

Ю. Д. Щеглова

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ТРЕХСЛОЙНОГО АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. В работе рассматривается упругопластическое кручение анизотропного трехслойного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения. Внутренний слой стержня находится в упругопластическом состоянии, два внешних слоя полностью пластические. При известном напряженном состоянии, известном перемещении в упругой области внутреннего слоя и известной упругопластической границе определено поле перемещений в пластических зонах. Предполагается пластическая анизотропия, частными случаями которой являются анизотропия по Хиллу и трансляционная анизотропия. Параметры анизотропии каждого слоя различны. Используется метод малого параметра. Поле перемещений определено в первом приближении.

Ключевые слова: упругопластическое кручение, анизотропия согласно Хиллу, трансляционная анизотропия, метод малого параметра, перемещение в пластической области

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.001

УДК: 539.375

Введение

Метод малого параметра применялся в работах [1–5] для задач упругопластического кручения анизотропных стержней. Напряженно-деформированное состояние анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения определено в работе [1]. Далее, в работе [2] исследовалась задача упругопластического кручения двухслойного слабоанизотропного стержня. Двухслойный цилиндр при взаимодействии различных видов пластической анизотропии рассмотрен в работах [3, 4]. При этом определено поле напряжений и поле перемещений. Определению напряженного состояния, поля перемещений в упругой зоне внутреннего слоя и упругопластической границе трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения посвящена работа [5]. В представленной работе

© Щеглова Ю. Д., 2023

Щеглова Юлия Дмитриевна

e-mail: scheglova@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.12.2023

определяется поле перемещений в пластических зонах для стержня, рассмотренного в работе [5]. Дано развитие метода малого параметра к определению поля перемещений в пластических областях. Поле перемещений определено в первом приближении.

Постановка задачи

Рассматривается упругопластическое кручение [6] трехслойного пластически анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения. Контуры поперечного сечения представлены замкнутыми кривыми: L_1 - внешняя граница стержня, L_2 и L_3 - границы раздела слоев, L_4 - внутренняя граница. Следуя постановке задачи, описанной в работе [5], предположим, что величина крутящего момента M такова, что внутренний слой находится в упругопластическом состоянии, а два внешних - в пластическом. Пластическая анизотропия слоев подчиняется условию частной анизотропии по Хиллу и трансляционной анизотропии, при этом параметры анизотропии различны для каждого слоя. Используется цилиндрическая система координат (ρ, θ, z) , ось z направлена по оси стержня).

Для определения поля перемещений в пластических областях запишем систему уравнений в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к пределу текучести внутреннего слоя k_3 , а величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу упругопластической границы в нулевом приближении $r_s^{(0)}$. Далее символ "е" сверху означает принадлежность величин к упругой области, символ "р" - к пластической. Условие пластичности в каждом слое примем в форме [1]

$$A_i \left(\tau_{\rho zi}^p \cos \theta - \tau_{\theta zi}^p \sin \theta - k_i \right)^2 + B_i \left(\tau_{\rho zi}^p \sin \theta - \tau_{\theta zi}^p \cos \theta - \chi_i \right)^2 = K_i^2, \quad (1)$$

где $i = 1, 2, 3$; A_i, B_i, k_i, χ_i - параметры анизотропии.

Ассоциированный закон пластического течения согласно (1) будет представлен соотношениями

$$d\varepsilon_{\rho zi}^p = d\lambda_i \left((A_i \cos^2 \theta + B_i \sin^2 \theta) \tau_{\rho zi}^p + (B_i - A_i) \tau_{\theta zi}^p \cos \theta \sin \theta - A_i k_i \cos \theta - B_i \chi_i \sin \theta \right), \quad (2)$$

$$d\varepsilon_{\theta zi}^p = d\lambda_i \left((A_i \sin^2 \theta + B_i \cos^2 \theta) \tau_{\theta zi}^p + (B_i - A_i) \tau_{\rho zi}^p \cos \theta \sin \theta - A_i k_i \sin \theta - B_i \chi_i \cos \theta \right), \quad (3)$$

где λ_i - неизвестные скалярные множители.

Исключая из (2) и (3) $d\lambda_i$, получим ассоциированный закон в виде

$$\begin{aligned} & d\varepsilon_{\rho zi}^p \left((A_i \sin^2 \theta + B_i \cos^2 \theta) \tau_{\theta zi}^p + \right. \\ & \left. + (B_i - A_i) \tau_{\rho zi}^p \cos \theta \sin \theta - A_i k_i \sin \theta - B_i \chi_i \cos \theta \right) = \\ & = d\varepsilon_{\theta zi}^p \left((A_i \cos^2 \theta + B_i \sin^2 \theta) \tau_{\rho zi}^p + \right. \\ & \left. + (B_i - A_i) \tau_{\theta zi}^p \cos \theta \sin \theta - A_i k_i \cos \theta - B_i \chi_i \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Полные деформации во внешних двух слоях совпадают с пластическими деформациями

$$\varepsilon_{\rho zi} = \varepsilon_{\rho zi}^p, \quad \varepsilon_{\theta zi} = \varepsilon_{\theta zi}^p, \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

В третьем внутреннем слое полная деформация складывается из пластической и упругой составляющих

$$\varepsilon_{\rho z 3} = \varepsilon_{\rho z 3}^p + \varepsilon_{\rho z 3}^e, \quad \varepsilon_{\theta z 3} = \varepsilon_{\theta z 3}^p + \varepsilon_{\theta z 3}^e. \quad (6)$$

Упругая составляющая связана с напряжениями законом Гука

$$\varepsilon_{\rho z 3}^e = \frac{\tau_{\rho z 3}^p}{2G}, \quad \varepsilon_{\theta z 3}^e = \frac{\tau_{\theta z 3}^p}{2G}. \quad (7)$$

Связь между полными деформациями и перемещениями в пластической области представлена соотношениями Коши

$$\varepsilon_{\rho z i} = \frac{1}{2} \frac{\partial w_i^p}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_i^p}{\partial \theta} + \omega \rho \right). \quad (8)$$

Постановка задачи дополняется условиями непрерывности перемещений на границах раздела слоев L_2 и L_3

$$w_1^p|_{L_2} = w_2^p|_{L_2}, \quad (9)$$

$$w_2^p|_{L_3} = w_3^p|_{L_3} \quad (10)$$

и условиями непрерывности перемещений на упругопластической границе внутреннего слоя L_S

$$w_3^p|_{L_S} = w_3^e|_{L_S}. \quad (11)$$

Соотношения (4)-(11) служат для определения функций перемещения в пластических областях цилиндрического стержня.

Применение метода малого параметра. Определение первого приближения

Как и в работе [5] будем использовать метод малого параметра [7], который позволяет получить приближенное аналитическое решение поставленной задачи. Ограничимся нулевым и первым приближениями.

Параметры анизотропии представим в виде, следуя [1],

$$A_i = 1 + \delta a_i, \quad B_i = 1 + \delta b_i, \quad k_i = \delta k_i^{(1)}, \quad \chi_i = \delta \chi_i^{(1)}, \quad (12)$$

где δ - безразмерный малый параметр, $\delta \ll 1$, $i = 1, 2, 3$.

Согласно [5], уравнения контуров L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) представим в виде

$$\rho = \alpha_i (1 + d_i \delta \cos m \theta), \quad (13)$$

где $-1 \leq d_i \leq 1$, причем $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$.

Функции напряжений, деформаций и перемещений представим в виде разложений [7]

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(0)} + \delta \tau_{ij}^{(1)}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \delta \varepsilon_{ij}^{(1)}, \quad w = w^{(0)} + \delta w^{(1)}. \quad (14)$$

Упругопластическая граница будет иметь вид

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} + \delta \rho_s^{(1)}. \quad (15)$$

В нулевом приближении имеем задачу упругопластического кручения трехслойного изотропного цилиндрического стержня кругового поперечного сечения, решение которой имеет вид

$$\tau_{\rho z i}^{p(0)} = 0, \quad \tau_{\theta z i}^{p(0)} = K_i, \quad w_i^{p(0)} = 0, \quad \varepsilon_{\rho z i}^{p(0)} = 0, \quad \varepsilon_{\theta z i}^{p(0)} = 0, \quad \rho_s^{(0)} = 1. \quad (16)$$

В работе [5] получены соотношения для компонент напряжений $\tau_{\rho zi}^{p(1)}$ в первом приближении. Они имеют вид

$$\tau_{\rho z1}^{p(1)} = \left(k_1^{(1)} \cos \theta + \chi_1^{(1)} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{4} \sin 2\theta \right) \left(1 - \frac{\alpha_1}{\rho} \right) - \frac{\alpha_1}{\rho} K_1 d_1 m \sin m\theta, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z2}^{p(1)} = & \left(k_2^{(1)} \cos \theta + \chi_2^{(1)} \sin \theta + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{4} \sin 2\theta \right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\rho} \right) + \\ & + \left(k_1^{(1)} \cos \theta + \chi_1^{(1)} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{4} \sin 2\theta \right) \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho} - \\ & - \frac{(\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1))}{\rho} m \sin m\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z3}^{p(1)} = & \left(k_3^{(1)} \cos \theta + \chi_3^{(1)} \sin \theta + \frac{K_3 (a_3 - b_3)}{4} \sin 2\theta \right) \left(1 - \frac{\alpha_3}{\rho} \right) + \\ & + \left(k_2^{(1)} \cos \theta + \chi_2^{(1)} \sin \theta + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{4} \sin 2\theta \right) \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)}{\rho} + \\ & + \left(k_1^{(1)} \cos \theta + \chi_1^{(1)} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{4} \sin 2\theta \right) \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho} - \\ & - \frac{(\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1) + \alpha_3 d_3 (K_3 - K_2))}{\rho} m \sin m\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Также в работе [5] определена в первом приближении и функция депланации в упругой зоне внутреннего слоя. Она имеет форму

$$\begin{aligned} w^e(1) = & -\frac{1}{G\omega (1 - \alpha_4^2)} (M_1 \cos \theta + M_2 \sin \theta) \left(\rho + \frac{\alpha_4^2}{\rho} \right) - \\ & - \frac{1}{2G\omega (1 - \alpha_4^4)} M_3 \left(\rho^2 + \frac{\alpha_4^4}{\rho^2} \right) \sin 2\theta + \\ & + \left(M_4 \left(\rho^m + \frac{\alpha_4^{2m}}{\rho^m} \right) + \frac{d_4 \alpha_4^{m+2}}{\rho^m} \right) \sin m\theta, \end{aligned} \quad (20)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} M_1 &= k_3^{(1)} (\alpha_3 - 1) + k_2^{(1)} (\alpha_2 - \alpha_3) + k_1^{(1)} (\alpha_1 - \alpha_2), \\ M_2 &= \chi_3^{(1)} (\alpha_3 - 1) + \chi_2^{(1)} (\alpha_2 - \alpha_3) + \chi_1^{(1)} (\alpha_1 - \alpha_2), \\ M_3 &= \frac{K_3 (a_3 - b_3)}{2} (\alpha_3 - 1) + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{2} (\alpha_2 - \alpha_3) + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{2} (\alpha_1 - \alpha_2), \\ M_4 &= \frac{1}{G\omega (1 - \alpha_4^{2m})} (\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1) + \alpha_3 d_3 (K_3 - K_2)). \end{aligned}$$

Перейдем к определению поля перемещений в пластических областях в первом приближении.

Ассоциированный закон пластического течения в первом приближении получим подстановкой (12) и (14) в (4)

$$\begin{aligned} & d\varepsilon_{\rho zi}^{p(0)} \left((a_i \sin^2 \theta + b_i \cos^2 \theta) \tau_{\theta zi}^{p(0)} + \tau_{\theta zi}^{p(1)} + (b_i - a_i) \tau_{\rho zi}^{p(0)} \cos \theta \sin \theta - \right. \\ & \quad \left. - k_i^{(1)} \sin \theta - \chi_i^{(1)} \cos \theta \right) + d\varepsilon_{\rho zi}^{p(1)} \tau_{\theta zi}^{p(0)} = \\ & = d\varepsilon_{\theta zi}^{p(0)} \left((a_i \cos^2 \theta + b_i \sin^2 \theta) \tau_{\rho zi}^{p(0)} + \tau_{\rho zi}^{p(1)} + (b_i - a_i) \tau_{\theta zi}^{p(0)} \cos \theta \sin \theta - \right. \\ & \quad \left. - k_i^{(1)} \cos \theta - \chi_i^{(1)} \sin \theta \right) + d\varepsilon_{\theta zi}^{p(1)} \tau_{\rho zi}^{p(0)} . \end{aligned} \quad (21)$$

Учитывая нулевое приближение (16) и соотношение (17) для компоненты $\tau_{\rho z1}^{p(1)}$, в первом внешнем слое из (21) получим

$$d\varepsilon_{\rho z1}^{p(1)} = d\varepsilon_{\theta z1}^{p(0)} \left(-\frac{\alpha_1}{\rho} \right) \Omega_1 , \quad (22)$$

где введено обозначение

$$\Omega_1 = \frac{k_1^{(1)}}{K_1} \cos \theta + \frac{\chi_1^{(1)}}{K_1} \sin \theta + \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta + d_1 m \sin m\theta .$$

Для второго слоя из (21) с учетом (16) и соотношения (18) для компоненты $\tau_{\rho z2}^{p(1)}$ будем иметь

$$d\varepsilon_{\rho z2}^{p(1)} = d\varepsilon_{\theta z2}^{p(0)} \left(-\frac{1}{\rho} \right) \Omega_2 , \quad (23)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & (\alpha_1 - \alpha_2) \left(\frac{k_1^{(1)}}{K_2} \cos \theta + \frac{\chi_1^{(1)}}{K_2} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{2K_2} \sin 2\theta \right) + \\ & + \alpha_2 \left(\frac{k_2^{(1)}}{K_2} \cos \theta + \frac{\chi_2^{(1)}}{K_2} \sin \theta + \frac{(a_2 - b_2)}{2} \sin 2\theta \right) + \\ & + \left(\frac{\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1)}{K_2} \right) m \sin m\theta . \end{aligned}$$

В пластической области внутреннего слоя соотношение (21) подстановкой в него (16) и соотношения (19) для компоненты напряжений $\tau_{\rho z3}^{p(1)}$ дает

$$d\varepsilon_{\rho z3}^{p(1)} = d\varepsilon_{\theta z3}^{p(0)} \left(-\frac{1}{\rho} \right) \Omega_3 , \quad (24)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & (\alpha_1 - \alpha_2) \left(\frac{k_1^{(1)}}{K_3} \cos \theta + \frac{\chi_1^{(1)}}{K_3} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{2K_3} \sin 2\theta \right) + \\ & + (\alpha_2 - \alpha_3) \left(\frac{k_2^{(1)}}{K_3} \cos \theta + \frac{\chi_2^{(1)}}{K_3} \sin \theta + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{2K_3} \sin 2\theta \right) + \\ & + \alpha_3 \left(\frac{k_3^{(1)}}{K_3} \cos \theta + \frac{\chi_3^{(1)}}{K_3} \sin \theta + \frac{(a_3 - b_3)}{2} \sin 2\theta \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1) + \alpha_3 d_3 (K_3 - K_2)}{K_3} \right) m \sin m\theta .$$

В соотношениях (22)-(24) присутствуют величины $d\varepsilon_{\theta zi}^{p(0)}$, которые необходимо найти для последующего интегрирования этих соотношений. Для определения $d\varepsilon_{\theta zi}^{p(0)}$ воспользуемся соотношениями ассоциированного закона пластического течения в нулевом приближении

$$d\varepsilon_{zi}^{p(0)} = d\lambda_i^{(0)} \tau_{\theta zi}^{p(0)} .$$

Учитывая (16), из них получим

$$d\lambda_i^{(0)} = \frac{1}{K_i} d\varepsilon_{zi}^{p(0)} .$$

Для двух внешних слоев с учетом (5), (8) и (16) будем иметь

$$d\varepsilon_{\theta zi}^{p(0)} = d\varepsilon_{\theta zi}^{(0)} = d \left(\frac{1}{2} \left(\omega \rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_i^{p(0)}}{\partial \theta} \right) \right) = d \left(\frac{\omega \rho}{2} \right) , \quad \text{где } i = 1, 2 . \quad (25)$$

Тогда для неизвестных скалярных множителей получим

$$d\lambda_i^{(0)} = d \left(\frac{\omega \rho}{2K_i} \right) ,$$

$$\lambda_i^{(0)} = \frac{\omega \rho}{2K_i} , \quad \text{где } i = 1, 2 . \quad (26)$$

Во внутреннем слое выполняются соотношения (6), учет которых совместно с (7) и (8) дает

$$d\varepsilon_{\theta z3}^{p(0)} = d\varepsilon_{\theta z3}^{(0)} - d\varepsilon_{\theta z3}^{e(0)} = d \left(\frac{1}{2} \left(\omega \rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_3^{p(0)}}{\partial \theta} \right) - d \left(\frac{\tau_{\theta z3}^{p(0)}}{2G} \right) \right) = d \left(\frac{G\omega \rho - K_3}{2G} \right) . \quad (27)$$

Тогда для неизвестного скалярного множителя в третьем слое будем иметь

$$\lambda_3^{(0)} = \frac{G\omega \rho - K_3}{2GK_3} . \quad (28)$$

Выражения (26) и (27) позволяют в соотношениях (22)-(24) перейти от интегрирования по $\lambda_i^{(0)}$ к интегрированию по радиусу упругопластической границы. В первом и втором слоях безразмерный радиус будет меняться от α_2 и α_3 , соответственно, до некоторого значения ρ . В третьем слое в процессе нагружения точка тела переходит в пластическое состояние в момент прохождения через нее упругопластической границы, что соответствует $\rho = 1$. Следовательно, в процессе пластического деформирования безразмерный радиус в точке будет изменяться от 1 до некоторого значения ρ , соответствующего текущему значению приложенных внешних усилий [8].

Проинтегрируем соотношения (22)-(24), учитывая (25) и (27), получим соотношения для компонент пластических деформаций $\varepsilon_{\rho zi}^{p(1)}$. Они имеют вид

$$\varepsilon_{\rho z1}^{p(1)} = \frac{\omega \alpha_1}{2} \Omega_1 \ln \frac{\alpha_2}{\rho} , \quad (29)$$

$$\varepsilon_{\rho z2}^{p(1)} = \frac{\omega}{2} \Omega_2 \ln \frac{\alpha_3}{\rho} , \quad (30)$$

$$\varepsilon_{\rho z3}^{p(1)} = \frac{\omega}{2} \Omega_3 \ln \frac{1}{\rho} . \quad (31)$$

Перейдем к определению функций перемещений в пластических областях.

В первом и втором слое будем использовать первое соотношение (5) и первое соотношение (8). Отметим, что в первом приближении вид этих соотношений не изменяется.

Подставляя в (5) (8) и (29) и интегрируя полученное выражение, получим перемещение во внешнем слое с точностью до неизвестной функции $\varphi_1(\theta)$

$$w_1^{p(1)} = \omega \alpha_1 \Omega_1 \left(\rho \ln \frac{\alpha_2}{\rho} + \rho \right) + \varphi_1(\theta) . \quad (32)$$

Интегрирование соотношения, полученного подстановкой в (5) (8) и (30) дает функцию перемещений во втором слое

$$w_2^{p(1)} = \omega \Omega_2 \left(\rho \ln \frac{\alpha_3}{\rho} + \rho \right) + \varphi_2(\theta) , \quad (33)$$

где $\varphi_2(\theta)$ - неизвестная функция координаты θ .

Функции $\varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2(\theta)$ определяются из условий непрерывности перемещений на границе раздела слоев L_2 и L_3 , соответственно, то есть из соотношений (9) и (10).

Перемещение во внутреннем слое определим с использованием первых соотношений (6)-(8). Подставим (7), (8) и (31) в (6), получим

$$\frac{\partial w_3^{p(1)}}{\partial \rho} = \omega \Omega_3 \ln \frac{1}{\rho} + \frac{\tau_{\rho z 3}^{p(1)}}{G} .$$

Подставляя в это соотношение выражение для $\tau_{\rho z 3}^{p(1)}$ (19), преобразуем его к виду

$$\frac{\partial w_3^{p(1)}}{\partial \rho} = \omega \Omega_3 \ln \frac{1}{\rho} + \Omega_4 \left(\frac{\alpha_3}{\rho} - 1 \right) + \Omega_5 \frac{1}{\rho} , \quad (34)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Omega_4 &= -\frac{1}{G} \left(k_3^{(1)} \cos \theta + \chi_3^{(1)} \sin \theta + \frac{K_3 (a_3 - b_3)}{2} \sin 2\theta \right) , \\ \Omega_5 &= -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{G} \left(k_1^{(1)} \cos \theta + \chi_1^{(1)} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{2} \sin 2\theta \right) - \\ &\quad - \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)}{G} \left(k_2^{(1)} \cos \theta + \chi_2^{(1)} \sin \theta + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{2} \sin 2\theta \right) - \\ &\quad - \frac{1}{G} (\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1) + \alpha_3 d_3 (K_3 - K_2)) m \sin m\theta . \end{aligned}$$

Интегрируя (34), получим функцию перемещения в пластической зоне внутреннего слоя

$$w_3^{p(1)} = \omega \Omega_3 \left(\rho \ln \frac{1}{\rho} + \rho \right) + \Omega_4 (\alpha_3 \ln \rho - \rho) + \Omega_5 \ln \rho + \varphi_3(\theta) , \quad (35)$$

где $\varphi_3(\theta)$ - неизвестная функция, которая определяется из условия непрерывности перемещений на упругопластической границе L_S (11).

Условия непрерывности (9)-(11) в первом приближении получим подстановкой в них разложений (13)-(15) и нулевого приближения (16), в результате будем иметь

$$w_1^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha_2} = w_2^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha_2} , \quad (36)$$

$$w_2^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha_3} = w_3^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha_3} , \quad (37)$$

$$w_3^{p(1)} \Big|_{\rho=1} = \omega w_3^{e(1)} \Big|_{\rho=1} . \quad (38)$$

Сначала определим функцию $\varphi_3(\theta)$ из условия (38). Подставим в него (35) и (20) и выразим $\varphi_3(\theta)$, получим

$$\varphi_3(\theta) = \Omega_6 - \omega \Omega_3 + \Omega_4 ,$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} \Omega_6 = \omega w_3^{e(1)} \Big|_{\rho=1} = & -\frac{(1 + \alpha_4^2)}{G\omega(1 - \alpha_4^2)} (M_1 \cos \theta + M_2 \sin \theta) - \\ & -\frac{(1 + \alpha_4^4)}{2G\omega(1 - \alpha_4^4)} M_3 \sin 2\theta + (M_4(1 + \alpha_4^{2m}) + d_4 \alpha_4^{m+2}) \sin m\theta . \end{aligned}$$

Из условия (37) подстановкой в него (33) и (35) получим функцию $\varphi_2(\theta)$, она будет иметь вид

$$\varphi_2(\theta) = \omega \alpha_3 \Omega_3 \left(\ln \frac{1}{\alpha_3} + 1 \right) + \Omega_4 \alpha_3 (\ln \alpha_3 - 1) + \Omega_5 \ln \alpha_3 - \omega \alpha_3 \Omega_2 + \varphi_3(\theta) .$$

Функция $\varphi_1(\theta)$ определяется из условия (36) подстановкой (32) и (33), в результате чего будем иметь

$$\varphi_1(\theta) = \omega \alpha_2 \Omega_2 \left(\ln \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + 1 \right) - \omega \alpha_1 \alpha_2 \Omega_1 + \varphi_2(\theta) .$$

Заключение

Таким образом, в работе с использованием метода малого параметра определены функции перемещений в пластических областях трехслойного анизотропного цилиндрического стержня при упругопластическом кручении. Поле перемещений определено в первом приближении при известном напряженном состоянии и известном поле перемещений в упругой области и известной упругопластической границе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Упругопластическое состояние толстостенного стержня некругового поперечного сечения при кручении в случае анизотропии общего вида // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4(30). С. 42–54.
- [2] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Применение метода возмущений при определении напряженно-деформированного состояния двухслойного слабоанизотропного стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении // Вестн. Самарского. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. № 2. С. 292–307.
- [3] Щеглова Ю. Д. Применение метода малого параметра в задаче упругопластического кручения двухслойного анизотропного цилиндра // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. Вып. 15 / [редкол. : А. И. Пашкин (гл. редактор) и др.] ; Воронежский государственный университет ; факультет прикладной математики, информатики и механики. 2021. С. 233–238.
- [4] Щеглова Ю. Д. К определению поля перемещений в задаче упругопластического кручения двухслойного анизотропного цилиндра // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. Вып. 16 / [редкол. : С. Н. Медведев (гл. редактор) и др.] ; Воронежский государственный университет ; факультет прикладной математики, информатики и механики. 2023. С. 157–167.

- [5] Щеглова Ю. Д. Метод возмущений при исследовании напряженного состояния трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 72–82.
- [6] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
- [7] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [8] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неодномерные задачи уруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2004. 219 с.

Yu. D. Shcheglova

PERTURBATION METHOD FOR DETERMINING THE DISPLACEMENT FIELD OF A THREE-LAYER ANISOTROPIC CYLINDRICAL ROD OF NON-CIRCULAR CROSS-SECTION UNDER ELASTOPLASTIC TORSION

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The paper considers elastoplastic torsion of an anisotropic three-layer cylindrical rod of non-circular cross-section. The inner layer of the rod is in an elastic-plastic state, the two outer layers are completely plastic. With a known stress state, known displacement in the elastic region of the inner layer and a known elastoplastic boundary, the displacement field in the plastic zones is determined. Plastic anisotropy is assumed, special cases of which are Hill anisotropy and translational anisotropy. The anisotropy parameters of each layer are different. The small parameter method is used. The displacement field is determined to a first approximation.

Keywords: elastoplastic torsion, anisotropy according to Hill, translational anisotropy, stress state, elastoplastic boundary, small parameter method.

REFERENCES

- [1] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Elastic-plastic state of a thick-walled bar of non-circular cross section under torsion in the case of general anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. № 4(30). С. 42–54.
- [2] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Application of the perturbation method in determining the stress-strain state of a two-layer weakly anisotropic rod of non-circular cross section under elastoplastic torsion // Bulletin of Samara. state technical university. Series Phys.-Math. Sciences. 2017. № 2. С. 292–307.
- [3] Shcheglova Yu. D. Application of the small parameter method to the problem of elastoplastic torsion of a two-layer anisotropic cylinder // Bulletin of the Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics. Vol. 15 / [ed. : A.I. Shashkin (chief editor), etc.] ; Voronezh State University; Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics. 2021. № 15. С. 233–238.
- [4] Shcheglova Yu. D. To determine the displacement field in the problem of elastoplastic torsion of a two-layer anisotropic cylinder // Bulletin of the Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics. Vol. 16 / [ed. : S. N. Medvedev (editor-in-chief), etc.] ; Voronezh State University; Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics. 2023. № 16. С. 157–167.
- [5] Shcheglova Yu. D. Perturbation method in studying the stressed state of a three-layer anisotropic cylindrical rod of non-circular cross section under elastic-plastic torsion // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2022. № 4(54). С. 72–82.
- [6] Качанов Л. М. Fundamentals of the theory of plasticity. Moscow: Science, 1969. 420 c.
- [7] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Science, 1978. 208 c.
- [8] Sporykhin A. N., Kovalev A. V., Shcheglova Yu. D. Non-One-Dimensional Problems of Elastic-Visco-Plasticity with an Unknown Boundary. Voronezh: Voronezh State University, 2004. 219 c.

Shcheglova Yuliya Dmitrievna, Candidate Sci. Phys. and Math., Ass. Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia