

Ю. В. Немировский<sup>1,2</sup>, С. В. Тихонов<sup>3</sup>

## ПРЕДЕЛЬНО-УПРУГИЙ ИЗГИБ $N$ -СЛОЙНОГО ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНОГО БЕТОННОГО СТЕРЖНЯ

<sup>1</sup> *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

<sup>3</sup> *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** В данной работе рассматривается задача изгиба многослойного стержня поперечными нагрузками при наличии зон упругого и нелинейно-неупругого деформирования, получены соотношения для определения границы раздела упругой и нелинейно-неупругой областей деформирования стержня. Получены численные расчеты для случаев совпадения и несовпадения нейтральной линии с осью стержня. Приведены численные расчеты предельных нагрузок: первой (деформация достигает значения предельной неупругой) и второй (деформация достигает значения деформации предразрушения).

**Ключевые слова:** бетонные стержни, аналитические решения, физическая нелинейность, упругость, поперечные нагрузки, нейтральная линия

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.008

УДК: 539.374

Рассмотрим  $n$ -слойный бетонный стержень поперечного сечения ( $n \geq 2$ ), симметричный относительно осей координат (рис. 1), где через  $h_i$  обозначена высота  $i$ -го слоя, причем будем считать  $h_0 = 0$ . Через  $b_i(z)$  обозначим функцию, описывающую толщину  $i$ -го слоя. Начало координат поместим в центр поперечного сечения стержня, ось  $Ox$  направим вдоль оси стержня, ось  $Oz$  вертикально вверх. На рисунке 1 цифрами 1, 2, ...,  $i$ , ...,  $n$  обозначены номера соответствующих слоев.

---

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2023

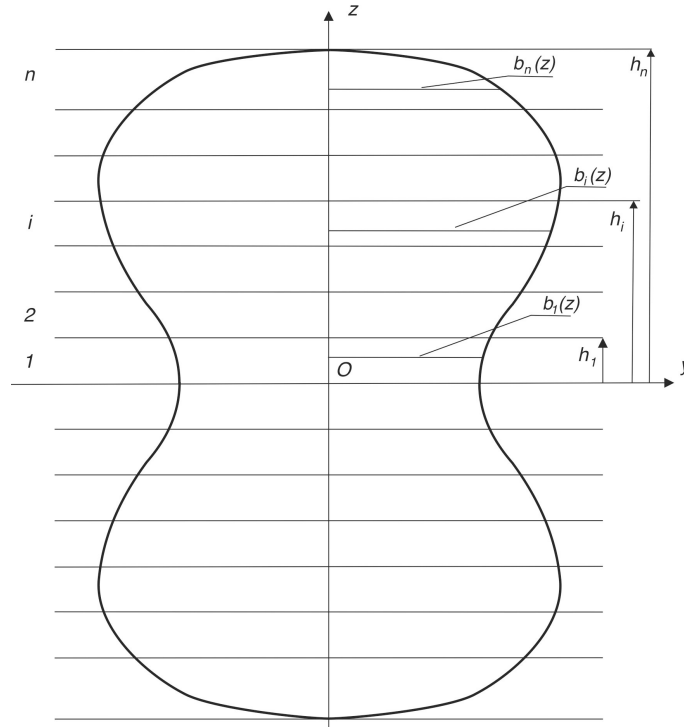
*Немировский Юрий Владимирович*

**e-mail:** nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

*Тихонов Сергей Владимирович*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.09.2023

Рис. 1. Поперечное сечение  $n$ -слойного бетонного стержня

Примем, что имеет место упругое деформирование при деформациях, не превышающих значений предельных упругих [1–5]  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{0i}^+$

$$\sigma_i^e = E_i \varepsilon, \quad (1)$$

а при превышающих значениях  $\varepsilon_{0i}^+ \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}^+$  имеет место нелинейное квази-упругое деформирование бетонного стержня, определяемое соотношениями

$$\sigma_i^n = A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2. \quad (2)$$

Перейдем к безразмерным величинам, используя соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{l} = 1, \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{l}, \quad \tilde{h}_i = \frac{h_i}{l}, \\ \tilde{q} &= q \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{Q} = Q \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{N} = N \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{M} = M \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{l}, \end{aligned} \quad (3)$$

где обезразмеривающие величины такие:  $\sigma_{1*}^-$  – предел прочности при сжатии бетона марки В10,  $l$  – длина стержня,  $q$  – величина распределенной нагрузки,  $Q$  – величина перерезывающей силы,  $M$  – величина изгибающего момента,  $N$  – продольного усилия,  $w$  – величина прогиба стержня.

Предельные упругие деформации и деформации предразрушения бетона существенно меньше при растяжении, чем при сжатии. Если нагрузки на стержень направлены вертикально вниз и стержень шарнирно оперт (рис. 2), то верхняя часть

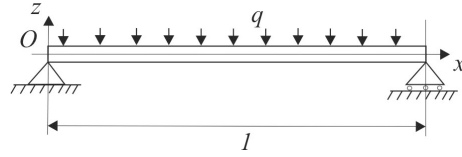


Рис. 2. Шарнирно-опертый стержень под действием равномерно-распределенной нагрузки

стержня будет находиться в области сжатия, а нижняя – в области растяжения. Из-за наличия разносопротивляемости бетона растяжению и сжатию, даже при наличии симметрии поперечного сечения, нейтральная линия не совпадает с осью стержня. Очевидно, что для положения нейтральной линии в данном поперечном сечении справедливо  $z_0(x) > 0$ . В общем случае нейтральная линия в зависимости от положения поперечного сечения может переходить из одного слоя в другой вдоль оси стержня.

В зависимости от физических параметров стержня и нагрузок в стержне возможны области упругого деформирования, нелинейного квазиупругого деформирования и области, где проходит граница раздела упругого и нелинейного квазиупругого деформирования. Введем следующие обозначения:

- $A_e$  – индексы слоев, соответствующих линейному упругому деформированию;
- $A_n$  – индексы слоев, соответствующих нелинейному квазиупругому деформированию;
- $A_z$  – индексы слоев, где проходит граница раздела упругого и нелинейного квазиупругого деформирования,

причем множества  $A_e, A_n, A_z$  должны удовлетворять соотношению

$$A_e \cup A_n \cup A_z = \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Положим, что имеет место одноосное напряженное состояние и справедливы классические кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява, тогда величины изгибающего момента  $M_y$  и продольного усилия  $N$  будут равны

$$M_y(x) = -2 \sum_{i \in A_e} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy - 2 \sum_{i \in A_n} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n z dy - \quad (4)$$

$$-2 \sum_{i \in A_z} \left( \int_{-h_i}^{z_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n z dy + \int_{z_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy \right) - 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy,$$

$$N(x) = -2 \sum_{i \in A_e} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy - 2 \sum_{i \in A_n} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n dy - \quad (5)$$

$$-2 \sum_{i \in A_z} \left( \int_{-h_i}^{z_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n dy + \int_{z_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy \right) - 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy.$$

Граница раздела упругого деформирования и нелинейного квазиупругого деформирования  $z_i(x)$  для всех индексов  $i$  из  $A_z$  должна удовлетворять соотношениям

$$-h_i \leq z_1(x) \leq -h_{i-1}. \quad (6)$$

Для деформации справедливы соотношения

$$\varepsilon(x, z) = z_0(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} - z \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \quad (7)$$

где  $w_0(x)$  – величина прогиба осевой линии стержня.

Задача, изображенная на рис. 2, является статически определимой, тогда значения изгибающих моментов и продольных усилий имеют вид

$$M_y(x) = q \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right), \quad N(x) = 0. \quad (8)$$

На границе раздела областей упругого и нелинейного квазиупругого деформирования  $z = z_i(x)$  деформация будет равна предельной упругой деформации для  $i$ -го слоя  $\varepsilon_{0i}^+$

$$\varepsilon_{0i}^+ = \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} - z_i(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2},$$

откуда можно получить выражение для второй производной прогиба

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \frac{\varepsilon_{0i}^+}{1 - z_i(x)}. \quad (9)$$

Если множество  $A_z$  состоит из  $k$  индексов, т.е.  $A_z = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ , тогда равенство (9) будет справедливо для всех элементов из  $A_z$ , т.е. имеем

$$\frac{\varepsilon_{0j_1}^+}{1 - z_{j_1}(x)} = \frac{\varepsilon_{0j_2}^+}{1 - z_{j_2}(x)} = \dots = \frac{\varepsilon_{0j_k}^+}{1 - z_{j_k}(x)}. \quad (10)$$

Из уравнений (5)-(8), (10) при известных множествах  $A_e$ ,  $A_n$ ,  $A_z$  можно определить неизвестные  $z_0$ ,  $z_{j_1}$ ,  $z_{j_2}$ , ...,  $z_{j_k}$ , которые полностью определяют распределение усилий и деформаций в стержне.

Для удобства возможную конфигурацию  $A_e$ ,  $A_n$ ,  $A_z$  будем обозначать в виде вектора  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , где для каждого номера слоя  $j = 1, \dots, n$  компонент вектора  $i_j$  может принимать значения 0, 1, 2, соответствующие слою с упругим деформированием, нелинейным квазиупругим и слою, где проходит граница раздела упругого и нелинейного квазиупругого деформирования. Из вектора  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  легко получить множества  $A_e$ ,  $A_n$ ,  $A_z$ . Для заданного количества слоев  $n$  количество возможных векторов  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  будет равно  $3^n$ .

Можно существенно сузить область поиска конфигураций  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , которые возможны при заданных физических параметрах стержня и нагрузке  $q$ , определив нижнюю и верхнюю границы нагрузок  $q_{min}$  и  $q_{max}$  соответственно.

В данной постановке задачи мы учитываем только деформирование на участке  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}$ , что соответствует восходящей ветви диаграммы растяжения бетона. Соответственно, функция  $\sigma(\varepsilon)$ , описывающая эту диаграмму, будет, исходя из вида диаграммы, монотонно возрастающей.

Рассмотрим  $j$ -й слой стержня, в котором находится граница раздела областей упругого и нелинейного деформирования. Тогда для данного слоя справедливо, согласно уравнению (7), неравенство

$$\varepsilon(x, -h_{j-1}) < \varepsilon(x, z_j) < \varepsilon(x, -h_j). \quad (11)$$

Из условия монотонного возрастания функции  $\sigma(\varepsilon)$  и (11) следует

$$\sigma(\varepsilon(x, -h_{j-1})) < \sigma(\varepsilon(x, z_j)) < \sigma(\varepsilon(x, -h_j)). \quad (12)$$

Из соотношений для изгибающего момента (5) и (12) следует, что наибольшее по модулю значение момента будет достигаться на верхней границе слоя. Тогда из (8) будет справедливо

$$|q(x, -h_{j-1})| < |q(x, z_j)| < |q(x, -h_j)|. \quad (13)$$

Для каждого  $i$ -го слоя в области упругого деформирования деформация находится в интервале  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{0i}^+$ , а для области нелинейного квазиупругого деформирования в интервале  $\varepsilon_{0i}^+ \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}^+$ .

Для заданного набора  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  в данном сечении  $x$  определим нижнюю границу нагрузки  $q_{min}$  как максимальное значение из минимальных нагрузок для каждого слоя

$$q_{min} = \min\{q_{min,1}, q_{min,2}, \dots, q_{min,n}\}. \quad (14)$$

Значение нагрузки  $q_{min,j}$  из соотношения (14) определим для заданного набора  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  согласно алгоритму:

- найдем значение кривизны  $\frac{d^2 w_0(x)}{dx}$  из соотношения (7)
  - если слой  $j$  находится в области упругого деформирования (значение параметра конфигурации  $i_j = 0$ ) или нахождения границы раздела  $z_j$  в указанной области (значение параметра конфигурации  $i_j = 2$ ) при значении деформации, равной  $\varepsilon = 0$  и  $z = -h_{j-1}$ ;
  - если слой  $j$  находится в области нелинейного квазиупругого деформирования (значение параметра конфигурации  $i_j = 1$ ) при значении деформации, равной  $\varepsilon = \varepsilon_{0j}^+$  и  $z = -h_{j-1}$ ;
- определим значения  $z_0, q = q_{min}$  из системы уравнений (4), (5), (7), (8).

Аналогично находится значение нагрузки  $q_{max}$

$$q_{max} = \max\{q_{max,1}, q_{max,2}, \dots, q_{max,n}\}. \quad (15)$$

Значение нагрузки  $q_{max,j}$  из соотношения (15) определим для заданного набора  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  согласно алгоритму:

- найдем значение кривизны  $\frac{d^2 w_0(x)}{dx}$  из соотношения (7)
  - если слой  $j$  находится в области упругого деформирования (значение параметра конфигурации  $i_j = 0$ ) при значении деформации, равной  $\varepsilon = \varepsilon_{0j}^+$  и  $z = -h_j$ ;
  - если слой  $j$  находится в области нелинейного квазиупругого деформирования или нахождения границы раздела  $z_j$  в указанной области (значение параметра конфигурации  $i_j = 1$  или  $i_j = 2$ ) при значении деформации, равной  $\varepsilon = \varepsilon_{*j}^+$  и  $z = -h_j$ ;
- определим значения  $z_0, q = q_{max}$  из системы уравнений (4), (5), (7), (8).

Для исключения заведомо недостижимых предельных нагрузок проверим, чтобы деформация находилась при заданной предельной нагрузке в случае, если слой в области упругого деформирования, в интервале

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{0k}^+, \quad (16)$$

а для слоя в области нелинейного деформирования

$$\varepsilon_{0k}^+ \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{*k}^+, \quad (17)$$

при наличии границы раздела областей в интервале

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{*k}^+, \quad (18)$$

причем указанные неравенства должны выполняться для всех слоев  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Подробно рассмотрим алгоритм проверки соответствия деформации неравенствам (16), (17) для нагрузки  $q_{min,j}$  из (14).

Если  $q_{min,j}$  определяется для  $j$ -го слоя, который находится в области упругого деформирования ( $i_j = 0$ ) или области, содержащей границу раздела областей ( $i_j = 2$ ), тогда, так как при определении указанной нагрузки, будет использовано предположение  $\varepsilon = 0$  при  $z = -h_{j-1}$ , откуда из соотношения (7) следует, что  $\varepsilon = 0$  вдоль всей толщины стержня в заданном сечении. Равенство  $\varepsilon = 0$  для всех слоев  $k = 1, 2, \dots, n$  возможно только если ни один из слоев не находится в области нелинейного квазиупругого деформирования

$$i_1 \neq 1, i_2 \neq 1, i_3 \neq 1, \dots, i_n \neq 1. \quad (19)$$

В случае нарушения равенства (19) для данного набора  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  соотношение  $q_j$  исключаем из (14).

Если  $q_{min,j}$  определяется для  $j$ -го слоя, который находится в области нелинейного квазиупругого деформирования ( $i_j = 1$ ), тогда, так как при определении указанной нагрузки было использовано предположение  $\varepsilon = \varepsilon_{0j}^+$  при  $z = -h_{j-1}$ , откуда из соотношения (7) следует

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{\varepsilon_{0j}^+}{z_0 + h_{j-1}},$$

то при известной кривизне можно получить значение деформации вдоль всего сечения из (7)

$$\varepsilon = \frac{z_0 - z}{z_0 + h_{j-1}} \varepsilon_{0j}^+. \quad (20)$$

Соответственно, если рассматриваемая область  $i_k$  находится в области упругого деформирования ( $i_k = 0$ ), необходимо, чтобы наибольшее по модулю значение деформации в  $k$ -ом слое (достигается на верхней границе слоя  $z = -h_k$ ) было меньше предельно-упругого значения для данного слоя  $\varepsilon = \varepsilon_{0k}^+$ , т. е.

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_{j-1}} \varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при} \quad i_k = 0. \quad (21)$$

Если рассматриваемая область  $i_k$  находится в области нелинейного квазиупругого деформирования ( $i_k = 1$ ), необходимо, чтобы наименьшее по модулю значение деформации в  $k$ -ом слое (достигается на нижней границе слоя  $z = -h_{k-1}$ ) было больше предельно-упругого значения для данного слоя  $\varepsilon = \varepsilon_{0k}^+$ , т. е.

$$\frac{z_0 + h_{k-1}}{z_0 + h_{j-1}} \varepsilon_{0j}^+ \geq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при} \quad i_k = 1, \quad (22)$$

а наибольшее по модулю значение деформации (достигается на верхней границе слоя  $z = -h_k$ ) было меньше значения предельного предразрушения для данного слоя

$\varepsilon = \varepsilon_{*k}^+$ , причем указанное должно быть справедливо, если рассматриваемая область находится в области наличия границы раздела областей ( $i_k = 2$ )

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_{j-1}} \varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon_{*k}^+ \quad \text{при } i_k = 1, 2. \quad (23)$$

Аналогично определяются значения  $q_{max,j}$  из соотношения (15).

Если  $q_{max,j}$  определяется для  $j$ -го слоя, который находится в области нелинейного квазиупругого деформирования ( $i_j = 1$ ) или области, содержащей границу раздела областей ( $i_j = 2$ ), тогда, так как при определении указанной нагрузки было использовано предположение  $\varepsilon = \varepsilon_{*k}^+$  при  $z = -h_j$ , то получим

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{\varepsilon_{*j}^+}{z_0 + h_j},$$

тогда при известной кривизне можно получить значение деформации вдоль всего сечения из (7)

$$\varepsilon = \frac{z_0 - z}{z_0 + h_j} \varepsilon_{*j}^+. \quad (24)$$

Соответственно необходимо, чтобы найденное значение деформации удовлетворяло неравенствам на верхней грани слоев для всех  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_j} \varepsilon_{*j}^+ \leq \varepsilon_{*k}^+ \quad \text{при } i_k = 1, 2, \quad (25)$$

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_j} \varepsilon_{*j}^+ \leq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при } i_k = 0, \quad (26)$$

а на нижней грани соотношениям

$$\frac{z_0 + h_{k-1}}{z_0 + h_j} \varepsilon_{*j}^+ \geq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при } i_k = 1, 2. \quad (27)$$

Если  $q_{max,j}$  определяется для  $j$ -го слоя, который находится в области упругого деформирования ( $i_j = 0$ ), тогда, так как при определении указанной нагрузки было использовано предположение  $\varepsilon = \varepsilon_{0k}^+$  при  $z = -h_j$ , то получим

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{\varepsilon_{0j}^+}{z_0 + h_j},$$

тогда при известной кривизне можно получить значение деформации вдоль всего сечения из (7)

$$\varepsilon = \frac{z_0 - z}{z_0 + h_j} \varepsilon_{0j}^+. \quad (28)$$

Соответственно необходимо, чтобы найденное значение деформации удовлетворяло неравенствам на верхней грани слоев для всех  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_j} \varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon_{*k}^+ \quad \text{при } i_k = 1, 2, \quad (29)$$

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_j} \varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при } i_k = 0, \quad (30)$$

а на нижней грани – соотношениям

$$\frac{z_0 + h_{k-1}}{z_0 + h_j} \varepsilon_{0j}^+ \geq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при} \quad i_k = 1, 2. \quad (31)$$

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность многослойных бетонных стержней. Чебоксары: Изд-во Чуваш-го ун-та, 2022. 180 с.
- [2] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [3] Мищенко А. В., Немировский Ю. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.
- [4] Немировский Ю. В., Батулин А. А. Метод расчета деформативности и прочности одноставровых и двуставровых железобетонных стержней // Известия вузов. Строительство. 2015. № 10. С. 82–93.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение предельных нагрузок при поперечном изгибе многослойных предельно-упругих бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1(55). С. 86–101. DOI: 10.37972/chgru.2023.55.1.0010.



Yu. V. Nemirovskii<sup>1,2</sup>, S. V. Tikhonov<sup>3</sup>

**ON DETERMINING THE POSITION OF THE NEUTRAL LINE IN THE CASE OF EXTREMELY ELASTIC BENDING OF MULTILAYER PHYSICALLY NONLINEAR CONCRETE RODS**

<sup>1</sup>*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

<sup>2</sup>*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

<sup>3</sup>*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** This paper considers the problem of bending a multilayer rod under transverse loads in the presence of zones of elastic and nonlinear-inelastic deformation, and relations are obtained to determine the interface between the elastic and nonlinear-inelastic deformation regions of the rod. The resulting numerical calculations for cases of coincidence and non-coincidence of the neutral line with the axis of the rod. Numerical calculations of the limiting loads are presented: the first (the deformation reaches the limiting inelastic value) and the second (the deformation reaches the value of the pre-fracture strain).

**Keywords:** concrete rods, analytical solutions, physical nonlinearity, elasticity, transverse loads, neutral line

**REFERENCES**

- [1] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Load-bearing capacity of multilayer concrete bars. Cheboksary: Publishing house of Chuvash University, 2022. 180 p.
- [2] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // Bulletin of Belgorod State Technological University named after. V.G. Shukhova. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [3] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V., Vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered rod systems. Novosibirsk: NSASU, 2004. 488 p.
- [4] Nemirovsky Y. V., Baturin A. A. Method for calculating the deformability and strength of single-T and I-beam reinforced concrete rods // News of universities. Construction. 2015. no. 10. P. 82–93.
- [5] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Determination of ultimate loads during transverse bending of multilayer extremely elastic concrete rods // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2023. no. 1(55). P. 86–101. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.0010.
- [6] Nemirovsky Y. V. Ultimate deformation of hybrid reinforced concrete structures // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2018. no. 3(37). P. 26–37.

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Professor, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.  
*Tikhonov Sergey Vladimirovich*, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.