tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1}\begin{bmatrix} -R_3\cos(R_2x_1) + \\ +R_4\sin(R_2x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1}\begin{bmatrix} R_4\cos(R_2x_1) + \\ +R_3\sin(R_2x_1) \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{12}$$

где $\alpha = \frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4}{2}$; $\beta = \frac{\sqrt{-d}}{2}$; $R_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}$; $R_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}$; $R_3 = \frac{m_2 - R_1^2 + R_2^2}{m_1}$; $R_4 = \frac{2R_1R_2}{m_1}$; $R_5 = \frac{Dh^2(R_1R_3 + R_2R_4) + \delta_0 D_2 R_1}{2S_2}$; $R_6 = \frac{Dh^2(R_2R_3 - R_1R_4) + \delta_0 D_2 R_2}{2S_2}$; $R_7 = \frac{R_1}{R_1^2 + R_2^2}$; $R_8 = \frac{R_2}{R_1^2 + R_2^2}$; $R_9 = R_5R_7 + R_6R_8$; $R_{10} = R_6R_7 - R_5R_8$.

Чтобы найти константы интегрирования $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4, \tilde{C}_5, \tilde{C}_6$, нужно решить систему из 6 уравнений (9).

Рассмотрим образец с геометрическими характеристиками: $a = 0.055$ м, $h = 0.0127$ м, $b = 0.025$ м, $\delta_0 = 10^{-3}$ м, $\ell = 0.2$ м. Механические свойства консоли примем следующими: $E = 2.04 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.33$, а механические и прочностные характеристики для адгезионного слоя 3 приведены в таблице 1 [9], где τ_0 — предел текучести; P_{cr} — экспериментальное значение внешней нагрузки при инициализации трещины в адгезиве толщиной $\delta_0 = 10^{-3}$ м [9].

Адгезив	E_3, Па	ν_3	τ_0, МПа	P_{cr}, Н
Araldite AV138	$4.9 \cdot 10^9$	0.35	25.1	1100
Araldite 2015	$1.85 \cdot 10^9$	0.33	14.6	1500
Sikaforce 7752	$0.49 \cdot 10^9$	0.3	5.2	3100

Таблица 1. Механические и прочностные характеристики адгезивов

На рис. 2 построены графики напряжений адгезионного слоя (5) Araldite AV138, на рис. 3 — Araldite 2015, на рис. 4 — Sikaforce 7752. Кривая 1 (сплошная линия) соответствует $\bar{\sigma}_{22}$, кривая 2 (пунктирная линия) — $\bar{\sigma}_{11}$, кривая 3 (линия из точек) — $\bar{\sigma}_{33}$.

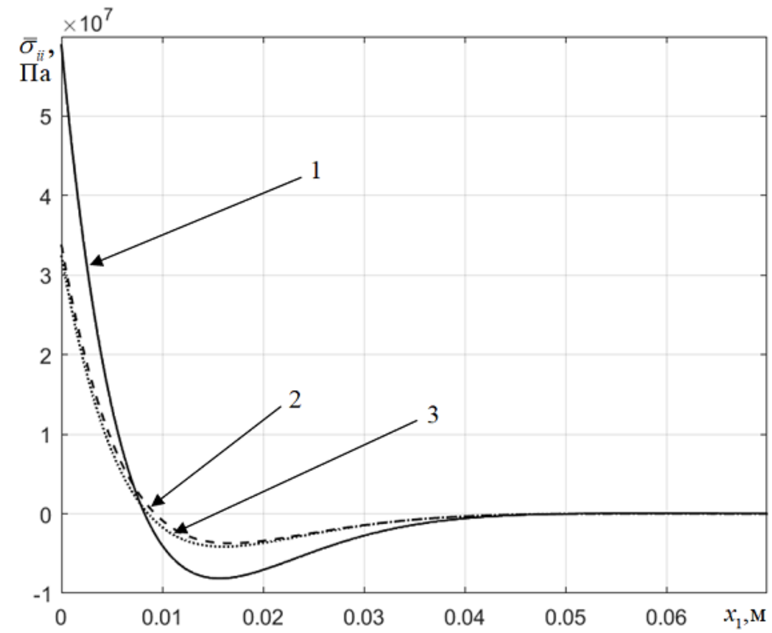

Рис. 2. Напряжения в адгезионном слое Araldite AV138

Из рис. 2—4 видно, что свойства адгезива и значение внешней нагрузки существенно влияют на напряженное состояние в адгезионном слое 3.

3. Нахождение предела упругости. Будем считать, что адгезив начинает проявлять пластические свойства, когда выполняется условие Треска—Сен-Венана [10]. В силу антисимметрии касательных компонент тензора напряжений для рассматриваемого образца (рис. 1) тензор средних напряжений слоя будет иметь диагональный вид. При нагружении нормальным отрывом композита в состоянии плоской деформации максимальным главным напряжением является $\bar{\sigma}_{22}$. А минимальное главное напряжение $\bar{\sigma}_m$ определим из решения упругой задачи. Из рис. 2—4 видно, что $\bar{\sigma}_m = \bar{\sigma}_{33}$. Получим условие текучести в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33} = 2\tau_0. \tag{13}$$

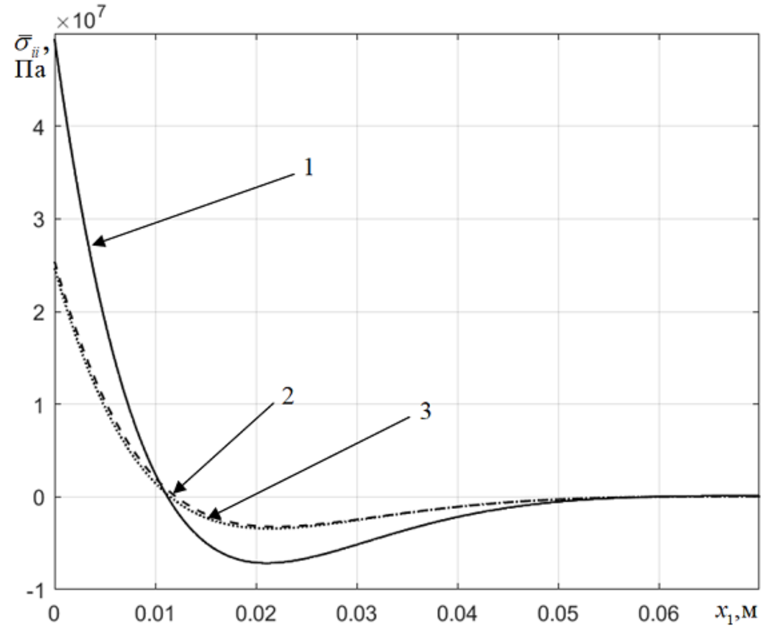

Рис. 3. Напряжения в адгезионном слое Araldite 2015

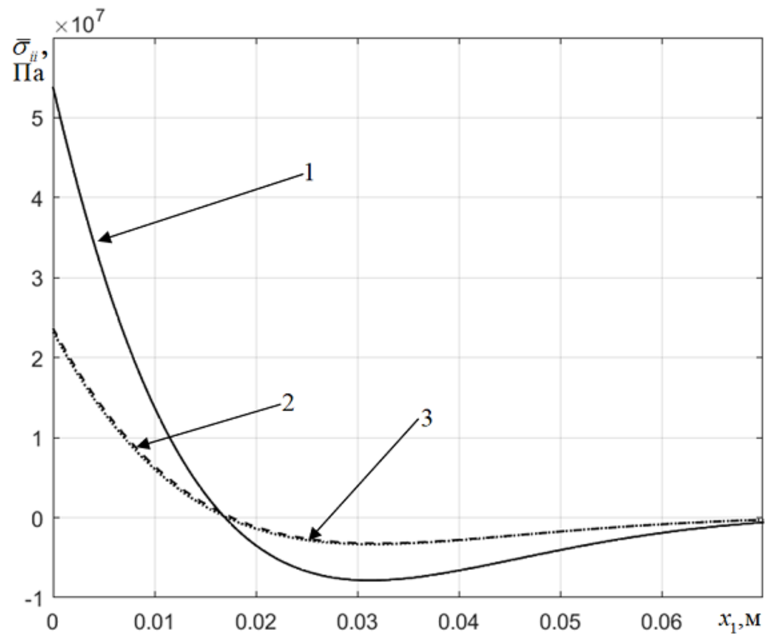

Рис. 4. Напряжения в адгезионном слое Sikaforce 7752

Для нахождения постоянных интегрирования и силы Q_2, обеспечивающей переход адгезионного слоя в состояние пластического деформирования, необходимо решить систему из 7 уравнений (9), (13).

В результате получаем для адгезива Araldite AV138 значение $P = 1096$ Н, для Araldite 2015 — $P = 911$ Н, для Sikaforce 7752 — $P = 534$ Н. Сравнивая полученные результаты с экспериментальными значениями внешней нагрузки при инициализации трещины в адгезиве P_{cr} (таблица 1), видим, что в хрупком адгезионном слое Araldite AV138 пластические деформации только начинаются и в целом ими можно пренебречь, ограничившись рассмотрением только упругой постановки задачи. А для умерено пластичного адгезива Araldite 2015 и пластичного полиуретана Sikaforce 7752 необходимо рассмотреть постановку задачи с пластикой, для того чтобы получить результаты, соответствующие проведенному эксперименту [9].

В статье [11] приводится решение упругопластической задачи для случая плоского деформируемого и плоского напряженного состояния адгезионного слоя при относительно больших значениях $\ell/\delta_0 \to \infty$.

Заключение. На основе вариационной постановки задачи о равновесии двух тел, сопряженных тонким слоем получена упрощенная постановка задачи в дифференциальном виде. Приведено аналитическое решение. Используя критерий Треска—Сен-Венана, найдено значение внешней нагрузки, соответствующее пределу упругости и началу пластических деформаций в адгезионном слое. Для адгезива Araldite AV138 можно ограничиться полученным аналитическим решением упругой задачи, для Araldite 2015 и Sikaforce 7752 нужно рассмотреть упругопластическую постановку задачи, для того чтобы получить корректные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // International Journal of Fracture. 2011. Vol. 171, no. 2. P. 105–109.

[2] Ентов В. М., Салганик Р. Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 87–99.

[3] Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегающем горизонтальном пласте // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2015. № 2. С. 24–33.

[4] Макклинток Ф. Пластические аспекты разрушения // Разрушение. Москва: Мир, 1975. Т. 3. С. 67–262.

[5] Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 3. С. 22–34.

[6] Mindlin R. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME Journal of Applied Mechanics. 1951. Vol. 18. P. 31–38.

[7] Reissner E. On Bending of Elastic Plates // Quarterly of Applied Mathematics. 1947. Vol. 5, no. 1. P. 55–68.

[8] Богачева В. Э. Исследование деформирования тонкого адгезионного слоя композита при воздействии нормальным отрывом // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2023. № 7. С. 38–45.

[9] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. Vol. 67. P. 103–111.

[10] Tresca H. Memoires sur l'ecoulement des corps solides // Memoires presentes par divers savants a l'Academie royaledes ciences. 1868. Vol. 18, no. 1864. P. 733–799.

[11] О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 2. Упругопластическое деформирование / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 3. С. 30–42.

V.E. Bogacheva

INVESTIGATION OF THE ELASTIC LIMIT OF A THIN ADHESIVE LAYER OF A COMPOSITE UNDER NORMAL SEPARATION LOADING

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. Deformation under the action of normal separation of a composite plate consisting of two consoles connected by an adhesive layer in a state of flat deformation is investigated. From the general variational formulation, taking into account the Mindlin—Reissner theory, a differential formulation is obtained. An analytical solution obtained with complex roots of the characteristic equation of a system of second-order differential equations is investigated. Using the Tresca—Saint-Venant criterion, the value of the external load corresponding to the elastic limit and the onset of plastic deformations in the adhesive layer was found.

Keywords: adhesive layer, composite, interaction layer, normal separation, elastic deformation, Tresca—Saint-Venant criterion.

REFERENCES

[1] Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // International Journal of Fracture. 2011. Vol. 171, no. 2. P. 105–109.
[2] Entov V. M., Salganik R. L. To the Prandtl model of brittle fracture // Izv. AN SSSR. MTT. 1968. no. 6. P. 87–99. (in Russian).
[3] Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Stress state in the vicinity of excavation in deep horizontal bed // Journal of Mining Science. 2015. no. 2. P. 24–33. (in Russian).
[4] Makklintok F. Plastic aspects of destruction // Razrushenie. Moscow: Mir, 1975. Vol. 3. P. 67–262. (in Russian).
[5] Stress state and conditions for crack initiation in the adhesion layer of the composite / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // PNRPU Mechanics Bulletin. 2021. no. 3. P. 22–34. (in Russian).
[6] Mindlin R. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME Journal of Applied Mechanics. 1951. Vol. 18. P. 31–38.
[7] Reissner E. On Bending of Elastic Plates // Quarterly of Applied Mathematics. 1947. Vol. 5, no. 1. P. 55–68.
[8] Bogacheva V. E. Investigation of deformation of a thin adhesive layer of a composite under the influence of a normal separation // Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki. 2023. no. 7. P. 38–45. (in Russian).
[9] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. Vol. 67. P. 103–111.
[10] Tresca H. Memories on the collapse of solidus bodies // Memoirs presented by various scholars at the Royal Academy of Sciences. 1868. Vol. 18, no. 1864. P. 733–799. (in French).
[11] On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 2. Elastic-plastic deformation / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // PNRPU Mechanics Bulletin. 2023. no. 3. P. 30–42. (in Russian).

Bogacheva Viktoriya Eduardovna, Postgraduate, Department of Computational Mechanics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russia.