Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3 (57). С. 74–83

А. В. Ковалев, Ю. В. Малыгина

ОБ УЧЕТЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИИ ТРУБЫ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В статье представлено решение задача о термодеформировании упругопластической трубы, находящейся под действием равномерного внутреннего и внешнего давлений. Предел текучести материала при этом предполагался зависящим от температуры. Согласно методу возмущений, представлено решение в нулевом и первом приближениях. Получено выражение для радиуса упругопластической границы. Рассматривался случай общей плоской задачи.

Ключевые слова: напряжение, упругость, пластичность, сжимаемость, температура.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.006

УДК: 539.374

Введение. Физические свойства материала при охлаждении или нагреве могут существенно изменяться. Поэтому при решении задач термодеформирования необходимо учитывать влияние температуры на характеристики материала. В работах [1–3] представлено исследование температурных напряжений, для случая, когда предел текучести имеет линейную и квадратичную зависимость от температуры.

В данной работе рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния упругопластической трубы, находящейся под действием всестороннего давления, при учете температуры и упругой сжимаемости. Предел текучести при этом зависит от температуры.

1. Постановка задачи. Пусть имеется упругопластическая толстостенная труба радиусов a и b, $(a < b)$, находящаяся под действием равномерного внутреннего

Ковалев Алексей Викторович
`e-mail`: kovalev@amm.vsu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Малыгина Юлия Владимировна
`e-mail`: ymkahavren@gmail.com, старший преподаватель кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 12.12.2023

– p и внешнего – q давлений, а также стационарного поля температуры. Материал трубы будем считать упруго сжимаемым. Модуль упругости и коэффициент Пуассона предполагаем не зависящими от температуры. Предел текучести имеет линейную температурную зависимость.

Система уравнений для поставленной задачи имеет вид:

— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \tag{1}$$

где σ_r, σ_θ – компоненты тензора напряжений;

— соотношения Коши

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, e_\theta = \frac{u}{r}, \tag{2}$$

где e_r, e_θ – компоненты тензора полных деформаций, u – компонента радиального перемещения;

— выражения для деформаций в упругой области

$$\begin{cases} e_r^e = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha T(r), \\ e_\theta^e = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \mu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right] + \alpha T(r), \\ e_z^e = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha T(r), \end{cases} \tag{3}$$

где e_r^e, e_θ^e, e_z^e – компоненты тензора деформаций в упругой области; E – модуль упругости, σ_z – компонента тензора напряжений, μ – коэффициент Пуассона, $T(r)$ – температура, которая определяется из решения стационарного уравнения теплопроводности с заданными краевыми условиями, α – коэффициент температурного расширения [4,5];

— условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 = 6k^2, \tag{4}$$

— ассоциированный закон пластического течения

$$\begin{aligned} de_r^p &= \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z\right), \\ de_\theta^p &= \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z\right), \\ de_z^p &= \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где e_r^p, e_θ^p, e_z^p – компоненты тензора пластических деформаций, $d\lambda$ – скалярный положительный множитель;

— граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_r\Big|_{r=a} &= -p, \\ \sigma_r\Big|_{r=b} &= -q, \end{aligned} \tag{6}$$

— условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = [u] = 0, \tag{7}$$

— выражение полных деформаций тела в пластической области

$$e_r = e_r^e + e_r^p, e_\theta = e_\theta^e + e_\theta^p, e_z = e_z^e + e_z^p. \tag{8}$$

Далее, предположим, что осевая деформация e_z будет постоянной и имеет в упругой и пластической областях одинаковое значение равное: $e_z = e_1 = const$. Поскольку деформации в упругой области определяются соотношением (3), а в пластической – (5), то выражение полных деформаций тела в пластической области можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
de_r &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_r - \mu\left(d\sigma_\theta + d\sigma_z\right)\right] + d(\alpha T(r)) + \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z\right),\\
de_\theta &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_\theta - \mu\left(d\sigma_r + d\sigma_z\right)\right] + d(\alpha T(r)) + \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z\right),\\
de_1 &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_z - \mu\left(d\sigma_r + d\sigma_\theta\right)\right] + d(\alpha T(r)) + \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

2. Метод решения. Для решения поставленной задачи, воспользуемся методом возмущений. Данный метод заключается в разложении искомых величин в ряд по малому параметру δ. В данном случае ограничимся только нулевым и первым приближениями. Запишем необходимые величины в виде рядов по малому параметру:

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}, e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + \delta e_{ij}^{(1)}, u = u^{(0)} + \delta u^{(1)},\\
\alpha = \alpha^{(0)} + \delta\alpha^{(1)}, \mu = \mu^{(0)} + \delta\mu^{(1)}, e_1 = \delta e_1^{(1)},\\
\lambda = \lambda^{(0)} + \delta\lambda^{(1)}, k = k^{(0)} + \delta k^{(1)}, r_s = r_s^{(0)} + \delta r_s^{(1)},
\end{gathered} \tag{10}$$

где $\mu^{(0)} = \dfrac{1}{2}, \mu^{(1)}$ – известная постоянная; $k^{(0)}$ – значение предела текучести при постоянной температуре; $k^{(1)}$ – функция, зависящая от температуры; верхние индексы $(0), (1)$ определяют нулевое и первое приближения соответственно.

3. Решение и результаты. Подставим, представленные в (11), разложения в уравнения (1), (2), (4), (6), (7), (9) и , приравняв выражения при одинаковых степенях малого параметра, получим в каждом приближении систему дифференциальных уравнений для определения искомых соотношений.

Решение задачи в нулевом приближении, при $\alpha^{(0)} = 0$, известно [6] и имеет вид:

$$\begin{gathered}
\sigma_r^{p(0)} = -p + 2k^{(0)} ln\left(\frac{r}{a}\right), \sigma_\theta^{p(0)} = -p + 2k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r}{a}\right)\right), \\
\sigma_z^{p(0)} = -p + k^{(0)}\left(1 + 2ln\left(\frac{r}{a}\right)\right), \\
u^{p(0)} = u^{e(0)} = \frac{3k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2}{2Er}, \\
\sigma_r^{e(0)} = -q + k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right], \sigma_\theta^{e(0)} = -q + k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2\left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right], \\
\sigma_z^{e(0)} = -q + \frac{k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2}{b^2}, \\
{r_s^{(0)}}^2 = \frac{b^2}{k^{(0)}}\left[-p + q + +k^{(0)}\left(1 + 2ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right)\right].
\end{gathered} \tag{11}$$

Далее, запишем систему уравнений в первом приближении:
— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r^{(1)}}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}}{r}, \tag{12}$$

— соотношения Коши

$$e_r^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r}, e_\theta^{(1)} = \frac{u^{(1)}}{r}, \tag{13}$$

— выражения для деформаций в упругой области

$$\begin{aligned}
e_r^{e(1)} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_r^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_\theta^{(1)} + \sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} T(r), \\
e_\theta^{e(1)} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} T(r), \\
e_1^{(1)} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} T(r),
\end{aligned} \tag{14}$$

— условие пластичности

$$\begin{gathered}
\left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}\right)\left(\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}\right) + \left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right)\left(\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_z^{(1)}\right) + \\
+\left(\sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right)\left(\sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)}\right) = 6k^{(0)} k^{(1)},
\end{gathered} \tag{15}$$

— выражение полных деформаций в пластической области

$$
\begin{aligned}
de_r^{(1)} &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_r^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_\theta^{(1)} + d\sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(0)}}{3}\left[2\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} - \sigma_z^{(1)}\right] + \frac{d\lambda^{(1)}}{3}\left[2\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right], \\
de_\theta^{(1)} &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_\theta^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(0)}}{3}\left[2\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)}\right] + \frac{d\lambda^{(1)}}{3}\left[2\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right], \\
de_1^{(1)} &= \frac{1}{E}\left[d\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_\theta^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(0)}}{3}\left[2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}\right] + \frac{d\lambda^{(1)}}{3}\left[2\sigma_z^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}\right],
\end{aligned}
\tag{16}
$$

— граничные условия

$$
\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=a} = \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=b} = 0, \tag{17}
$$

— условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$
\left[\sigma_r^{(1)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_s^{(1)}\right] = \left[\sigma_\theta^{(1)} + \frac{d\sigma_\theta^{(0)}}{dr} r_s^{(1)}\right] = \left[u^{(1)} + \frac{du^{(0)}}{dr} r_s^{(1)}\right] = 0. \tag{18}
$$

Получим соотношение для определения компоненты напряжений $\sigma_z^{(1)}$. Рассмотрим третье уравнение выражения (16):

$$
\begin{aligned}
d\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_\theta^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}\right) + E\alpha^{(1)} dT(r) + \\
+ \frac{d\lambda^{(0)}}{3}\left[2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}\right] = 0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Введем обозначение $\chi^{(1)} = 2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}$. С учетом введенного обозначения, предыдущее выражение примет вид

$$
\frac{d\chi^{(1)}}{d\lambda^{(0)}} + \frac{2E}{3}\chi^{(1)} = 4\mu^{(1)}\frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 2E\alpha^{(1)}\frac{dT(r)}{d\lambda^{(0)}}. \tag{20}
$$

Решив дифференциальное уравнение (20), получим:

$$
\chi^{(1)} = e^{-\frac{2}{3}E\lambda^{(0)}} \int\limits_0^{\lambda^{(0)}} \left[4\mu^{(1)}\frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 2E\alpha^{(1)}\frac{dT(r)}{d\lambda^{(0)}} - \right] e^{\frac{2}{3}E\lambda^{(0)}} d\lambda^{(0)} + \chi_e^{(1)}, \tag{21}
$$

где $\chi_e^{(1)} = 4\mu^{(1)}\sigma_z^{(0)} - 2E\alpha^{(1)}T(r) + 2Ee_1^{(1)}$.

Таким образом, компонента напряжений $\sigma_z^{(1)}$ определяется из введенного обозначения и уравнения (21):

$$
\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)} + \chi^{(1)}\right). \tag{22}
$$

Выражения, определяющие компоненты деформаций $e_r^{(1)}, e_\theta^{(1)}$ в упругой области, можно получить, если просуммировать первые два уравнения соотношения (14), при учете уже полученного решения в нулевом приближении.

$$\begin{gathered} e_r^{(1)} + e_\theta^{(1)} = \frac{6\mu^{(1)}}{E}\sigma_z^{(0)} + 3\alpha^{(1)}T(r) - e_1^{(1)}, \\ e_r^{(1)} - e_\theta^{(1)} = \frac{1}{2E}\left[3\left(\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}\right) + 2\mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}\right)\right]. \end{gathered} \tag{23}$$

Компоненту радиального перемещения в упругой области получим, если подставим в первое уравнение (23) соотношения Коши и решим получившееся дифференциальное уравнение:

$$u^{e(1)} = \frac{3}{E}\mu^{(1)}\left(q - \frac{k^{(0)}r_s^{(0)}}{b^2}\right)r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r}\int T(r)rdr - \frac{1}{2}e_1 r + \frac{D}{r}. \tag{24}$$

Напряжения $\sigma_r^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}$ в упругой области, определим из второго уравнения соотношения (23). Таким образом, получим:

$$\begin{gathered} \sigma_r^{e(1)} = -\frac{2}{3}\mu^{(1)}k^{(0)}r_s^{(0)2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right] + \frac{2ED}{3}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right] - \\ -4E\alpha^{(1)}\int_r^b \frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr + 2E\alpha^{(1)}\int_r^b \frac{T(r)}{r}dr, \\ \sigma_\theta^{e(1)} = -\frac{2}{3}\mu^{(1)}k^{(0)}r_s^{(0)2}\left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right] + \frac{2ED}{3}\left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right] - \\ -4E\alpha^{(1)}\int_r^b \frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr + 2E\alpha^{(1)}\int_r^b \frac{T(r)}{r}dr + \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^2}\int T(r)rdr - 2E\alpha^{(1)}T. \end{gathered} \tag{25}$$

Разность компонент напряжений $\sigma_r^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}$ в пластической области получим из условия пластичности (15), с учетом введенного обозначения, а также полученного нулевого решения:

$$\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} = 2k^{(1)}. \tag{26}$$

Поскольку величина предела текучести в первом приближении $k^{(1)}$ зависит от температуры, которая, в свою очередь, изменяется в зависимости от радиуса трубы, то это величина является функцией радиуса. Поэтому, в дальнейшем при вычислении компонент напряжений в пластической области, данную величину будет нельзя вынести за знак интеграла.

Подставив (26) в уравнение равновесия (12) и учитывая граничные условия (17), получим соотношения для определения компонент напряжений в пластической области:

$$\begin{gathered} \sigma_r^{p(1)} = \int_a^r \frac{2k^{(1)}}{r}dr, \\ \sigma_\theta^{p(1)} = 2k^{(1)} + \int_a^r \frac{2k^{(1)}}{r}dr. \end{gathered} \tag{27}$$

Для того, чтобы получить уравнение для радиальной компоненты перемещения в пластической области просуммируем первые два уравнения соотношения (16) и решим получившееся дифференциальное уравнение. В итоге получим:

$$u^{p(1)} = -\frac{3}{E}\mu^{(1)}\left(-p + 2k^{(0)}ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r}\int T(r)rdr - \frac{1}{2}e_1 r + \frac{N}{r}. \tag{28}$$

Константу D получим из условия сопряжения (18) компонент напряжений $\sigma_r^{(1)}$ в упругой и пластической областях:

$$\begin{gathered} D = \frac{\mu^{(1)}}{E}k^{(0)}{r_s^{(0)}}^2 + \frac{3}{2E}\left[4E\alpha^{(1)}\int\limits_{r_s^{(0)}}^{b}\frac{1}{r^3}\int T(r)r\,drdr - \right. \\ \left. 2E\alpha^{(1)}\int\limits_{r_s^{(0)}}^{b}\frac{T(r)}{r}dr - \int\limits_{a}^{r_s^{(0)}}\frac{2k^{(1)}}{r}dr\right]\frac{{r_s^{(0)}}^2 b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2}. \end{gathered} \tag{29}$$

Константу N получим из условия сопряжения (18) компонент перемещений в упругой и пластической областях:

$$\begin{gathered} N = -\frac{2\mu^{(1)}}{E}k^{(0)}{r_s^{(0)}}^2 + \frac{3}{2E}\left[4E\alpha^{(1)}\int\limits_{r_s^{(0)}}^{b}\frac{1}{r^3}\int T(r)r\,drdr - \right. \\ \left. 2E\alpha^{(1)}\int\limits_{r_s^{(0)}}^{b}\frac{T(r)}{r}dr - \int\limits_{a}^{r_s^{(0)}}\frac{2k^{(1)}}{r}dr\right]\frac{{r_s^{(0)}}^2 b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2}. \end{gathered} \tag{30}$$

Выражение радиуса упругопластической границы получим из условия сопряжения (18) компонент напряжений $\sigma_\theta^{(1)}$ в упругой и пластической областях:

$$\begin{gathered} r_s^{(1)} = \left\{\left[4E\alpha^{(1)}\int\limits_{r_s^{(0)}}^{b}\frac{1}{r^3}\int T(r)r\,drdr - 2E\alpha^{(1)}\int\limits_{r_s^{(0)}}^{b}\frac{T(r)}{r}dr\right]\frac{2b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2} - \right. \\ -\frac{4E\alpha^{(1)}}{r_s^{(0)}}\int\limits_{r=r_s^{(0)}} T(r)rdr + 2E\alpha^{(1)}\int\limits_{r_s^{(0)}}^{b}\frac{T(r)}{r}dr - 2E\alpha^{(1)}T(r_s^{(0)}) - \\ \left. -2k^{(1)}(r_s^{(0)}) - \frac{2{r_s^{(0)}}^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2}\int\limits_{a}^{r_s^{(0)}}\frac{2k^{(1)}}{r}dr\right\}\frac{r_s^{(0)}}{4k^{(0)}}. \end{gathered} \tag{31}$$

Согласно принятому методу решения, можем представить выражения компонент напряжений и уравнение радиуса упругопластической границы для поставленной задачи. Тогда, из (11), (19), (33), (34) имеем

$$\sigma_r^p = -p + 2k^{(0)} ln\left(\frac{r}{a}\right) + \delta \int\limits_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr,$$

$$\sigma_\theta^p = -p + 2k^{(0)}\left(1 + ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \delta\left(2k^{(1)} + \int\limits_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr\right),$$

$$\sigma_r^e = -q + k^{(0)} r_s^{(0)2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right] +$$
$$+\delta\left\{\left[4E\alpha^{(1)}\int\limits_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3}\int T(r) r dr dr - 2E\alpha^{(1)}\int\limits_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r} dr - \int\limits_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr\right]\frac{r_s^{(0)2}}{r^2}\frac{r^2 - b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} -\right.$$
$$\left. -4E\alpha^{(1)}\int\limits_r^b \frac{1}{r^3}\int T(r) r dr dr + 2E\alpha^{(1)}\int\limits_r^b \frac{T(r)}{r} dr\right\},$$

$$\sigma_\theta^e = -q + k^{(0)} r_s^{(0)2}\left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right] +$$
$$+\delta\left\{\left[4E\alpha^{(1)}\int\limits_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3}\int T(r) r dr dr - 2E\alpha^{(1)}\int\limits_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r} dr - \int\limits_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr\right]\frac{r_s^{(0)2}}{r^2}\frac{r^2 + b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} -\right.$$
$$\left. -4E\alpha^{(1)}\int\limits_r^b \frac{1}{r^3}\int T(r) r dr dr + 2E\alpha^{(1)}\int\limits_r^b \frac{T(r)}{r} dr + \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^2}\int T(r) r dr - 2E\alpha^{(1)} T(r).\right\},$$

$$r_s = r_s^{(0)} + \delta r_s^{(1)}.$$

Заключение. Таким образом, согласно принятому методу малого параметра, было определено напряженно-деформированное состояние упругопластической трубы, находящейся под действием равномерного всестороннего сжатия и учета температурных эффектов, для случая, когда предел текучести материала зависит от температуры. Кроме того, если положить в приведенных выше соотношениях коэффициент температурного расширения или величину $k^{(1)}$ равными нулю, то получим выражения, представленные в работах [7] или [8–11] соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ткачева А. В. Влияние выбора зависимости предела текучести от температуры на объёмы необратимого деформирования в материалах сборки, полученной в результате горячей посадки // Материалы Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. Томск: В-Спектр, 2015. С. 34–37.

[2] Дац Е. П., Ткачева А. В. Математическая модель процесса горячей посадки цилиндрических деталей // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого

тела. Чебоксары: Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2014. С. 198–200.

[3] Даниловская В. И. Упругопластическая симметричная деформация толстостенной трубы с учётом неравномерности распределения температуры вдоль радиуса // Прикладная механика. 1965. № 6. С. 8–13.

[4] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Перевод с немецкого. Москва: Физматлит, 1963. 253 с.

[5] Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Москва: Физматгиз, 1958. 167 с.

[6] Д. Д. Ивлев Л. В. Ершов. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.

[7] Ивлев Д. Д., Макаров Е. В., Марушкей Ю. М. Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации // Изв. РАН. МТТ. 1978. № 4. С. 80–87.

[8] Андреева Ю. В., Ковалев А. В., Внуков А.Н. К определению напряженного состояния в упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д.Д. Ивлева. Чебоксары: Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2015. С. 167–172.

[9] Андреева Ю. В., Ковалев А. В., Внуков А.Н. К расчету сжимаемой упругопластической трубы // Механика деформируемого твердого тела : сборник трудов 9 Всероссийской конференции в рамках Международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". Воронеж: Воронежский государственный университет, 2016. С. 153–155.

[10] Ковалев А.В., Малыгина Ю.В. Об определении напряженно-деформированного состояния в упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научно-технической конференции. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2017. С. 1079–1082.

[11] Gornostaev K.K., Kovalev A.V., Malygina Y.V. Stress-strain state in an elastoplastic pipe taking into account the temperature and compressi-bility of the material // Journal of Physics: Conference Series. 2018. № 973. с. 012004.

A. V. Kovalev, Y.V. Malygina

ON TAKING INTO ACCOUNT THE DEPENDENCE OF THE YIELD STRENGTH ON TEMPERATURE WHEN SOLVING THE PROBLEM OF THERMAL DEFORMATION OF A PIPE

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The paper considers the problem of uniform compression of an elastoplastic pipe under the influence of temperature effects. The yield strength depends on temperature. According to the perturbation method, the solution is presented in the zero and first approximations. The radius of the elastoplastic boundary is determined. The case of a general plane problem was considered.

Keywords: stress, elasticity, plasticity, compressibility, temperature.

REFERENCES

[1] Tkacheva A. V. The influence of the choice of the dependence of the yield strength on temperature on the volume of irreversible deformation in the materials of the assembly obtained as a result of shrink fit // Materials of the All-Russian Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduate Students and Young Scientists. Tomsk: V-Spectrum, 2015. C. 34–37.

[2] Dats E. P., Tkacheva A. V. Mathematical model of the process of hot fitting of cylindrical parts // Proceedings of the VIII All-Russian Conference on Mechanics of Deformable Solids. Cheboksary: Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics, 2014. C. 198–200.

[3] Danilovskaya V. I. Elastoplastic symmetric deformation of a thick-walled tube with consideration of non-uniform temperature distribution along the radius // Applied Mechanics. 1965. № 6. C. 8–13.

[4] Parkus G. Nonsteady Temperature Stresses. Moscow: Fizmatlit, 1963. 253 c.

[5] Melan E., Parkus G. Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields. Moscow: Fizmatgiz, 1958. 167 c.

[6] Ivlev D.D., Yershov L.V. Perturbing approximation in theory of elastoplastic body. Moscow: Science, 1978. 208 c.

[7] Ivlev D. D., Makarov E. V., Marushkey Yu. M. On the plasticity conditions of a compressible elastoplastic material under plane strain // A Journal of Russian Academy of Sciences. 1978. № 4. C. 80–87.

[8] Andreeva Y. V., Vnukov A. N., Kovalev A. V. Determining the stress state of elastoplastic pipe considering temperature effects and compressibility // All-Russian Scientific School-Conference "Mechanics of Marginal State and Related Issues dedicated to the 85th anniversary of Professor D.D. Ivlev. Чебоксары: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, 2015. C. 167–172.

[9] Andreeva Y. V., Vnukov A. N., Kovalev A. V. To the calculation of a compressible elastic-plastic pipe // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh: Voronezh State University, 2016. C. 153–155.

[10] Kovalev A.V., Malygina Y.V. On the determination of the stress-strain state in an elastic plastic pipe, taking into account the temperature and compressibility of the material // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh: Voronezh State University, 2017. C. 1079–1082.

[11] Gornostaev K.K., Kovalev A.V., Malygina Y.V. Stress-strain state in an elastoplastic pipe taking into account the temperature and compressi-bility of the material // Journal of Physics: Conference Series. 2018. № 973. C. 1–10.

Kovalev Alexey Victorovich, Dr. Sci. Phys. and Math.,Professor,Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia, Military educational scientific center air force "Air force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. GagarinVoronezh, Russia.

Malygina Yuliya Vladimirovna, Lecturer of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.