

А. А. Азаров<sup>1</sup>, А. Л. Попов<sup>1,2</sup>, Д. А. Челюбеев<sup>2</sup>

## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЧАСТОТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОСЕВОЙ НАГРУЗКИ В БАЛОЧНЫХ ОБРАЗЦАХ

<sup>1</sup>Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

**Аннотация.** Оценка усилий и жёсткости соединений имеет важное значение для контроля стержневых элементов. Существующие методы оценки подразделяются на статические и динамические. В работе рассмотрена методика динамической оценки продольного усилия в закреплённом стержне по спектру его изгибных колебаний путём сравнения экспериментально зарегистрированных частот колебаний с теоретическим спектром частот, полученным на основе модели балки Тимошенко. Для согласования результатов по теоретической модели с набором экспериментальных частот использован алгоритм basin-hopping. Выявлена особенность разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении стержня в области слабо нелинейной зависимости напряжения от деформации.

**Ключевые слова:** стержень Тимошенко, продольная сила, акустический спектр, алгоритм basin-hopping, экспериментальная верификация.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.007

УДК: 539.3

### Введение

В последнее время в литературе появляется все больше исследований, посвященных развитию динамических подходов к определению продольных усилий в стержневых стержнях как по одной, так и по нескольким характерным собственным частотам изгибных колебаний [1–11]; некоторые из подходов требуют определения модальных форм [6–9]; для этого также используются дополнительные массы, проводится сравнение с результатами МКЭ и оптимизация на основе генетических алгоритмов [1].

---

© Азаров А. А., Попов А. Л., Челюбеев Д. А., 2023

*Азаров Артур Александрович*

**e-mail:** azaartale@mail.ru, аспирант, Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

*Попов Александр Леонидович*

**e-mail:** popov@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Челюбеев Дмитрий Анатольевич*

**e-mail:** da-ch@yandex.ru, ведущий инженер, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Поступила 10.12.2023

Перечисленные и ряд других работ посвящены, как правило, анализу измерений на реальных объектах со стержнями, имеющими многократное превышение свободной длины по сравнению с габаритами поперечного сечения. Естественной моделью для описания изгиба и поперечных колебаний таких стержней является модель Эйлера-Бернулли. Ниже использована более общая модель колебаний стержня на основе балки Тимошенко, которая подходит для стержней с более широким диапазоном отношения длины к габаритам поперечного сечения. При определении осевой нагрузки стержня используется алгоритм basin-hopping — стохастический алгоритм, с помощью которого находится глобальный минимум гладкой скалярной функции, - в данном случае, - неизвестной продольной силы в сочетании с граничными условиями. Проведена экспериментальная верификация динамической методики на стержневой модели с заданными в испытательной машине значениями продольного усилия. Отмечена особенность разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении стержня в области слабо нелинейной зависимости напряжения от деформации.

**Теоретическая модель**

Рассмотрим поперечные колебания балки, нагруженной заранее неизвестной продольной силой при неизвестных угловых жёсткостях закреплений. Расчётная схема такой балки представлена на рис. 1. Для описания свободных поперечных колебаний

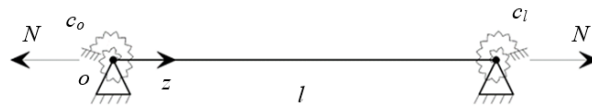


Рис. 1

балки используем модель колебаний балки Тимошенко в обозначениях [12] с учетом продольного усилия N:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{GF}{\alpha EI} \left(1 - \frac{\alpha N}{GF}\right) \left(\theta - \frac{\partial x}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{\alpha \rho}{G} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{\alpha N}{GF}\right) \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

( $x(z, t)$  – поперечное смещение центра тяжести сечения,  $\theta(z, t)$  – угол поворота поперечного сечения,  $\alpha$  – коэффициент, учитывающий неравномерность касательных напряжений по сечению, зависящий от формы сечения,  $E$  – модуль упругости,  $G$  – модуль сдвига,  $I$  – момент инерции сечения в плоскости изгиба,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $\rho$  – плотность материала). Граничные условия для балки с упругими связями - пружинными шарнирами с угловыми жесткостями  $c_0, c_1$ :

$$x \Big|_{z=0,l} = 0, c_0 \theta \Big|_{z=0} = EI \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0}, c_1 \theta \Big|_{z=l} = -EI \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=l} \tag{2}$$

Решение системы уравнений может быть представлено в виде:

$$X(z) = C_1 \cos \lambda z + C_2 \sin \lambda z + C_3 \operatorname{ch} \mu z + C_4 \operatorname{sh} \mu z,$$

$$\Theta(z) = C_1 \sin \lambda z \left( \frac{\alpha \rho \omega^2}{G \lambda} - \lambda \right) + C_2 \cos \lambda z \left( \lambda - \frac{\alpha \rho \omega^2}{G \lambda} \right) + C_3 \operatorname{sh} \mu z \left( \mu + \frac{\alpha \rho \omega^2}{G \mu} \right) + C_4 \operatorname{ch} \mu z \left( \mu + \frac{\alpha \rho \omega^2}{G \mu} \right) \quad (3)$$

где

$$\lambda = \left( \frac{(\rho I \omega^2 (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} + \sqrt{\left( \frac{(\rho I \omega^2 (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} \right)^2 - \frac{\rho \omega^2 (\alpha (I \omega^2 \rho + N) - GF)}{EGI}} \right)^{1/2},$$

$$\mu = \left( -\frac{(\rho I \omega^2 (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} + \sqrt{\left( \frac{(\rho I \omega^2 (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} \right)^2 - \frac{\rho \omega^2 (\alpha (I \omega^2 \rho + N) - GF)}{EGI}} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Оценка производится по минимуму функции ошибок, называемой квадратичной функции потерь, при сравнении теоретических и экспериментальных частот:

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_{exp,i} - f_{th,i})^2 \quad (5)$$

где  $f_{exp,i}$  –  $i$ -ая экспериментальная частота,  $f_{th,i}$  –  $i$ -ая теоретическая частота.

При заданных параметрах балки, действующей продольной силе и жесткостях заделки выписанные частотные уравнения обеспечивают однозначное определение собственных частот, соответствующих определённым формам колебаний балки. В то же время, решение обратной задачи исходя из известных собственных частот балки может быть неоднозначным. Для поиска усилия  $N$  в модели балки Тимошенко были применены алгоритмы глобальной оптимизации (basin-hopping) и локальной оптимизации – метод Нелдера-Мида подобно тому, как это реализовано в [2, 11] на модели балки Эйлера-Бернулли.

### Экспериментальная верификация

Предметом экспериментального изучения были послеударные колебания стального стержня круглого поперечного сечения 1 (рис. 2а), закрепленного в разрывной машине МИМ.2 двумя цилиндрическими зубчатыми захватами 2, имитирующими упругие заделки, при различном статическом растяжении силами 0.1, 5, 10, 15.2 кН. Длина стержня между захватами  $l = 197$  мм, диаметр 10 мм. Для построения диаграммы растяжения образца использовался навесной экстензометр 3 ДД-25.1. Поперечные колебания стержня возбуждались ударом металлического шарика в двух местах: посередине и на четверти длины стержня, что обеспечивало регистрацию как симметричных, так и антисимметричных форм колебаний. Регистрация осуществлялась бесконтактно с помощью лабораторного микрофона 4 (рис. 2б), соединённого со спектроанализатором типа А19-У2, данные из которого поступали в ЭВМ. В табл. 1 приведены

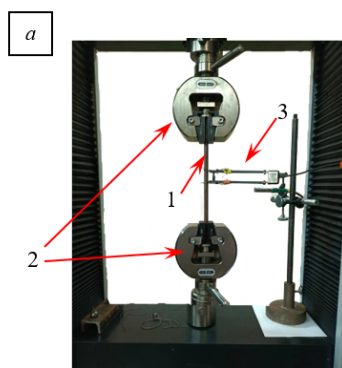


Рис. 2а

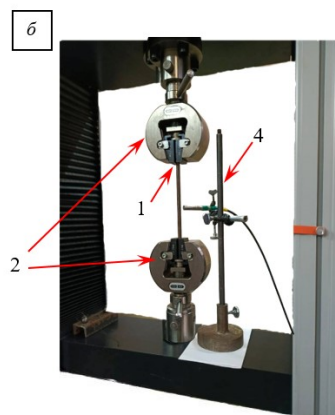


Рис. 2б

по четыре первых собственных частот поперечных колебаний стержня при разных значениях растягивающей силы.

N, кН	0.1	5	10	15.2
$f_1$	936	948	963	999
$f_2$	2521	2524	2526	2582
$f_3$	4835	4809	4765	4896
$f_4$	7828	7766	7701	7788

Таблица 1. Собственные частоты стержня  $f$ , Гц в зависимости от растягивающей силы  $N$ , кН

Ниже приведена диаграмма (рис. 3), показывающая изменения частот собственных колебаний с увеличением растягивающей силы, из которой видно, что с увеличением значения силы при растяжении стержня происходит увеличение значения первой собственной частоты на всех уровнях растяжения, однако эта тенденция с ростом порядкового номера частоты не продолжается.

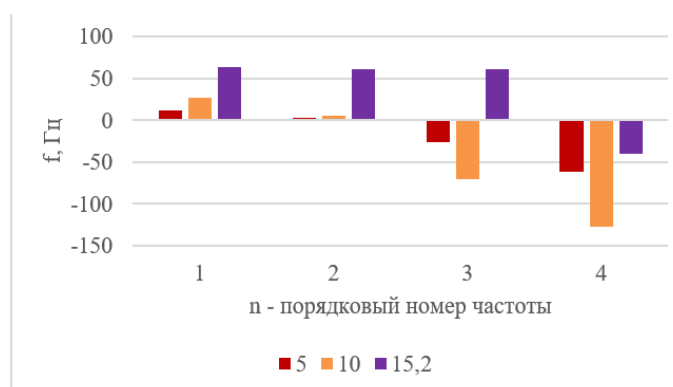


Рис. 3

Наблюдаемый эффект можно объяснить последовательным снижением значения модуля упругости с ростом растягивающей силы. На Рис. 4 приведена диаграмма

растяжения образца, показанного на Рис. 2 в диапазоне от 0 до 30 кН. Видно, что наклон касательной к кривой нагружения уменьшается с ростом нагрузки, что означает снижение модуля упругости материала образца по сравнению со значением при малых нагрузках. Данное обстоятельство обычно не учитывается при расчёте собственных частот поперечных колебаний стержня со значительной растягивающей продольной нагрузкой [2].

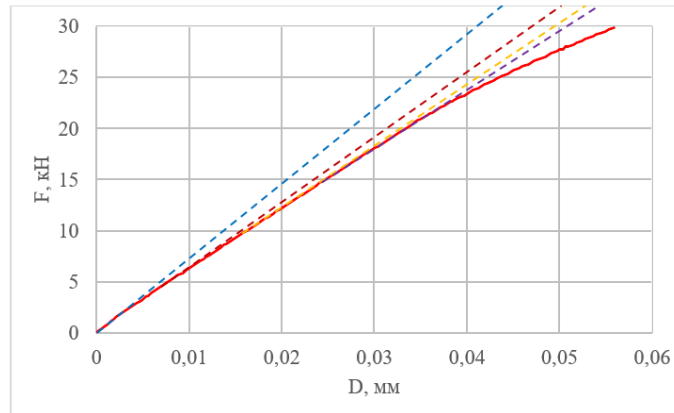


Рис. 4

В качестве обоснования рассмотрим колебания шарнирно-опертого стержня, растянутого продольной силой, по более простой модели Эйлера-Бернулли [2, 13]. Для шарнирно-опертого стержня с натягом частоты колебаний определяются по формуле [12]:

$$f_i = \frac{i}{2l} \sqrt{\frac{N}{m} + \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \frac{EI}{m}} \quad (6)$$

из которой выводится связь изменения частоты с изменением натяжения и изменением модуля упругости:

$$\Delta f_i = \frac{-\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 EI \Delta E + N \Delta N}{2\left(\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 EI + N\right)} \quad (7)$$

№ частоты	Частота, Гц (Ненатянутый стержень, E=200 ГПа)	Частота, Гц (Натянутый стержень, E=195 ГПа)	Разность частот, Гц
1	512	555	43
2	2050	2075	25
3	4611	4605	-6
4	8198	8147	-51

Таблица 2. Сравнение расчетных частот

Из этой формулы видно, что увеличение натяга приводит к повышению частоты, но относительное влияние этого фактора снижается с ростом порядкового номера частоты. Напротив, влияние сниженного модуля упругости возрастает с ростом порядкового номера частоты. В табл. 2 приведены результаты расчётов, показывающие

поведение первых четырёх частот для стержня со параметрами: длина 197 мм, диаметр 10 мм, материал – сталь, плотность 7800 кг/м<sup>3</sup>, модуль упругости первоначальный 200 ГПа, затем (при большом растяжении) - 195 ГПа. Первый расчёт сделан для ненапрянутого стержня с модулем 200 ГПа, второй – для силы натяжения 5 кН при модуле 195 ГПа.

Из приведенных результатов видно, что тенденция, отмеченная при экспериментальном определении частот поперечных колебаний растянутого стержня, наблюдается и в расчётном случае.

**Заключение** В работе представлены теоретический подход и некоторые результаты сопоставлений расчётных с экспериментальными значениями продольных усилий в растянутом упругом стержне. По полученным результатам можно судить о достаточно высокой согласованности теоретических и экспериментальных результатов. Выявлена и объяснена особенность разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении стержня в области слабо нелинейной зависимости напряжения от деформации.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gentilini C., Marzani A., Mazzotti M. Nondestructive Characterization of Tie-Rods by Means of Dynamic Testing, Added Masses and Genetic Algorithms. No. V.332. 2013. P. 76–101.
- [2] Lagomarsino S., Calderini C. The Dynamical Identification of the Tensile Force in Ancient Tie-Rods. No. V.27. 2005. P. 846–856.
- [3] Collini L., Garziera R., Riabova K. Vibration Analysis for Monitoring of Ancient Tie-Rods. No. V.2017. 2017. P. 1–12.
- [4] Dynamical Assessment of the Work Conditions of Reinforcement Tie-Rods in Historical Masonry Structures / E. Coisson, L. Collini, L. Ferrari et al. No. V.13. 2019. P. 1–13.
- [5] Dynamic Identification of Tensile Force in Tie-Rods by Interferometric Radar Measurements / D. Camassa, A. Castellano, A. Fraddosio et al. // Appl. Sci. 2021. no. V.11.
- [6] Estimation of Axial Load in Tie-Rods Using Experimental and Operational Modal Analysis / S. Campagnari, F. di Matteo, S. Manzoni et al. No. V.139(4). 2017.
- [7] Cescatti E., Porto F. D., Modena C. Axial Force Estimation in Historical Metal Tie-Rods: Methods, Influencing Parameters, and Laboratory Tests. No. V.13. 2019. P. 317–328.
- [8] Tullini N., Rebecchi G., Laudiero F. Reliability of the Tensile Force Identification in Ancient Tie-Rods Using One Flexural Mode Shape. No. V.13. 2019. P. 402–410.
- [9] Determination of Axial Force in Tie Rods of Historical Buildings Using the Model-Updating Technique / I. Duvnjak, S. Ereiz, D. Damjanovi'c et al. No. V.10. 2020.
- [10] Rainieri C., Aenlle M. The influence of parameter estimation error on the accuracy of a vibration based tensile load estimation technique. 2016. p. 1697–1710.
- [11] C. Resta G. Chellini A. D. F. Dynamic Assessment of Axial Load in Tie-Rods by Means of Acoustic Measurements. No. V.10. 2020.
- [12] Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. Москва, 1980. 408 с.
- [13] Крутиков О.В., Гершуни И.Ш. Определение усилий в канатах пролетного строения Ворошиловского моста в городе Ростов-на-Дону // Институт Гипростроймост. 2015. № 9. С. 107–111.

A.A. Azarov<sup>1</sup>, A.L. Popov<sup>1,2</sup>, D.A. Chelyubeev<sup>2</sup>

## SOME FEATURES OF FREQUENCY IDENTIFICATION OF AXIAL LOAD IN BEAM SPECIMENS

<sup>1</sup>Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia

**Abstract.** The evaluation of forces and joint stiffness is important for the inspection of rod elements. The existing evaluation methods are divided into static and dynamic methods. The paper considers a method of dynamic evaluation of longitudinal force in a fixed rod based on its bending vibration spectrum by comparing the experimentally recorded vibration frequencies with the theoretical frequency spectrum obtained from the Timoshenko beam model. The basin-hopping algorithm is used to harmonize the results of the theoretical model with the set of experimental frequencies. The peculiarity of multidirectional variation of the natural frequencies of bending vibrations during rod stretching in the region of weakly nonlinear stress-deformation dependence is revealed.

**Keywords:** Timoshenko beam, longitudinal force, acoustic spectrum, basin hopping algorithm, experimental verification.

### REFERENCES

- [1] Gentilini C., Marzani A., Mazzotti M. Nondestructive Characterization of Tie-Rods by Means of Dynamic Testing, Added Masses and Genetic Algorithms. No. V.332. 2013. P. 76–101.
- [2] Lagomarsino S., Calderini C. The Dynamical Identification of the Tensile Force in Ancient Tie-Rods. No. V.27. 2005. P. 846–856.
- [3] Collini L., Garziera R., Riabova K. Vibration Analysis for Monitoring of Ancient Tie-Rods. No. V.2017. 2017. P. 1–12.
- [4] Dynamical Assessment of the Work Conditions of Reinforcement Tie-Rods in Historical Masonry Structures / E. Coisson, L. Collini, L. Ferrari et al. No. V.13. 2019. P. 1–13.
- [5] Dynamic Identification of Tensile Force in Tie-Rods by Interferometric Radar Measurements / D. Camassa, A. Castellano, A. Fraddosio et al. // Appl. Sci. 2021. no. V.11.
- [6] Estimation of Axial Load in Tie-Rods Using Experimental and Operational Modal Analysis / S. Campagnari, F. di Matteo, S. Manzoni et al. No. V.139(4). 2017.
- [7] Cescatti E., Porto F. D., Modena C. Axial Force Estimation in Historical Metal Tie-Rods: Methods, Influencing Parameters, and Laboratory Tests. No. V.13. 2019. P. 317–328.
- [8] Tullini N., Rebecchi G., Laudiero F. Reliability of the Tensile Force Identification in Ancient Tie-Rods Using One Flexural Mode Shape. No. V.13. 2019. P. 402–410.
- [9] Determination of Axial Force in Tie Rods of Historical Buildings Using the Model-Updating Technique / I. Duvnjak, S. Ereiz, D. Damjanovi'c et al. No. V.10. 2020.
- [10] Rainieri C., Aenlle M. The influence of parameter estimation error on the accuracy of a vibration based tensile load estimation technique. 2016. p. 1697–1710.
- [11] Resta C., Chellini G., Falco A. D. Dynamic Assessment of Axial Load in Tie-Rods by Means of Acoustic Measurements. No. V.10. 2020.
- [12] Biderman V. L. Theory of mechanical vibrations. Moscow, 1980. 408 c. (in Russian).
- [13] Krutikov O.V., Gershuni I.SH. Determination of progress in the lifting ropes of the Voroshilovsky Bridge in the city of Rostov-on-Don // Institut Giprostrojmst. 2015. № 9. C. 107–111. (in Russian).

---

*Azarov Artur Alexandrovich*, Postgraduate student, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

*Popov Alexander Leonidovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia.

*Chelyubeyev Dmitriy Anatol'evich*, Leading engineer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia.