

Е. В. Мурашкин

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ФИГУР НАЯ В АСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ ДЕМИТРОПНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГОСТИ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В настоящей работе процедура построения двумерных фигур Ная модифицируется для асимметричных матриц и применяется для представления определяющих псевдотензоров демитропных микрополярных упругих континуумов. Указанные матричные представления используются для упрощения тензорной записи уравнений анизотропных тел. Метод матричного представления Ная позволяет изобразить тензоры и псевдотензоры четвертого и второго рангов в виде своеобразных двумерных фигур. Получена матричная форма асимметричных определяющих уравнений демитропного микрополярного упругого тела. Основное изложение статьи проводится в декартовой прямоугольной системе координат в терминах инвариантного элемента объема.

**Ключевые слова:** псевдотензор, микрополярная среда, упругий потенциал, определяющий псевдотензор, демитропный микрополярный континуум, фигура Ная, матричное представление

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.009

УДК: 539.374

**1. Введение и предварительные сведения** В современной инженерной практике все большее применение находят конструкционные метаматериалы и биокompозиты, обладающие сложной микроструктурой [1–3]. Микро- и наноструктурные состояния таких материалов зачастую реагируют на изменение ориентации координатного базиса трехмерного пространства. Математическое моделирование указанных метаматериалов требует привлечения аппарата микрополярной термомеханики. Классические модели микрополярных тел описаны в следующих публикациях [4–8]. Фундаментальным определяющим параметром характеризующим микро- и наноструктурные состояния материала в подобных теориях является характерная микродлина

---

© Мурашкин Е. В. 2023

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262). <https://rscf.ru/project/23-21-00262/>

Поступила 20.10.2023

$L^1$  [9, 10, 17], связанная с характерным размером микроструктуры (гранулы, волокна, соты, диполи жидких кристаллов, полимерные молекулы и т.д.). При этом в стандартных длинах: для макромеханики следует положить  $L \sim 1$ м, для микромеханики —  $L \sim 10^{-6}$ м, а для наномеханики —  $L \sim 10^{-9}$ м. Важно отметить, что характерная микродлина микрополярной теории  $L$  — важнейший из модулей, которому может быть естественным образом приписан алгебраический целый нечетный вес, т.е. ее можно трактовать как определяющий псевдоскаляр, реагирующий на изменение ориентации координатного базиса. Основные сведения, касающиеся алгебры и анализа псевдотензоров можно найти в некоторых книгах по тензорному исчислению [18–25].

Вывод уравнений динамики упругого поведения демитропных микрополярных упругих тел основывается на квадратичных формах микрополярных упругих потенциалов силовых и моментных напряжений [6–10, 17, 26–29]. Квадратичные представления таких потенциалов, в общем анизотропном случае, требуют привлечения формализма псевдотензорной алгебры и анализа [11, 12, 16, 19–25]. Компоненты определяющих псевдотензоров демитропных потенциалов силовых и моментных напряжений проявляют чувствительность к преобразованиям, меняющим ориентацию координатного базиса трехмерного пространства. Как было показано в работах [30–32] объемные плотности экстенсивных термодинамических параметров, в том числе, объемная плотность упругого потенциала оказывается псевдоинвариантом, алгебраический вес которого зависит от псевдотензорного веса элементарного объема. В настоящей статье изложение будет проведено в терминах инвариантного элемента объема. В общем анизотропном случае упругий потенциал задается суммой произведений сбалансированной в соответствии с правилом баланса алгебраических весов.

Линейное анизотропное микрополярное тело, характеризующееся 171 определяющими постоянными, может быть редуцировано с помощью специальных координатных представлений [26, 27, 33] к демитропному, характеризующемуся девятью определяющими псевдоскалярами. В конвенциональном случае, такими псевдоскалярами будут: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная микродлина, и 6 псевдоскаляров, не имеющих физической размерности. Характерная микродлина оказывается псевдоскаляром отрицательного веса  $-1$  и проявляет чувствительность к отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

В настоящей работе метод матричного представления Ная [34–38] модифицируется и применяется к асимметричным тензорам и псевдотензорам четвертого и второго рангов. Построены фигуры Ная для асимметричной модели демитропного микрополярного тела. Получена матричная форма асимметричных определяющих уравнений демитропного микрополярного упругого тела.

**2. Микрополярный упругий потенциал силовых и моментных напряжений.** Рассмотрим трехмерное Евклидово пространство с заданной в нем декартовой прямоугольной системой координат  $x_i$ . Зададим микрополярный упругий потенциал  $\mathcal{U}$ , рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема  $d\tau$ ,

<sup>1</sup>Существует небольшое количество литературных источников, которые используют характерную микродлину при построении микрополярной теории. К таким работам относятся, например, публикации Нейбера [9, 10], в которых характерная микродлина обозначалась  $l$ . Определяющая постоянная  $l$  отличается от  $L$ , используемой в работах [11–14], и связана с ней прямой пропорциональной зависимостью, что было продемонстрировано в работах [15, 16]. Последнее обстоятельство подтверждает возможность неоднозначности при математическом описании микро- и наномасштабов.

с естественными псевдотензорными асимметричными аргументами в виде

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{sm}, \kappa_{sm}^{[+1]}), \quad (1)$$

где  $\epsilon_{sm}$  — асимметричный тензор деформации;  $\kappa_{sm}^{[+1]}$  — асимметричный псевдотензор деформации изгиба–кручения. Упругий потенциал в случае использования инвариантного элемента объема является абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим ни от каких преобразований трехмерного пространства.

Определяющие уравнения микрополярного континуума в этом случае примут вид

$$t_{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \mu_{ik}^{[-1]} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \kappa_{ik}^{[+1]}}. \quad (2)$$

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела энергетическая форма в произвольной системе координат можно принять в виде:

$$2\mathcal{U} = H_1^{[+1]} \epsilon_{ism} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{[-2]} \kappa_{ism}^{[+1]} \kappa_{is}^{[+1]} \kappa_{lm}^{[-1]} + H_3^{[-1]} \epsilon_{ism} \epsilon_s \kappa_{lm}^{[+1]}. \quad (3)$$

Отметим, что единственным определяющим псевдотензором четвертого ранга компоненты которого оказываются чувствительными к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства является определяющий псевдотензор  $H_3^{[-1]}$  отрицательного нечетного алгебраического веса  $-1$ .

Воспользовавшись определяющими соотношениями (2), получим

$$\begin{aligned} t_{is} &= H_1^{[+1]} \epsilon_{ism} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} H_3^{[-1]} \kappa_{ism}^{[+1]} \kappa_{lm}^{[-1]}, \\ \mu_{is}^{[-1]} &= H_2^{[-2]} \kappa_{ism}^{[+1]} \kappa_{lm}^{[-1]} + \frac{1}{2} H_3^{[-1]} \kappa_{lms} \epsilon_{lm}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для определяющих демитропных тензоров и псевдотензоров координатные представления [33] инвариантные относительно группы вращений получаются в форме [27]

$$\begin{aligned} H_1^{[+1]} &= a g_{is} g_{lm} + b g_{il} g_{sm} + c g_{im} g_{sl}, \\ H_2^{[-2]} &= \frac{a}{2} g_{is} g_{lm} + \frac{b}{2} g_{il} g_{sm} + \frac{c}{2} g_{im} g_{sl}, \\ H_3^{[-1]} &= \frac{a}{3} g_{is} g_{lm} + \frac{b}{3} g_{il} g_{sm} + \frac{c}{3} g_{im} g_{sl}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\frac{[g]}{a}$ ,  $\frac{[g]}{b}$ ,  $\frac{[g]}{c}$ , ( $a = 1, 2, 3; g = 0, -1, -2$ ) — девять определяющих псевдоскаляров демитропного микрополярного упругого тела. “Метаиндекс”  $\mathbf{a}$  — нумерует определяющие псевдоскаляры. С точки зрения тензорной алгебры  $\frac{[g]}{a}$ ,  $\frac{[g]}{b}$ ,  $\frac{[g]}{c}$ , как минимум, являются демитропными (демитропными) инвариантами.

Подставив координатные представления (5) в определяющие соотношения (2), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{is} = (a g_{is} g_{lm} + b g_{il} g_{sm} + c g_{im} g_{sl}) \epsilon_{lm} + \\ \quad + \frac{1}{2} (a^{[-1]} g_{is} g_{lm} + b^{[-1]} g_{il} g_{sm} + c^{[-1]} g_{im} g_{sl}) \kappa_{lm}^{[+1]}, \\ \mu^{[-1]}_{is} = (a^{[-2]} g_{is} g_{lm} + b^{[-2]} g_{il} g_{sm} + c^{[-2]} g_{im} g_{sl}) \kappa_{lm}^{[+1]} + \\ \quad + \frac{1}{2} (a^{[-1]} g_{is} g_{lm} + b^{[-1]} g_{il} g_{sm} + c^{[-1]} g_{im} g_{sl}) \epsilon_{lm}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Вместо определяющих псевдоскаляров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  можно перейти к конвенциональным определяющим псевдоскалярам, таким как:  $G$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $L$  — характерная микродлина;  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  — не имеющие физической размерности скаляры (см. [17]). В этом случае характерная микродлина  $L$  будет псевдоскаляром отрицательного веса  $-1$ .

в итоге получим

$$\begin{aligned} a_1 &= 2G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, & b_1 &= G(1 + c_1), & c_1 &= G(1 - c_1), \\ a_2^{[-2]} &= 2G L^{[-1][ -1]} c_3, & b_2^{[-2]} &= G L^{[-1][ -1]} (1 + c_2), \\ c_2^{[-2]} &= G L^{[-1][ -1]} (1 - c_2), & a_3^{[-1]} &= 2G L^{[-1]} c_4, \\ b_3^{[-1]} &= G L^{[-1]} (c_5 - c_6), & c_3^{[-1]} &= G L^{[-1]} (c_5 + c_6). \end{aligned} \quad (7)$$

Вычислим компоненты определяющих псевдотензоров (5) в декартовой системе координат. Для демитропного упругого тела ненулевыми компонентами будут:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{1111} &= \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{2222} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{3333} = \frac{[g]}{a} + \frac{[g]}{a} + \frac{[g]}{a}, \\ \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{1122} &= \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{2211} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{1133} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{3311} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{2233} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{3322} = \frac{[g]}{a}, \\ \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{1221} &= \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{2112} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{1331} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{3113} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{2332} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{3223} = \frac{[g]}{a}, \\ \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{1212} &= \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{2121} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{1313} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{3131} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{2323} = \mathcal{H}_a^{[g]}{}_{3232} = \frac{[g]}{a}. \end{aligned} \quad (8)$$

Оставшиеся 60 компонент в каждом из определяющих псевдотензоров, не указанные в (8), будут равны нулю.

**3. Фигуры Ная для определяющих псевдотензоров демитропного континуума.** Для компактности записи тензорных уравнений иногда выгодно использовать матричные обозначения [34, pp. 113–115], которые позволяют представить компоненты тензора четвертого ранга элементами матрицы, уменьшив количество

пары тензорных индексов $(is, lm)$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
матричные индексы $(K, N)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Таблица 1. Соответствие пар тензорных и матричных индексов. (Correspondence of pairs of tensor and matrix indices).

индексов с 4 до 2, а тензоры второго ранга — векторами. Однако, необходимо помнить, что двухиндексные экстенсивы, соответствующие тензорам четвертого ранга, не преобразуются по тензорным правилам.

Заменяем компоненты асимметричного тензора деформаций согласно следующей схеме

$$\epsilon_{is} \rightarrow \epsilon_K = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_4 & \epsilon_5 \\ \epsilon_7 & \epsilon_2 & \epsilon_6 \\ \epsilon_8 & \epsilon_9 & \epsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Аналогичным образом представим тензор изгиба-кручения:

$$\kappa_{is} \rightarrow \kappa_K = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_4 & \kappa_5 \\ \kappa_7 & \kappa_2 & \kappa_6 \\ \kappa_8 & \kappa_9 & \kappa_3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Для тензоров силовых и моментных напряжений введем следующую замену

$$t_{is} \rightarrow t_K = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} t_1 & t_4 & t_5 \\ t_7 & t_2 & t_6 \\ t_8 & t_9 & t_3 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mu_{is} \rightarrow \mu_K = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_4 & \mu_5 \\ \mu_7 & \mu_2 & \mu_6 \\ \mu_8 & \mu_9 & \mu_3 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Преобразование определяющих тензоров  $\mathcal{H}_a^{islm}$  ( $a = 1, 2, 3$ ) в (13) к виду двумерных матриц будем производить заменой индексов согласно таблице 1. Метаиндексы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{s}$  не являются тензорными индексами и нумеруют определяющие тензоры.

В итоге, матричная форма определяющих уравнений демитропного микрополярного упругого тела принимает вид

$$\begin{cases} t_K = \mathcal{H}_1^{KN} \epsilon_N + \frac{1}{2} \mathcal{H}_3^{KN} \kappa_N, \\ \mu_K = \mathcal{H}_2^{KN} \kappa_N + \frac{1}{2} \mathcal{H}_3^{KN} \epsilon_N. \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим матрицу  $\mathcal{H}_1^{KN}$ , из первого слагаемого в квадратичной форме упругого потенциала напряжений (3). Компоненты определяющей матрицы  $\mathcal{H}_1^{KN}$  связаны с

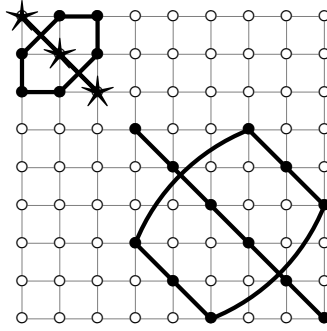


Рис. 1. Двумерная фигура Ная матрицы определяющего псевдотензора  $\mathcal{H}_a^{[g]KN}$  демитропного микрополярного упругого тела.  $\circ$  — нулевые компоненты,  $\bullet$  — компоненты отличные от нуля,  $\star = (\mathcal{H}_a^{[g]12} + \mathcal{H}_a^{[g]44} + \mathcal{H}_a^{[g]47})$ , жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

определяющими постоянными  $A_a$  при учете (5) следующим образом

$$\mathcal{H}_a^{[g]KN} = \begin{bmatrix} \frac{[g]a}{a} + \frac{[g]b}{a} + \frac{[g]c}{a} & \frac{[g]a}{a} & \frac{[g]a}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{[g]a}{a} & \frac{[g]a}{a} + \frac{[g]b}{a} + \frac{[g]c}{a} & \frac{[g]a}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{[g]a}{a} & \frac{[g]a}{a} & \frac{[g]a}{a} + \frac{[g]b}{a} + \frac{[g]c}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{[g]c}{a} & 0 & 0 & \frac{[g]b}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[g]c}{a} & 0 & 0 & \frac{[g]b}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[g]c}{a} & 0 & 0 & \frac{[g]b}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{[g]b}{a} & 0 & 0 & \frac{[g]c}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[g]b}{a} & 0 & 0 & \frac{[g]c}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[g]b}{a} & 0 & 0 & \frac{[g]c}{a} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Отметим, что матрица  $\mathcal{H}_a^{[g]KN}$  симметрична относительно главной диагонали. Результат построения фигуры Ная для определяющего демитропного псевдотензора представлен на рис. 1.

Двумерная фигура Ная для демитропного микрополярного упругого тела может быть получена путем объединения элементарных фигур для определяющих матриц (см. рис. 1). На рис. 2 представлена фигура Ная для определяющих уравнений демитропного микрополярного упругого тела. Пересечение жирных линий на рисунках не говорит о связи соответствующих компонент определяющих матриц.

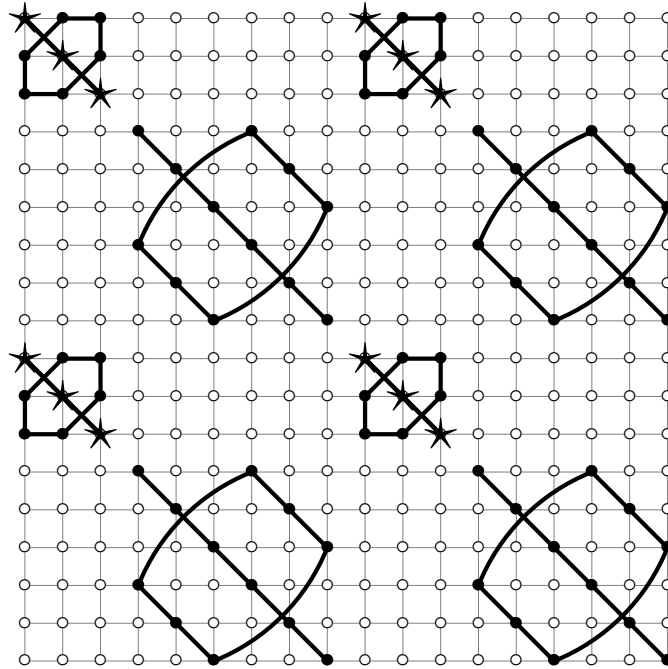


Рис. 2. Двумерная фигура Ная демитропного микрополярного упругого тела.  $\circ$  — нулевые компоненты,  $\bullet$  — компоненты отличные от нуля,  $\star = (\mathcal{H}_{12} + \mathcal{H}_{44} + \mathcal{H}_{47})$ , жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

**4. Заключение** В работе рассматривается процедура построения двумерных фигур Ная, адаптированная к представлению асимметричных определяющих тензоров и псевдотензоров.

- (1) Приведена псевдотензорная форма упругого потенциала и определяющих уравнений в терминах асимметричных тензоров и псевдотензоров.
- (2) Общая анизотропная форма микрополярного упругого потенциала напряжений редуцирована к демитропной форме с помощью специальных координатных представлений.
- (3) Получена матричная форма определяющих уравнений демитропного микрополярного упругого тела.
- (4) Построены двумерные фигуры Ная для асимметричных определяющих тензоров и псевдотензоров демитропного упругого микрополярного тела.
- (5) Получена диаграмма Ная, графически представляющая демитропное микрополярное упругое тело и связями между компонентами асимметричных определяющих тензоров и псевдотензоров.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] DeValck T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // *Phys. Status Solidi (B)*. 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.
- [2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.

- [3] Lakes R. Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909.
- [5] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [6] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.
- [7] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [8] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. doi: 10.1007/BF01176729.
- [10] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. doi: 10.1007/978-3-662-29364-5\_16.
- [11] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. URL: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
- [12] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [13] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. № 4. С. 16–24. doi: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [14] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Т. 58, № 3. С. 802–813. doi: 10.3103/s0025654423700127.
- [15] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2023. № 1(55). с. 110–121. doi: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [16] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. doi:10.14498/vsgtu1799.
- [17] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [18] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // *Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie* / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [19] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [20] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Trans. Am. Math. Society*. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [21] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
- [22] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
- [23] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [24] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [25] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007.
- [26] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2022. № 2(52). с. 106–115. doi: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.



- [27] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. doi: 10.37972/chgru.2022.52.2.013.
- [28] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3(53). с. 86–100. doi: 10.37972/chgru.2022.53.3.010.
- [29] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4(54). с. 108–115. doi: 10.37972/chgru.2022.54.4.009.
- [30] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Т. 58, № 9. С. ???–???
- [31] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2023. Т. 165, № 4. С. ???–???
- [32] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3(57). с. 100–111. doi: 10.37972/chgru.2023.57.3.010.
- [33] Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [34] Nye J. F. *Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices*. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+xv p.
- [35] Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford: Clarendon Press, 1957. 116+vi p.
- [36] Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Fachmedien, Wiesbaden: Springer, 1966. 116+vi p.
- [37] Standards on Piezoelectric Crystals // *Proceedings of the I.R.E.* New York: IRE, 1960. p. 18.
- [38] Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // *Int. J. Engng Sci.* 2021. Vol. 31, no. 4. P. 617–635.

*E. V. Murashkin*

## ON A METHOD OF CONSTRUCTING NYE FIGURES FOR ASYMMETRIC THEORIES OF MICROPOLAR ELASTICITY

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** In this work, the process of constructing two-dimensional figures is modified for asymmetric matrices and is used to represent the defining pseudotensors of demitropic micropolar elastic continua. The specified matrix representations are used to simplify the tensor representation of the material of anisotropic bodies. This method allows us to represent tensors and pseudotensors of the fourth and second ranks in the form of peculiar two-dimensional figures. A matrix form is obtained that defines the basis of a demitropic micropolar elastic body. The main presentation of the article is carried out in a Cartesian rectangular coordinate system.

**Keywords:** pseudotensor, micropolar medium, elastic potential, defining pseudotensor, demitropic micropolar continuum, Nye figure, matrix representation

### REFERENCES

- [1] DeValck T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // *Phys. Status Solidi (B)*. 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.
- [2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.
- [3] Lakes R. *Composites and metamaterials*. Singapore: World Scientific, 2020.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909.
- [5] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [6] Nowacki W. *Theory of micropolar elasticity*. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.
- [7] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [8] Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. doi: 10.1007/BF01176729.
- [10] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. doi: 10.1007/978-3-662-29364-5\_16.
- [11] Radayev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Problems of strength and plasticity*. 2020. T. 82, № 4. C. 399–412. URL: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [13] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the theory of linear hemitropic micropolar media // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2020. no. 4. P. 16–24. doi:10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [14] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. T. 58, № 3. C. 802–813. doi: 10.3103/s0025654423700127.
- [15] Murashkin E. V. On the relations between micropolar defining parameters of thermodynamic state potentials // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im.*

---

*Murashkin Evgenii Valeryevich*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

- IYa Yakovleva. *Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 1(55). p. 110–121. doi:10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [16] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. doi:10.14498/vsgtu1799.
- [17] Radayev Y. N. The rule of multipliers in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2018. Vol. 22. P. 504–517. doi:10.14498/vsgtu1635. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [18] Truesdell C., Toupin R. *The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [19] Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Gröningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
- [20] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Trans. Am. Math. Society*. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [21] Veblen O. *Invariants of quadratic differential forms*. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
- [22] Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
- [23] Synge J. L., Schild A. *Tensor calculus*. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [24] Sokolnikoff I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
- [25] Das A. J. *Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007.
- [26] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. T. 58, № 9. С. ???–???
- [27] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2023. T. 165, № 4. С. ???–???
- [28] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). p. 106–115. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). P. 118–127. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
- [30] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the two main natural forms of the potential of asymmetric tensors of force and moment stresses in the mechanics of hemitropic solids // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. № 3(53). с. 86–100. doi: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
- [31] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. № 4(54). с. 108–115. doi: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
- [32] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. № 3(57). с. 100–111. doi: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [33] Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [34] Nye J. F. *Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices*. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+*xv* p.
- [35] Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford: Clarendon Press, 1957. 116+*vi* p.
- [36] Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Fachmedien, Wiesbaden: Springer, 1966. 116+*vi* p.
- [37] Standards on Piezoelectric Crystals // *Proceedings of the I.R.E.* New York: IRE, 1960. p. 18.

- [38] Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // Int. J. Engng Sci. 2021. Vol. 31, no. 4. P. 617–635.