Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3 (57). С. 112–128

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

К ПОЛИВАРИАНТНОСТИ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНОГО ТЕЛА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Статья посвящена исследованию поливариантности динамических уравнений теории полуизотропной микрополярной термоупругости. Рассмотрены и проанализированы различные варианты присвоения целых весов полевым переменным с последующим детерминированием алгебраических весов псевдовекторных уравнений динамики полуизотропного термоупругого тела. Этих целей удается достичь, используя псевдоинвариантые элементы объема и площади нечетных целых весов. Кроме того, показано, что нечетный вес может быть приписан псевдовектору спинорных перемещений. В результате чего, тепловой поток, тензор силовых напряжений, массовая плотность, теплоемкость, модуль сдвига также оказываются псевдотензорными величинами нечетного веса, т.е. чувствительны к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Обсуждается постулат абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры. Получены различные варианты связанной системы дифференциальных уравнений динамики и уравнения теплопроводности для полуизотропного микрополярного термоупругого тела. Обсуждаются вопросы взаимовлияния алгебраических весов определяющих псевдоскаляров с целью учета их реакции на преобразования трехмерного пространства, меняющих его ориентацию на противоположную.

Ключевые слова: поливариантность, наномасштаб, микромасштаб, наноструктурное состояние, характерная микродлина, модуль сдвига, теплопроводность, микрополярность, тензорный элемент объема, псевдовектор потока тепла, псевдотензор, зеркальное отражение, полуизотропное тело, гиротропное тело

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010

УДК: 539.374

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2023
Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”

Поступила 20.09.2023

1. Введение и предварительные сведения. Конструкционные метаматериалы и биокомпозиты обладают сложной микроструктурой [1–3]. Зачастую микро- и наноструктурные состояния таких материалов оказываются чувствительными к преобразованиям трехмерного пространства, меняющим его ориентацию на противоположную (с левой на правую, и, наоборот, с правой на левую). Моделирование термомеханического отклика указанных материалов следует выполнять средствами теорий микрополярной термомеханики [4–8]. Фундаментальным определяющим параметром характеризующим микроструктурные особенности материала в таких теориях является характерная микродлина L[2] [9,10,17], связанная с характерным размером микроструктуры (гранулы, волокна, соты, диполи жидких кристаллов, полимерные молекулы и т.д.). При этом в стандартных длинах: для макромеханики следует положить $L \sim 1$м, для микромеханики — $L \sim 10^{-6}$м, а для наномеханики — $L \sim 10^{-9}$м. Важно отметить, что характерная микродлина микрополярной теории L — важнейший из модулей, которому может быть естественным образом приписан алгебраический вес, т.е. ее можно трактовать как определяющий псевдоскаляр, реагирующий на изменение ориентации координатного базиса. Основные сведения, касающиеся алгебры и анализа псевдотензоров можно найти в некоторых книгах по тензорному исчислению [18–25].

Отметим исключительную важность порядка малости характерной микродлины. Связанная система дифференциальных уравнений в частных производных микрополярной термоупругости состоит из трех уравнений: двух псевдовекторных уравнений динамики для силовых и моментных напряжений и уравнения теплопроводности. При формулировке указанных дифференциальных уравнений в терминах трансляционных и спинорных перемещений нетрудно заметить, что уравнение для моментов имеет порядок малости L^2, в то время как уравнение для силовых напряжений — L^0. Отмеченное следует учитывать при численных расчетах, т.к. в случае $L^2 \sim 10^{-18}$ м погрешность вычислений может оказаться больше чем вклад соответствующих слагаемых. Указанная особенность позволяет применить к исследованию системы дифференциальных уравнений микрополярной термоупругости теорию сингулярных возмущений.

Вывод связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных микрополярной термоупругости следует начинать с определения весов элементарного объема и псевдовектора спинорных перемещений. Такой выбор существенным образом влияет на алгебраический вес приписываемый основным характеристикам микро-, нано- термомеханических состояний микрополярного континуума. Детерминирование алгебраических весов элементов объема и площади, а также веса псевдовектора спинорных перемещений требует особой аккуратности, т.к. это приводит к тому, что определяющие постоянные оказываются псевдоскалярами, а характеристики микро- и нано- структурных термомеханических состояний проявляют псевдотензорные свойства. Ранее были исследованы отдельные случаи развития теорий микрополярной термоупругости в терминах псевдотензоров. Так например, если при выводе основных уравнений теории микрополярной термоупругости использовать естественные

[2]В работах Нейбера [9, 10] характерная микродлина обозначалась l. Определяющая постоянная l отличается от L, используемой в работах [11–14], и связана с ней прямой пропорциональной зависимостью [15, 16] с точностью до безразмерного множителя. Последнее обстоятельство подтверждает, что микро- и наномасштаб может быть введен в микрополярную модель неоднозначным способом.

элементы объема и площади,[3] как было показано ранее в работе [28] тепловой поток, тензор силовых напряжений, плотность массы и теплоемкость также оказываются псевдотензорными величинами положительного нечетного веса. С другой стороны, при выборе дублетного элемента объема и соответствующего элемента площади тензор силовых напряжений оказывается псевдотензором отрицательного веса -1, тензор моментных напряжений — псевдотензором отрицательного веса -2, тепловой поток — псевдовектором алгебраического веса -1, массовая плотность — псевдоскаляром алгебраического веса -1, что было продемонстрировано в работе [29]. Несмотря на то, что тензорные элементы объема и площади даже в N-мерном пространстве наиболее просто задаются в терминах псевдотензоров [18, 30–33], описание обычно проводится с использованием формализма кососимметричных дифференциальных форм [34–37], существенно искажающих очевидные свойства указанных объектов и их псевдотензорную природу.

Как отмечалось выше, алгебраический вес приписываемый элементам объема и площади влияет на веса объемных плотностей характеристик термодинамического процесса: внутренней энергии, энтропии, массовой плотности, теплового потока, а также — на веса связанных с ними определяющих псевдоскаляров. При этом, экстенсивные термодинамические параметры, проявляющие свойства физической аддитивности, задаваемые в объеме, являются абсолютными скалярами, что является фундаментальным термодинамическим принципом. С другой стороны, приписывание веса псевдовектору спинорных перемещений, также приводит к изменению сопутствующих алгебраических весов, приписываемых определяющим псевдоскалярам. При этом, задание кинематики микрополярного тела, базируется на одной из трех знаменитых теоремах Шаля [38]. Из трех теорем Шаля по-существу только вторая применяется в формулировках основных положений линейной микрополярной теории упругости [4, 7, 8]. Литературный поиск показывает скудность информации об использовании при математическом моделировании микрополярного континуума винтовой (третьей) теоремы Шаля–Моцци, в которой кинематика микрополярного тела представляется как скользящий поворот. В конвенциональных микрополярных теориях упругости и термоупругости [5–8] обычно оперируют с двумя независимыми полями трансляционных и спинорных перемещений (микроповоротов), последнее из которых наиболее просто задается псевдовектором нечетного алгебраического веса. Возможны различные способы задания псевдовектора спинорных перемещений. В частности, представлению с помощью контравариантного псевдовектора $\overset{[+1]}{\phi}{}^k$ положительного веса $+1$ посвящены работы [11–14], а моделям микрополярных тел, в которых использовался ковариантный псевдовектор $\overset{[-1]}{\phi}{}_k$ отрицательного веса -1, посвящены работы [39, 40]). Указанные псевдовекторы легко преобразуются к абсолютным векторам спинорных перемещений ϕ^k (или ϕ_k).

2. Элементарные тензорные объемы и площади в трехмерном пространстве. Настоящая статья существенным образом опирается на результаты, терминологию и понятия современной геометрии и тензорного анализа [20, 41]. В дальнейшем изложении, где это не очевидно, сверху корневого символа псевдотензора

[3]Отметим, что использование естественных элементов объема характерно для вариационных функционалов физических теорий поля [26, 27].

в квадратных скобках будем отмечать его вес, а снизу в круглых скобках его ранг. Нулевой вес абсолютных тензоров и веса некоторых фундаментальных псевдотензоров в обозначениях отражаться не будут.

Дальнейшие рассмотрения будем проводить в трехмерном Евклидовом пространстве. Введем в ковариантный базис $\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}$. Смешанное произведение векторов базиса [41] позволяет ввести понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра e и и двух псевдоскалярных единиц согласно [40]:

$$e = \underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\underset{2}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}), \qquad \overset{[+1]}{1} = e, \qquad \overset{[-1]}{1} = e^{-1}, \tag{1}$$

тем самым, разделив локальные базисные системы на право- и лево- ориентированные. Отметим, что знак псевдоскалярной единицы в (1) определяет ориентации координатных систем, т. е. для правоориентированных — $\overset{[+1]}{1} > 0$, для левоориентированных — $\overset{[+1]}{1} < 0$.

Кроме того, целые степени псевдоскалярных единиц ковариантно постоянны, т. е.

$$\nabla_k \overset{[\pm \mathrm{g}]}{1} = \overset{[\pm \mathrm{g}]}{0},$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js}.

В дальнейшем изложении припишем функции w.g.t значение веса псевдотензора, на который действует эта функция. Например,

$$\mathrm{w.g.t}\,(\overset{[\mathrm{g}]}{1}) = \mathrm{g}.$$

Псевдотензор $\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s \cdot \ldots \cdot}_{\cdot \ldots \cdot k_1 k_2 \ldots k_r}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней псевдоскалярной единицы можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$\underset{(n)}{T}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s \cdot \ldots \cdot}_{\cdot \ldots \cdot k_1 k_2 \ldots k_r} = \overset{[-\mathrm{g}]}{1}\,\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s \cdot \ldots \cdot}_{\cdot \ldots \cdot k_1 k_2 \ldots k_r}. \tag{2}$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (the weights balance rule) [42–44]. Действительно, имеем

$$\mathrm{w.g.t}\left(\underset{(n)}{T}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s \cdot \ldots \cdot}_{\cdot \ldots \cdot k_1 k_2 \ldots k_r}\right) = \mathrm{w.g.t}\left(\overset{[-\mathrm{g}]}{1}\,\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s \cdot \ldots \cdot}_{\cdot \ldots \cdot k_1 k_2 \ldots k_r}\right) = -\mathrm{g} + \mathrm{g} = 0.$$

Далее в качестве многообразия выберем двумерную поверхность, заданную естественной (Гауссовой) параметризацией u^1, u^2. В этом случае контравариантный тензорный элемент площади поверхности принимает вид [30, 31]

$$d\tau^{ij} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_1} x^i \partial_{\alpha_2} x^j du^1 du^2 = 2\partial_1 x^{[i} \partial_2 x^{j]} du^1 du^2. \tag{3}$$

Ковариантный тензорный элемент площади $d\tau_{ij}$ можно получить, опустив индексы у $d\tau^{ij}$ в (3).

Антисимметричным абсолютным тензорам $d\tau^{ij}$ и $d\tau_{ij}$ сопутствуют ковариантный и контравариантный псевдовекторы

$$\overset{[-1]}{dA}_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} d\tau^{ij}, \qquad \overset{[+1]}{dA}{}^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} d\tau_{ij}, \tag{4}$$

где символы перестановок ϵ_{kij} и ϵ^{kij} удовлетворяют равенству

$$\overset{[-1]}{\epsilon}_{kij} = \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{kij}. \tag{5}$$

Отметим, что равенство (5) нарушает принятые в псевдотензорной алгебре соглашения о балансе индексов и весов псевдотензоров. Кроме того, что для символов перестановок требуются специальные правила жонглирования индексами:

$$\epsilon_{kij} = e^{-2} g_{kl} g_{is} g_{jm} \epsilon^{lsm}. \tag{6}$$

Абсолютные векторные элементы площади поверхности можно определить, домножив псевдовекторные элементы площади на соответствующую степень псевдоскалярной единицы

$$dA_k = \overset{[+1]}{1}\overset{[-1]}{dA_k}, \qquad dA^k = \overset{[-1]}{1}\overset{[+1]}{dA^k}. \tag{7}$$

Пседоскалярные элементы площади поверхности задаются следующими формулами

$$\overset{[-1]}{dA} = (\operatorname{sgn} e)\sqrt{g^{sk}\overset{[-1]}{dA_s}\overset{[-1]}{dA_k}}, \qquad \overset{[+1]}{dA} = (\operatorname{sgn} e)\sqrt{g_{sk}\overset{[+1]}{dA^s}\overset{[+1]}{dA^k}}. \tag{8}$$

Оба элемента площади в (8) чувствительны к изменению ориентации координатной системы, что обусловлено знаком фундаментального ориентирующего псевдоскаляра. И тот, и другой элемент площади (8) чувствительны к изменению ориентации координатной системы, что обусловлено знаком фундаментального ориентирующего.

Инвариантный элемент площади поверхности определяются согласно

$$dA = \sqrt{dA^k dA_k} > 0. \tag{9}$$

Использовав введенные выше определения для элементов площади (8) и (9), можно показать, что

$$\Big(\overset{[\pm1]}{dA}\Big)^2 = \frac{1}{2}\overset{[\pm2]}{1} d\tau^{is} d\tau_{is}, \qquad \Big(dA\Big)^2 = \frac{1}{2} d\tau^{is} d\tau_{is}.$$

3. Постулат абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры. Как отмечалось ранее, выбор способа измерения элементарных объемов и площадей, т.е. процедура приписывания алгебраического веса псевдоинвариантным элементам объема и площади, существенным образом влияет на алгебраический вес основных характеристик микро- и нано- структурных термомеханических состояний микрополярного континуума, в особенности, проявляющих свойства тремодинамической аддитивности. Основываясь на результатах предыдущих разделов настоящей статьи, следует отметить, что существует три варианта развития моделей микрополярной термоупругости, различающихся элементарными объемами: $d\tau$, $\overset{[+1]}{d\tau}$, $\overset{[-1]}{d\tau}$. Их можно определить следующей диаграммой весов элементарных объемов, элементарных площадей, и характеристик микро- и нано- структурных термомеханических состояний, реагирующих на эти веса:

$$\begin{array}{cccccccc}
(1) & d\tau & dA & h^k & \lambda & c & G & t^{ik} \\
(2) & \overset{[+1]}{d\tau} & \overset{[+1]}{dA} & \overset{[-1]}{h}{}^k & \overset{[-1]}{\lambda} & \overset{[-1]}{c} & \overset{[-1]}{G} & \overset{[-1]}{t}{}^{ik} \\
(3) & \overset{[-1]}{d\tau} & \overset{[-1]}{dA} & \overset{[+1]}{h}{}^k & \overset{[+1]}{\lambda} & \overset{[+1]}{c} & \overset{[+1]}{G} & \overset{[+1]}{t}{}^{ik}
\end{array}$$

Представленная диаграмма построена с использованием правила баланса алгебраических весов и отражает возможную чувствительность определяющих псевдоскаляров (таких как, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, модуль сдвига), к преобразованиям, меняющим ориентацию координатного базиса. Последнее обстоятельство играет исключительно важную роль в микрополярных теориях термоупругости, развиваемых в терминах псевдоинвариантных элементов объема и площади.

Введем обозначение для алгебраического веса, ассоциированного с элементарными объемом и площадью согласно правилу

$$\mathrm{g} = \begin{cases} +1, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}, \ \overset{[-1]}{dA}; \\ -1, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}, \ \overset{[+1]}{dA}; \\ \ \ 0, & \text{для } d\tau, \quad dA. \end{cases} \tag{10}$$

Тогда для измерения псевдоинвариантных элементов площадей и объемов запишем:

$$\overset{[-\mathrm{g}]}{dA}, \quad \overset{[-\mathrm{g}]}{dA_k}, \quad \overset{[-\mathrm{g}]}{d\tau}. \tag{11}$$

Отдельного обсуждения требует алгебраический вес псевдотензора моментных напряжений $\mu^{i}_{\cdot k}$, т.к. на него также оказывает влияние вес псевдовектора спинорных перемещений. По аналогии с (10) примем обозначение для алгебраического веса, ассоциированного с псевдовектором спинорных перемещений

$$\mathrm{w} = \begin{cases} +1, & \text{для } \overset{[+1]}{\phi}{}^{i}; \\ -1, & \text{для } \overset{[-1]}{\phi}{}_{i}; \\ \ \ 0, & \text{для } \phi^{i} \text{ или } \phi_{i}, \end{cases} \tag{12}$$

тогда согласно правилу баланса весов для псевдотензора моментных напряжений получим

$$\mathrm{w.g.t}\,(\mu^{i}_{\cdot k}) = \mathrm{g} - \mathrm{w}. \tag{13}$$

Алгебраические веса ассоциированных (сопутствующих) псевдовекторов силовых и моментных напряжений вычисляются в соответствии с правилом баланса весов согласно равенствам

$$\mathrm{w.g.t}\,(\overset{[\mathrm{g}-1]}{\tau}{}_{i}) = \mathrm{w.g.t}\,(\epsilon_{ijk}\overset{[\mathrm{g}]}{t}{}^{[jk]}) = \mathrm{g} - 1\,,$$
$$\mathrm{w.g.t}\,(\overset{[\mathrm{g}-\mathrm{w}+1]}{\mu}{}^{i}) = \mathrm{w.g.t}\,(\epsilon^{iks}\overset{[\mathrm{g}-\mathrm{w}]}{\mu}{}_{[ks]}) = \mathrm{g} - \mathrm{w} + 1\,,$$

откуда немедленно можно получить соотношения в весах

$$2\overset{[\mathrm{g}-1]}{\tau}{}_{i} = -\epsilon_{ijk}\overset{[\mathrm{g}]}{t}{}^{[jk]}, \qquad 2\overset{[\mathrm{g}-\mathrm{w}+1]}{\mu}{}^{i} = \epsilon^{iks}\overset{[\mathrm{g}-\mathrm{w}]}{\mu}{}_{[ks]}.$$

Рассмотрим процесс теплопередачи в телах, микро-, наноструктурные характеристики термомеханических состояний которых реагируют на изменение ориентации трехмерного пространства. Количество тепла Q, поступающее через фиксированную замкнутую поверхность ∂ в единицу времени является абсолютным скаляром и в условиях принятых обозначений (10) будет определяться интегральным соотношением

$$Q = \oint\limits_{\partial} \overset{[\mathrm{g}]}{h}{}^k n_k \overset{[-\mathrm{g}]}{dA} = \oint\limits_{\partial} \overset{[\mathrm{g}]}{h}{}^k \overset{[-\mathrm{g}]}{dA}_k, \tag{14}$$

где $\overset{[\mathrm{g}]}{h}{}^k$ — псевдовектор потока тепла, n_k — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂.[4]

Баланс весов в (14) базируется на фундаментальном утверждении

$$\mathrm{w.g.t}\,(Q) = 0,$$

означающем невозможность приписать какой-бы то ни было целый алгебраический вес количеству тепла Q. Отсюда немедленно следует, что

$$\mathrm{w.g.t}\left(\overset{[\mathrm{g}]}{h}{}^k \overset{[-\mathrm{g}]}{dA}_k\right) = 0.$$

Откуда видно, что в вектор потока тепла в условиях использования псевдовекторных элементов площади оказывается псевдовектором нечетного алгебраического веса.

С процессом теплопроводности связана важная термодинамическая переменная состояния — абсолютная термодинамическая температура. Рассмотрим возможность приписать ей целый алгебраический вес, т.е. рассматривать ее как псевдоинвариант[5]. В качестве термодинамического потенциала сначала выберем внутреннюю энергию u как функцию термодинамических переменных состояния:

$$u = \overline{u}(\epsilon_{(kl)}, \overset{[\mathrm{w}]}{\kappa}_{(kl)}, \overset{[\mathrm{w}]}{\varphi}{}^i, \kappa_i, s).$$

Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния. В качестве аргументов потенциала состояния выбраны: энтропия, симметричные части асимметричного тензора деформаций и тензора изгиба–кручения

$$\epsilon_{(kl)} = \nabla_{(k}u_{l)} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k), \qquad \overset{[\mathrm{w}]}{\kappa}_{(kl)} = \nabla_{(k}\overset{[\mathrm{w}]}{\phi}_{l)} = \frac{1}{2}(\nabla_k \overset{[\mathrm{w}]}{\phi}_l + \nabla_l \overset{[\mathrm{w}]}{\phi}_k), \tag{15}$$

а также сопутствующие им псевдовекторы:

$$\overset{[\mathrm{w}]}{\varphi}{}^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\epsilon_{[kl]}, \qquad \kappa_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\overset{[\mathrm{w}]}{\kappa}{}^{[kl]}. \tag{16}$$

Абсолютная термодинамическая температура θ в термомеханике сплошных сред определяется как функция параметров термодинамического состояния и вычисляется как частная производная потенциальна состояния (внутренней энергии $\overline{u}$) по энтропии s согласно формуле:

$$\theta = \frac{\partial \overline{u}(\epsilon_{(kl)}, \overset{[\mathrm{w}]}{\kappa}_{(kl)}, \overset{[\mathrm{w}]}{\varphi}{}^i, \kappa_i, s)}{\partial s}. \tag{17}$$

[4]Аюсолютность вектора внешней нормали к поверхности, а также способы приписывания ему алгебрачисекого веса в условиях когда поверхность задается псевдоскалярной функций [32, 45]

[5]В классической термомеханике континуума абсолютная термодинамическая температура θ — всегда абсолютный инвариант, не зависящий ни от поворотов, ни от зеркальный отражений пространства.

Для удобства введем в рассмотрение плотности в расчете на единицу псевдоинвариантного объема $\overset{[-\mathrm{g}]}{d\tau}$:

$$\overset{[\mathrm{g}]}{S} = \overset{[\mathrm{g}]}{\rho} s, \qquad \overset{[\mathrm{g}]}{U} = \overset{[\mathrm{g}]}{\rho} u. \tag{18}$$

В этом случае, производную в (17) можно преобразовать в соответствии с (18) к виду

$$\theta = \frac{\partial \overset{[\mathrm{g}]}{U}(\epsilon_{(kl)}, \overset{[\mathrm{w}]}{\kappa}_{(kl)}, \overset{[\mathrm{w}]}{\varphi}{}^{i}, \kappa_i, \overset{[\mathrm{g}]}{S})}{\partial \overset{[\mathrm{g}]}{S}}. \tag{19}$$

Кроме того, следует принимать во внимание фундаментальное термодинамическое неравенство

$$\inf \theta > 0\,, \tag{20}$$

постулирующее как положительность абсолютной температуры[6], так и невозможность достичь абсолютного нуля ни при каком допустимом термодинамическом процессе.

Из определения (17) и правила баланса весов нетрудно заметить, что независимо от выбора веса элементарного объема, веса плотности внутренней энергии и веса плотности энтропии следует[7]

$$\mathrm{w.g.t}\,(\theta) = \mathrm{w.g.t}\,\left(\frac{\overset{[\mathrm{g}]}{U}}{\overset{[\mathrm{g}]}{S}}\right) = \mathrm{w.g.t}\,\left(\frac{\overset{[\mathrm{g}]}{1}U}{\overset{[\mathrm{g}]}{1}S}\right) = \mathrm{w.g.t}\,\left(\frac{U}{S}\right) = 0.$$

Последовательность равенств (3) немедленно приводит заинтересованного читателя к фундаментальному утверждению, что абсолютная температура является абсолютным инвариантом, сохраняющим неизменным свое значение при поворотах и отражениях пространства. Последнее обстоятельство подтверждает принципиальную нереализуемость приписывания какого-бы то ни было алгебраического веса абсолютной термодинамической температуре. Последнее обстоятельство обусловлено различной природой внутренней энергии (аддитивность) и температуры (неаддитивность).

4. Различные “сценарии” уравнений микрополярной термоупругости

Уравнения динамики микрополярного континуума наиболее корректно можно получить из вариационного принципа виртуальных перемещений. Формулировка этого принципа существенным образом зависит от выбора способа измерения элементарных объемов и площадей подробно изложенных в предыдущем разделе. Дифференциальные псевдовекторные уравнения динамики, общие для всех микрополярных теорий,

[6]Положительность абсолютной температуры может быть доказана, исходя из канонического распределения Гиббса для ансамбля элементарных термодинамических систем. Отметим, что неравенство (20) запрещает любые изменения термодинамической температуры при зеркальных отражениях трехмерного пространства, что собственно следует из $\mathrm{w.g.t}\,(\theta) = 0$, и, кроме всего прочего, говорит о невозможности приписать температуре как бы то ни было нечетный алгебраический вес.

[7]В данном контексте подразумевается, что плотности берутся в расчете на единицу объема.

с учетом принятых обозначений (10) и (12) записываются в виде:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_k \overset{[g]}{t}{}^{ki} = -\overset{[g]}{\rho}(f^i - \partial_{..}u^i),\\
&\nabla_k \overset{[g-w]}{\mu}{}^{k\cdot}_{\cdot i} - 2\overset{[g-1]}{\tau}{}_i = -\overset{[g]}{\rho}(\overset{[-w]}{l}{}_i - \overset{[-2w]}{\mathfrak{I}}\,\partial_{..}\overset{[w]}{\phi}{}_i),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Важно отметить, что второе псевдовекторное дифференциальное уравнение в системе (21), записанное в произвольной системе координат, не всегда удовлетворяет правилу баланса весов. Однако, правило баланса весов не нарушается в случае когда вес псевдотензора спинорных перемещений равен +1 или для координатных систем с ограничением $\sqrt{g} = 1$.[8]

Определяющие уравнения полуизотропной микрополярной среды записываются в принятых обозначениях можно принять в виде [17]:

$$
\begin{aligned}
\overset{[g]}{t}{}^{(is)} &= 2\overset{[g]}{G}\left(\nu(1-2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm}\right)\epsilon_{(lm)} + \overset{[g]}{G}\,\overset{[-w]}{L}\,(\mathfrak{c}_4 g^{is}g_{lm}\overset{[w]}{\kappa}{}^{(lm)} + \mathfrak{c}_5\overset{[w]}{\kappa}{}^{(is)}) -\\
&\qquad -2\overset{[g]}{G}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta,\\
\overset{[g-w]}{\mu}{}_{(is)} &= 2\overset{[g]}{G}\,\overset{[-w]}{L}\,\overset{[-w]}{L}\,(\mathfrak{c}_3 g_{is}g_{lm} + g_{il}g_{sm})\overset{[w]}{\kappa}{}^{(lm)} + \overset{[g]}{G}\,\overset{[-w]}{L}\,(\mathfrak{c}_4 g_{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + \mathfrak{c}_5\epsilon_{(is)}) -\\
&\qquad -2\overset{[g]}{G}\,\overset{[-w]}{L}\,\overset{[-w]}{L}\,\underset{*}{\overset{[w]}{\beta}}\,\theta,\\
\overset{[g-1]}{\tau}{}_i &= 2\overset{[g]}{G}\,\overset{[-2w-1]}{\mathfrak{c}_1}\,g_{is}\overset{[w]}{\varphi}{}^s + \frac{1}{2}\overset{[g]}{G}\,\overset{[-w]}{L}\,\overset{[-1]}{\mathfrak{c}_6}\kappa_i,\\
\overset{[g-w+1]}{\mu}{}^i &= 2\overset{[g]}{G}\,\overset{[-w]}{L}\,\overset{[-w]}{L}\,\overset{[w+1]}{\mathfrak{c}_2}\,g^{is}\kappa_s + \frac{1}{2}\overset{[g]}{G}\,\overset{[-w]}{L}\,\overset{[+1]}{\mathfrak{c}_6}\,\overset{[w]}{\varphi}{}^i,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где $\overset{[g]}{G}$ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; $\overset{[-w]}{L}$ — характерная микродлина; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{c}_4$, $\mathfrak{c}_5$, $\mathfrak{c}_6$ — не имеющие физической размерности псевдоскаляры; $\underset{*}{\alpha}$ — коэффициент линейного теплового расширения; $\underset{*}{\overset{[w]}{\beta}}$ — коэффициент теплового изгиба–кручения (см. [11, 17]).

Возвращаясь к записи в терминах асимметричных псевдотензоров силовых и моментных напряжений получим

$$
\begin{aligned}
\overset{[g]}{t}{}_{is} &= \overset{[g]}{G}\Big[(1+c_1)\nabla_i u_s + (1-c_1)\nabla_s u_i + 2\nu(1-2\nu)^{-1}g_{is}\nabla_k u^k -\\
&\qquad -2c_1 e_{isl}\overset{[w]}{\phi}{}^l + \overset{[-w]}{L}\,c_4 g_{is}\nabla_l\overset{[w]}{\phi}{}^l + \overset{[-w]}{L}\,c_5\nabla_{(i}\overset{[w]}{\phi}{}_{s)} - \frac{1}{2}\overset{[-w]}{L}\,c_6\nabla_{[i}\overset{[w]}{\phi}{}_{s]} - 2\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta\Big],\\
\overset{[g-w]}{\mu}{}_{is} &= \overset{[g]}{G}\,\overset{[-w]}{L}\,\overset{[-w]}{L}\Big[(1+c_2)\nabla_i\overset{[w]}{\phi}{}_s + (1-c_2)\nabla_s\overset{[w]}{\phi}{}_i + 2c_3 g_{is}\nabla_l\overset{[w]}{\phi}{}^l +\\
&\qquad + \overset{[-w]}{L}\Big(c_4 g_{is}\nabla_l u^l + c_5\nabla_{(i}u_{s)} - \frac{1}{2}c_6\nabla_{[i}u_{s]} + \frac{1}{2}c_6\epsilon_{isl}\overset{[w]}{\phi}{}^l\Big) - 2\underset{*}{\overset{[w]}{\beta}}\,\theta\Big].
\end{aligned}
\tag{23}
$$

[8]Ограничение $\sqrt{g} = 1$ часто используется не только в теории относительности [46], но и в математической теории пластичнсоти [47]. На страницах 135–142 монографии [46] условие $\sqrt{g} = 1$ используется при выводе уравнений теории гравитации в четырехмерном пространстве–времени, что существенно упрощает уравнения теории относительности.

Подставив полученные определяющие уравнения (23) в уравнения динамики (21), дополнив их уравнением теплопроводности [28, 29] для полуизотропного микрополярного тела получим замкнутую систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
\overset{[\mathrm{g}]}{G}[(1+\mathfrak{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1-\mathfrak{c}_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\overset{[-\mathrm{w}-1]}{\mathfrak{c}}{}_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[\mathrm{w}]}{\phi}_l + \\
+\overset{[-\mathrm{w}]}{L}c_4'\nabla^i\nabla_k\overset{[\mathrm{w}]}{\phi}{}^k + \overset{[-\mathrm{w}]}{L}c_5'\nabla^k\nabla_k\overset{[\mathrm{w}]}{\phi}{}^i] - 2\overset{[\mathrm{g}]}{G}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla_i\theta = -\overset{[\mathrm{g}]}{\rho}(f^i - \partial..u^i), \\
\overset{[\mathrm{g}]}{G}\overset{[-\mathrm{w}]}{L}\overset{[-\mathrm{w}]}{L}[(1+\mathfrak{c}_2)\nabla^s\nabla_s\overset{[\mathrm{w}]}{\phi}_i + (1-\mathfrak{c}_2+2\mathfrak{c}_3)\nabla_i\nabla_k\overset{[\mathrm{w}]}{\phi}{}^k + \\
+\overset{[-\mathrm{w}]}{L}{}^{-1}c_4'\nabla_i\nabla^k u_k + \overset{[-\mathrm{w}]}{L}{}^{-1}c_5'\nabla^k\nabla_k u_i + \overset{[-\mathrm{w}]}{L}{}^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\nabla^s\overset{[\mathrm{w}]}{\phi}{}^l] - \\
-2e\overset{[\mathrm{g}]}{G}\overset{[-2\mathrm{w}]}{\mathfrak{c}}{}_1(2\overset{[\mathrm{w}]}{\phi}_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) - 2\overset{[\mathrm{g}]}{G}\overset{[-\mathrm{w}]}{L}\overset{[-\mathrm{w}]}{L}\underset{*}{\overset{[\mathrm{w}]}{\beta}}\nabla_i\theta = -\overset{[\mathrm{g}]}{\rho}(\overset{[-\mathrm{w}]}{l}{}_i - \overset{[-2\mathrm{w}]}{\mathfrak{I}}\partial..\overset{[\mathrm{w}]}{\phi}_i), \\
\overset{[\mathrm{g}]}{\lambda}\nabla_s\nabla^s\theta - c\overset{[\mathrm{g}]}{\rho}\partial.\theta - 2\overset{[\mathrm{g}]}{G}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta_0\nabla_s\partial.u^s - 2\overset{[\mathrm{g}]}{G}\overset{[-\mathrm{w}]}{L}\overset{[-\mathrm{w}]}{L}\underset{*}{\overset{[\mathrm{w}]}{\beta}}\theta_0\nabla_s\partial.\overset{[\mathrm{w}]}{\phi}{}^s = 0,
\end{gathered}
\tag{24}
$$

где f^i — вектор массовых сил, $\overset{[-\mathrm{w}]}{l}{}_i$ — псевдовектор массовых моментов, $\overset{[\mathrm{g}]}{\lambda}$ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость на единицу массы. В этом случае характерная микродлина L будет псевдоскаляром алгебраического веса $-\mathrm{w}$, а модуль сдвига G — псевдоскаляр алгебраического веса g.

Рассмотрим некоторые наиболее интересные случаи детерминирования алгебраических весов элементарных объемов, площадей и псевдовектора спинорных перемещений. В начале выпишем систему (24) в терминах абсолютных тензоров, т.е. $\mathrm{g}=0$, $\mathrm{w}=0$. В этом случае получим

$$
\begin{gathered}
G[(1+\mathfrak{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1-\mathfrak{c}_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\mathfrak{c}_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\phi_l \\
+Lc_4'\nabla^i\nabla^k\phi_k + Lc_5'\nabla^k\nabla_k\phi^i] - 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla^i\theta = -\rho(f^i - \partial..u^i), \\
GL^2[(1+\mathfrak{c}_2)\nabla^s\nabla_s\phi_i + (1-\mathfrak{c}_2+2\mathfrak{c}_3)\nabla_i\nabla^k\phi_k \\
+L^{-1}c_4'\nabla_i\nabla_k u^k + L^{-1}c_5'\nabla_k\nabla^k u_i - L^{-1}c_6'\epsilon^{s\cdot l}_{\cdot i\cdot}\nabla_s\phi_l] \\
-2G\mathfrak{c}_1(2\phi_i + \epsilon^{k\cdot l}_{\cdot i\cdot}\nabla_k u_l) - 2GL^2\underset{*}{\beta}\nabla_i\theta = -\rho(l_i - \mathfrak{I}\partial..\phi_i), \\
\nabla_s\nabla^s\theta - \frac{c\rho}{\lambda}\partial.\theta - 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\frac{\theta_0}{\lambda}\nabla_s\partial.u^s - 2GLL\underset{*}{\beta}\frac{\theta_0}{\lambda}\nabla_s\partial.\phi_s + \frac{\rho q}{\lambda} = 0.
\end{gathered}
$$

Система (24) в терминах естественного элемента объема (g = +1) и псевдовектора спинорных перемещений положительного веса (w = +1) примет вид:

$$
\begin{gathered}
\overset{[+1]}{G}\Big[(1+\mathfrak{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1-\mathfrak{c}_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}_l + \\
+ \overset{[-1]}{L}c_4'\nabla^i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L}c_5'\nabla^k\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^i\Big] - 2\overset{[+1]}{G}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla_i\theta = -\overset{[+1]}{\rho}(f^i - \partial..u^i), \\
\overset{[+1]}{G}\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\Big[(1+\mathfrak{c}_2)\nabla^s\nabla_s\overset{[+1]}{\phi}_i + (1-\mathfrak{c}_2+2\mathfrak{c}_3)\nabla_i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \\
+ \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_4'\nabla_i\nabla^k u_k + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_5'\nabla^k\nabla_k u_i + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\nabla^s\overset{[+1]}{\phi}{}^l\Big] - \\
- 2e\overset{[+1]}{G}\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1(2\overset{[+1]}{\phi}_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) - 2\overset{[+1]}{G}\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}\nabla_i\theta = -\overset{[+1]}{\rho}(\overset{[-1]}{l}_i - \overset{[-2]}{\mathfrak{J}}\partial..\overset{[+1]}{\phi}_i), \\
\overset{[+1]}{\lambda}\nabla_s\nabla^s\theta - c\overset{[+1]}{\rho}\partial.\theta - 2\overset{[+1]}{G}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta_0\nabla_s\partial.u^s - 2\overset{[+1]}{G}\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}\theta_0\nabla_s\partial.\overset{[+1]}{\phi}{}^s + \overset{[+1]}{\rho}q = 0.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

При использовании дублетного элемента объема (g = −1) и псевдовектора спинорных перемещений отрицательного веса (w = −1) система дифференциальных уравнений (24) преобразуется к виду:

$$
\begin{gathered}
\overset{[-1]}{G}\Big[(1+\mathfrak{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1-\mathfrak{c}_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\mathfrak{c}_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[-1]}{\phi}_l + \\
+ \overset{[+1]}{L}c_4'\nabla^i\nabla_k\overset{[-1]}{\phi}{}^k + \overset{[+1]}{L}c_5'\nabla^k\nabla_k\overset{[-1]}{\phi}{}^i\Big] - 2\overset{[-1]}{G}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla_i\theta = -\overset{[-1]}{\rho}(f^i - \partial..u^i), \\
\overset{[-1]}{G}\overset{[+1]}{L}\overset{[+1]}{L}\Big[(1+\mathfrak{c}_2)\nabla^s\nabla_s\overset{[-1]}{\phi}_i + (1-\mathfrak{c}_2+2\mathfrak{c}_3)\nabla_i\nabla_k\overset{[-1]}{\phi}{}^k + \\
+ \overset{[+1]}{L}{}^{-1}c_4'\nabla_i\nabla^k u_k + \overset{[+1]}{L}{}^{-1}c_5'\nabla^k\nabla_k u_i + \overset{[+1]}{L}{}^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\nabla^s\overset{[-1]}{\phi}{}^l\Big] - \\
- 2e\overset{[-1]}{G}\overset{[+2]}{\mathfrak{c}}_1(2\overset{[-1]}{\phi}_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) - 2\overset{[-1]}{G}\overset{[+1]}{L}\overset{[+1]}{L}\underset{*}{\overset{[-1]}{\beta}}\nabla_i\theta = -\overset{[-1]}{\rho}(\overset{[+1]}{l}_i - \overset{[+2]}{\mathfrak{J}}\partial..\overset{[-1]}{\phi}_i), \\
\overset{[-1]}{\lambda}\nabla_s\nabla^s\theta - c\overset{[-1]}{\rho}\partial.\theta - 2\overset{[-1]}{G}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta_0\nabla_s\partial.u^s - 2\overset{[-1]}{G}\overset{[+1]}{L}\overset{[+1]}{L}\underset{*}{\overset{[-1]}{\beta}}\theta_0\nabla_s\partial.\overset{[-1]}{\phi}{}^s = 0.
\end{gathered}
\tag{26}
$$

5. Детерминирование весов определяющих скаляров в полуизотропном теле. Полученные в предыдущем разделе настоящей статьи системы дифференциальных уравнений демонстрируют важное свойство термомеханических характеристик полуизотропных микрополярных термоупругих тел — определяющие постоянные, имеющие физическую размерность, оказываются псевдоскалярами нечетного алгебраического веса, т.е. проявляют чувствительность к преобразованиям трехмерного пространства, меняющим его ориентацию на противоположную. К таким псевдоскалярам относятся: модуль сдвига $\overset{[\mathrm{g}]}{G}$, зависящий от алгебраического веса псевдоинвариантного элемента площади, и характерная микродлина $\overset{[-\mathrm{w}]}{L}$, вес которой определяется весом псевдовектора спинорных перемещений, а также коэффициент теплопроводности $\overset{[\mathrm{g}]}{\lambda}$ и массовая плотность $\overset{[\mathrm{g}]}{\rho}$.

Следует отметить, что указанные выше псевдоскаляры ковариантно постоянны, т.е., например, для модуля сдвига $\overset{[\mathrm{g}]}{G}$ и характерной микродлины $\overset{[-\mathrm{w}]}{L}$ будут выполнены следующие дифференциальные условия

$$\nabla_k \overset{[\mathrm{g}]}{G} = \overset{[\mathrm{g}]}{0}, \qquad \nabla_k \overset{[-\mathrm{w}]}{L} = \overset{[-\mathrm{g}]}{0}. \tag{27}$$

Условия (27) можно преобразовать к виду дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\partial_k \overset{[\mathrm{g}]}{G} - \mathrm{g}\overset{[\mathrm{g}]}{G}\frac{\partial_k e}{e} = \overset{[\mathrm{g}]}{0}, \\ &\partial_k \overset{[-\mathrm{w}]}{L} + \mathrm{w}\overset{[-\mathrm{w}]}{L}\frac{\partial_k e}{e} = \overset{[-\mathrm{w}]}{0}. \end{aligned} \tag{28}$$

или

$$\begin{cases} \partial_k(\ln|\overset{[\mathrm{g}]}{G}| - \mathrm{g}\ln|e|) = \overset{[\mathrm{g}]}{0}, \\ \partial_k(\ln|\overset{[-\mathrm{w}]}{L}| + \mathrm{w}\ln|e|) = \overset{-\mathrm{w}}{0}. \end{cases} \tag{29}$$

Интегрируя полученные уравнения (29), заключаем, что

$$\overset{[\mathrm{g}]}{G} = e^{\mathrm{g}}G = \overset{[\mathrm{g}]}{1}G, \qquad \overset{[-\mathrm{w}]}{L} = e^{-\mathrm{w}}L = \overset{[-\mathrm{w}]}{1}L, \tag{30}$$

где G и L — абсолютные инварианты, более того, абсолютные постоянные.

6. Заключение и выводы. В работе получены поливариантные уравнения теории полуизотропной микрополярной термоупругости. В рамках предложенного подхода вектор потока тепла имеет нечетный алгебраический вес, а псевдоинварианты, связанные с распространением тепла, оказываются чувствительны к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

(1) Получены три основных варианта уравнений динамики и уравнения теплопроводности полуизотропного микрополярного термоупругого тела.

(2) Рассмотрены элементарные тензорные площади и объемы. Исследовано влияние весов тензорных элементов площади и объема на веса объемных плотностей характеристик термодинамического процесса: внутренней энергии, энтропии, массовой плотности, теплового потока, а также — на веса связанных с ними определяющих псевдоскаляров.

(3) Сформулирован фундаментальный принцип абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры, обусловленный правилом частного для алгебраических весов плотности внутренней энергии и плотности энтропии.

(4) Получены и проанализированы различные варианты связанной системы дифференциальных уравнений динамики и уравнения теплопроводности для полуизтропного микрополярного термоупругого тела.

(5) Установлена принципиальная нереализуемость приписывания какого-бы то ни было алгебраического веса абсолютной термодинамической температуре, обусловленная различной природой внутренней энергии (аддитивность) и температуры (неаддитивность).

(6) Исследована проблема детерминирования алгебраических весов определяющих псевдоскаляров с целью учета их реакции на преобразования трехмерного пространства, меняющих его ориентацию на противоположную. Указаны варианты, когда такая чувствительность проявляется.

ЛИТЕРАТУРА

[1] DeValk T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // Phys. Status Solidi (B). 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338.

[2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // Journal of Thermal Stresses. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697.

[3] Lakes R. Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.

[4] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909.

[5] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.

[6] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.

[7] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.

[8] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.

[9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69.

[10] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158.

[11] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. URL: https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

[12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.

[13] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24.

[14] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. T. 58, № 3. C. 802–813.

[15] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1(55). с. 110–121.

[16] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.

[17] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.

[18] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].

[19] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].

[20] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.

[21] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.

[22] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
[23] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.
[24] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
[25] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007.
[26] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
[27] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
[28] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Т. 58, № 9. С. ???–???
[29] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three–Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. Т. 165, № 4. С. ???–???
[30] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.
[31] Murashkin E., Radaev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 2. P. 205–213.
[32] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Тензор силовых напряжений Схоутена и аффинорные плотности положительного веса // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84, № 4. С. 545–558.
[33] Murashkin E. V., Radayev Y. N. The Schouten Force Stresses in Continuum Mechanics Formulations // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 1. P. 153–160.
[34] Фиников Сергей Павлович. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Л., М.: ОГИЗ, 1948. 432 с.
[35] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
[36] Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977. 88 с.
[37] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
[38] Парс Л. А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 636 с.
[39] Murashkin E. V., Radayev Y. N. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449.
[40] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527.
[41] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.
[42] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). с. 17–26.
[43] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). с. 106–115.
[44] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127.
[45] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3D материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1(47). с. 114–121.
[46] Kopff A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.
[47] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

ON THE POLYVARIANCE OF THE BASE EQUATIONS OF COUPLED MICROPOLAR THERMOELASTICITY

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to the study of dynamic equations polyvariance of the theory of semiisotropic micropolar thermoelasticity. Several variants for assigning integer weights to field variables with subsequent determination of algebraic weights of pseudo-vector equations for the dynamics of a semiisotropic thermoelastic solid are considered and analyzed. For this aim elementary volumes and areas assumed as pseudoinvariants of odd integer weights. In addition, it is shown that odd weights can be assigned to the pseudovector of spinor displacements. As a result, heat flux, force stress tensor, mass density, heat capacity, and shear modulus also can be treated as pseudotensor quantities of odd weights, i.e. manifest itself sensitivity to mirror reflections and inversions of three-dimensional spaces. The fundamental principle of absolute invariance of absolute thermodynamic temperature is discussed. Some variants of the coupled system of differential equations of dynamics and heat conduction equations for a semiisotropic micropolar thermoelastic solid are obtained. The problems of mutual influence of algebraic weights of constitutive pseudoscalars are discussed in order to taking account of their response to transformations of three-dimensional space that change its orientation to the opposite.

Keywords: polyvariance, nanoscale, microscale, nanostructural state, characteristic microlength, shear modulus of elasticity, thermal conductivity, micropolarity, tensor volume element, heat flux pseudovector, pseudotensor, specular reflection, semiisotropic solid, gyrotropic solid

REFERENCES

[1] DeValk T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // Phys. Status Solidi (B). 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.
[2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // Journal of Thermal Stresses. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.
[3] Lakes R. Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
[4] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909.
[5] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
[6] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.
[7] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[8] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
[9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. doi:10.1007/BF01176729.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[10] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. doi:10.1007/978-3-662-29364-5_16.
[11] Radayev Y. N. The rule of multipliers in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2018. Vol. 22. P. 504–517. doi:10.14498/vsgtu1635. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.
[12] Radayev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and plasticity. 2020. T. 82, № 4. C. 399–412. URL: https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
[13] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. doi:10.14498/vsgtu1792.
[14] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the theory of linear hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. no. 4. P. 16–24. doi:10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
[15] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. T. 58, № 3. C. 802–813. doi:10.3103/s0025654423700127.
[16] Murashkin E. V. On the relations between micropolar defining parameters of thermodynamic state potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 1(55). p. 110–121. doi:10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
[17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. doi:10.14498/vsgtu1799.
[18] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858. doi:10.1007/978-3-642-45943-6_2.
[19] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
[20] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
[21] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
[22] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. doi:10.1007/978-0-387-69469-6.
[23] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
[24] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.
[25] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
[26] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Elements of field theory: variational symmetries and geometric invariants. Moscow: Fizmatlit, 2009. 156 p.
[27] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Izd-vo Saratovskogo un-ta, 2010. 328 p.
[28] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. T. 58, № 9. C. ???–???
[29] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three–Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. T. 165, № 4. C. ???–???
[30] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Schouten force stress tensor and positive weight affinor densities // Problems of strength and plasticity. 2022. Vol. 84, no. 4. P. 545–558. doi:10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558.
[31] Murashkin E. V., Radayev Y. N. The Schouten Force Stresses in Continuum Mechanics Formulations // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 1. P. 153–160. doi:10.3103/s0025654422700029.
[32] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the coordination of the orientations of tensor area elements in a micropolar continuum immersed in an external flat space // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2021. Vol. 25, no. 4. P. 776–786. doi:10.3103/s0025654422700029.

[33] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 2. P. 205–213. doi:10.3103/s0025654422020108.

[34] Finikov S. P. Cartan's method of external forms in differential geometry. Л., Moscow: OGIZ, 1948. 432 p.

[35] Cartan H. Differential calculus. Differential forms. Moscow: Mir, 1971. 392 p.

[36] Efimov N. V. Introduction to the Theory of External Forms. Moscow: Nauka, 1977. 88 p.

[37] Arnold V. I. Mathematical methods of classical mechanics. Moscow: Nauka, 1979. 431 p.

[38] Pars L. A. Analytical dynamics. Moscow: Nauka, 1971. 636 p.

[39] Murashkin E. V., Radayev Y. N. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449. doi:10.1134/S1995080223060392.

[40] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. doi:10.3103/S0025654423700206.

[41] Rozenfeld B. A. Multidimensional spaces. Moscow: Nauka, 1966. 648 p.

[42] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Algebraic algorithm for systematically reducing one-point pseudotensors to absolute tensors // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 1(51). p. 17–26. doi:10.37972/chgpu.2022.51.1.002.

[43] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 2(52). p. 106–115. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.012.

[44] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 2(52). P. 118–127. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.013.

[45] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the formulation of boundary conditions in problems of synthesis of woven 3D materials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 1(47). p. 114–121. doi:10.37972/chgpu.2021.1.47.010.

[46] Kopff A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.

[47] Radayev Y. N. Spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Samarskiy universitet, 2006. 340 p.

The present study was financially supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00262 "Coupled thermomechanics of micropolar semi-isotropic media").