

В. В. Горяйнов¹, С. Ф. Кузнецов², О. Ю. Никифорова², И. Г. Рукин²

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЕ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПО ВСЕЙ ДЛИНЕ ОДНОЙ СТОРОНЫ И В УГЛАХ ПРОТИВОПОЛОЖНОЙ СТОРОНЫ

¹Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия,

²Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж,
Россия

Аннотация. Построено точное решение задачи о прогибах прямоугольной мембраны, закрепленной по всей длине одной из ее сторон и на противоположной стороне только в угловых точках. Приводится анализ распределения напряжений в мембране, из которого следует, что изменение формы мембраны с квадратной на прямоугольную приводит к изменению количества точек с $\bar{\sigma}_{\max}$ и увеличению значения $\bar{\sigma}_{\max}$.

Ключевые слова: прогиб мембраны, компоненты напряжений, прямоугольник, точное решение, уравнение Пуассона.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.002

УДК: 517.518.454

Введение. Среди тонкостенных конструкций, сочетающих легкость с высокой прочностью, особо выделяются мембранные конструкции, которые находят широкое применение во всех отраслях производства и жизнедеятельности, например, [1, 2]. Мембрану можно закрепить различными способами. Чаще всего мембрану жестко закрепляют по всему контуру [3 - 6]. В работе [7] использовано жесткое перемещение

© Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Никифорова О. Ю., Рукин И. Г., 2023

Горяйнов Виталий Валерьевич

e-mail: gorvit77@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия.

Кузнецов Сергей Федорович

e-mail: sfs134@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Никифорова Ольга Юрьевна

e-mail: niki22@mail.ru, старший преподаватель кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Рукин Иван Геннадьевич

e-mail: thenotnick@gmail.com, аспирант кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.12.2023

контура круглой мембраны. В [8, 9] прямоугольная мембрана закреплена только на длинных сторонах. В данной работе будет проведено исследование напряженного состояния прямоугольной мембраны, закрепленной по всей длине одной из сторон и на противоположной ей стороне закрепление будет только в угловых точках. Подобный вид крепления мембраны можно встретить в работе [10].

1. Постановка задачи и ее решение в общем виде. Покажем в общем виде решение уравнения прогибов мембраны, которые описываются уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + F(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{\square}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (1)$$

где $F(x, y)$ нагрузка на мембрану.

Граничные условия запишем в виде

$$w|_{x=0} = f_1(y), \quad w|_{y=0} = f_2(x), \quad w|_{x=a} = f_3(y), \quad w|_{y=b} = f_4(x). \quad (2)$$

Решение краевой задачи (1), (2) должно удовлетворять условиям согласований

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_2(a) = f_3(0), \quad f_3(b) = f_4(a), \quad f_1(b) = f_4(0), \quad (3)$$

$$w_{xx}(0, 0) + w_{yy}(0, 0) + F(0, 0) = 0, \quad w_{xx}(a, 0) + w_{yy}(a, 0) + F(a, 0) = 0,$$

$$w_{xx}(0, b) + w_{yy}(0, b) + F(0, b) = 0, \quad w_{xx}(a, b) + w_{yy}(a, b) + F(a, b) = 0.$$

Равенства (3) следуют из независимости величины прогибов $w(x, y)$ от направления подхода к этим углам.

Функцию $w(x, y)$ представим конечным выражением в виде суммы граничной функции второго порядка и ряда Фурье по синусам, в котором учтены два коэффициента Фурье [11]

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^4 A_i(y) P_i(x) + A_5(y) \sin \pi \frac{x}{a} + A_6(y) \sin 2\pi \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (4)$$

$$A_i(y) = \sum_{j=1}^4 A_{i,j} P_j(y) + A_{i,5} \sin \pi \frac{y}{b} + A_{i,6} \sin 2\pi \frac{y}{b}, \quad i = 1 \div 6, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$P_1(y) = 1 - \frac{y}{b}, \quad P_2(y) = \frac{y}{b}, \quad P_3(y) = \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}, \quad P_4(y) = \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6},$$

$$P_1(x) = 1 - \frac{x}{a}, \quad P_2(x) = \frac{x}{a}, \quad P_3(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}, \quad P_4(x) = \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}.$$

Таким образом, искомая функция $w(x, y)$ представлена в виде конечной двойной суммы, содержащей 36 неизвестных коэффициентов

$$A_{i,j}, \quad i = 1 \div 6, \quad j = 1 \div 6. \quad (5)$$

Зададим функции $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(x)$, входящие в граничные условия (2), следующим образом

$$f_1(y) = \sum_{j=1}^4 f_{1,j} P_j(y) + f_{1,5} \sin \pi \frac{y}{b} + f_{1,6} \sin 2\pi \frac{y}{b}, \quad (6)$$

$$f_2(x) = \sum_{j=1}^4 f_{2,j} P_j(x) + f_{2,5} \sin \pi \frac{x}{a} + f_{2,6} \sin 2\pi \frac{x}{a},$$

$$f_3(y) = \sum_{j=1}^4 f_{3,j} P_j(y) + f_{3,5} \sin \pi \frac{y}{b} + f_{3,6} \sin 2\pi \frac{y}{b},$$

$$f_4(x) = \sum_{j=1}^4 f_{4,j} P_j(x) + f_{4,5} \sin \pi \frac{x}{a} + f_{4,6} \sin 2\pi \frac{x}{a},$$

где постоянные $f_{i,j}$, $i = 1 \div 4$, $j = 1 \div 6$ считаем известными величинами.

Нагрузку на мембрану $F(x, y)$ запишем конечной суммой по аналогии с зависимостью (4):

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^4 F_i(y) P_i(x) + F_5(y) \sin \pi \frac{x}{a} + F_6(y) \sin 2\pi \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (7)$$

$$F_i(y) = \sum_{j=1}^4 F_{i,j} P_j(y) + F_{i,5} \sin \pi \frac{y}{b} + F_{i,6} \sin 2\pi \frac{y}{b}, \quad i = 1 \div 6, \quad 0 \leq y \leq b$$

Все коэффициенты $F_{i,j}$, $i = 1 \div 6$, $j = 1 \div 6$ в выражении (7) для нагрузки считаем известными, так как $F(x, y)$ – заданная функция.

В работе [11] приведено решение уравнения (1) с заданной нагрузкой на мембрану в виде (7), которое точно удовлетворяет граничным условиям (2) и условиям согласований (3).

Таким образом, значения коэффициентов $A_{i,j}$ будут определяться равенствами [11]:

$$A_{1,j} = f_{1,j}, \quad A_{2,j} = f_{3,j}, \quad j = 1 \div 6, \quad (8)$$

$$A_{3,1} = f_{2,3}, \quad A_{3,2} = f_{4,3}, \quad A_{3,3} = -F_{1,3}, \quad A_{3,4} = -F_{1,4}, \quad A_{3,5} = \frac{\pi^2}{b^2} f_{1,5} - F_{1,5},$$

$$A_{3,6} = \frac{4\pi^2}{b^2} f_{1,6} - F_{1,6},$$

$$A_{4,1} = f_{2,4}, \quad A_{4,2} = f_{4,4}, \quad A_{4,3} = -F_{4,1}, \quad A_{4,4} = -F_{2,4}, \quad A_{4,5} = \frac{\pi^2}{b^2} f_{3,5} - F_{2,5},$$

$$A_{4,6} = \frac{4\pi^2}{b^2} f_{3,6} - F_{2,6},$$

$$A_{5,1} = f_{2,5}, \quad A_{5,2} = f_{4,5}, \quad A_{5,3} = \frac{\pi^2}{a^2} f_{2,5} - F_{5,1}, \quad A_{5,4} = \frac{\pi^2}{a^2} f_{4,5} - F_{5,2},$$

$$A_{5,5} = F_{5,5} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right), \quad A_{5,6} = F_{5,6} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right),$$

$$A_{6,1} = f_{2,6}, \quad A_{6,2} = f_{4,6}, \quad A_{6,3} = \frac{4\pi^2}{a^2} f_{2,6} - F_{6,1}, \quad A_{6,4} = \frac{4\pi^2}{a^2} f_{4,6} - F_{6,2},$$

$$A_{6,5} = F_{6,5} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right), \quad A_{6,6} = F_{6,6} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right).$$

Подставив коэффициенты из (8) в выражение (4), будем иметь точное решение задачи.

При задании граничных условий (2) и нагрузки на мембрану (7) должны выполняться следующие условия:

$$f_{1,1} = f_{2,1}, \quad f_{2,2} = f_{3,1}, \quad f_{3,2} = f_{4,2}, \quad f_{1,2} = f_{4,1}, \quad (9)$$

$$F_{3,3} = F_{3,4} = F_{4,3} = F_{4,4} = 0. \quad (10)$$

$$f_{1,3} = -f_{2,3} - F_{1,1}, \quad f_{1,4} = -f_{4,3} - F_{1,2}, \quad f_{3,3} = -f_{2,4} - F_{2,1}, \quad f_{3,4} = -f_{4,4} - F_{2,2}. \quad (11)$$

$$F_{1,3} = F_{3,1}, \quad F_{1,4} = F_{3,2}, \quad F_{4,1} = F_{2,3}, \quad F_{2,4} = F_{4,2}. \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
f_{1,5} &= \frac{b^2}{\pi^2} \left(\frac{b^2}{\pi^2} F_{3,5} + F_{1,5} \right), & f_{1,6} &= \frac{b^2}{4\pi^2} \left(\frac{b^2}{4\pi^2} F_{3,6} + F_{1,6} \right), \\
f_{2,5} &= \frac{a^2}{\pi^2} \left(\frac{a^2}{\pi^2} F_{5,3} + F_{5,1} \right), & f_{2,6} &= \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\frac{a^2}{4\pi^2} F_{6,3} + F_{6,1} \right), \\
f_{3,5} &= \frac{b^2}{\pi^2} \left(\frac{b^2}{\pi^2} F_{4,5} + F_{2,5} \right), & f_{3,6} &= \frac{b^2}{4\pi^2} \left(\frac{b^2}{4\pi^2} F_{4,6} + F_{2,6} \right), \\
f_{4,5} &= \frac{a^2}{\pi^2} \left(\frac{a^2}{\pi^2} F_{5,4} + F_{5,2} \right), & f_{4,6} &= \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\frac{a^2}{4\pi^2} F_{6,4} + F_{6,2} \right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Следовательно, решение (8) имеет место, когда выполнены условия (9) – (13).

2. Построение точного решения задачи о прогибах прямоугольной мембраны, закрепленной по всей длине одной из сторон и на противоположной ей стороне в угловых точках. Пусть на мембрану действует постоянная нагрузка. Подобную нагрузку можно получить из выражений (7) и условия (11) при выполнении равенств

$$F_1(y) = F_2(y), \quad F_3(y) = F_4(y) = F_5(y) = F_6(y) = 0. \tag{14}$$

Условие $F_1(y) = F_2(y)$ в равенствах (14) означает равенство коэффициентов

$$F_{1,1} = F_{1,2} = F_{2,1} = F_{2,2} = Q \tag{15}$$

с одновременным равенством нулю остальных коэффициентов:

$$F_{1,3} = F_{1,4} = F_{1,5} = F_{1,6} = F_{2,3} = F_{2,4} = F_{2,5} = F_{2,6} = 0. \tag{16}$$

Таким образом, при выполнении равенств (14) – (16) имеем постоянную нагрузку на мембрану

$$F(x, y) = Q. \tag{17}$$

Запишем граничные условия, которые будут выполняться для нагрузки (17). Для этого, с учетом равенств (15) перепишем равенства (11) в виде

$$f_{1,3} + f_{2,3} + Q = 0, \quad f_{1,4} + f_{4,3} + Q = 0, \quad f_{2,4} + f_{3,3} + Q = 0, \quad f_{4,4} + f_{3,4} + Q = 0. \tag{18}$$

Пусть в формулах (6) только коэффициенты, входящие в равенства (18), могут быть отличны от нуля. Для этого случая возможны несколько вариантов граничных условий, соответствующих разным комбинациям значений коэффициентов в равенствах (18). Пусть

$$f_{1,3} = f_{1,4} = f_{2,4} = f_{4,4} = 0, \quad f_{2,3} = f_{4,3} = f_{3,3} = f_{3,4} = -Q. \tag{19}$$

Тогда, если учесть значения коэффициентов из равенств (19), то граничные условия (2) примут вид

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=a} = -\frac{Q}{2} (y^2 - by), \quad w|_{y=0} = w|_{y=b} = -Q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3} \right). \tag{20}$$

Подставляя в выражения (8) коэффициенты из равенств (16) и (19), получим:

$$A_{2,3} = A_{2,4} = A_{3,1} = A_{3,2} = -Q.$$

После упрощений точное решение уравнения (1), соответствующее условиям (20), с постоянной нагрузкой (17) принимает вид

$$w(x, y) = -\frac{Q}{2} (y^2 - by) \frac{x}{a} - Q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3} \right). \tag{21}$$

Равенство (21) позволяет вычислить прогиб прямоугольной мембраны в любой точке. Например, при подстановке в (21) $x = a/2$ и $y = b/2$ имеем формулу для прогиба в центре мембраны под действием постоянной нагрузки

$$w\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right) = \frac{Q}{16}(a^2 + b^2). \quad (22)$$

Из формулы (22) следует, что при $a = b$ прогиб в центре квадратной мембраны пропорционален второй степени ее линейного размера.

Выберем в качестве материала мембраны конструкционную углеродистую сталь обыкновенного качества марки ВСтЗпс [2] со следующими характеристиками [12, 13]

$$R_y = 2.35 \cdot 10^8 \text{ Па}, \nu = 0,25, E = 2,13 \cdot 10^{11} \text{ Па},$$

где R_y - расчетное сопротивление материала мембраны.

Значения параметров a , b , Q подбирались так, чтобы напряжения не превосходили расчетное сопротивление материала мембраны при двухосном напряженном состоянии [1, 4]

$$\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2} = \tilde{\sigma} \leq R_y \quad (23)$$

где

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2. \quad (24)$$

Вид прогиба мембраны под действием нагрузки (17) для данных

$$Q = 1 \cdot 10^{-2}, a = 0.5 \text{ м.}, b = 0.5 \text{ м.} \quad (25)$$

показан на рис. 1. Компоненты напряжений, вычисленные по формулам (24), показаны на рис. 2, а распределение $\tilde{\sigma}$, рассчитанное по формуле (23), изображено на рис. 3

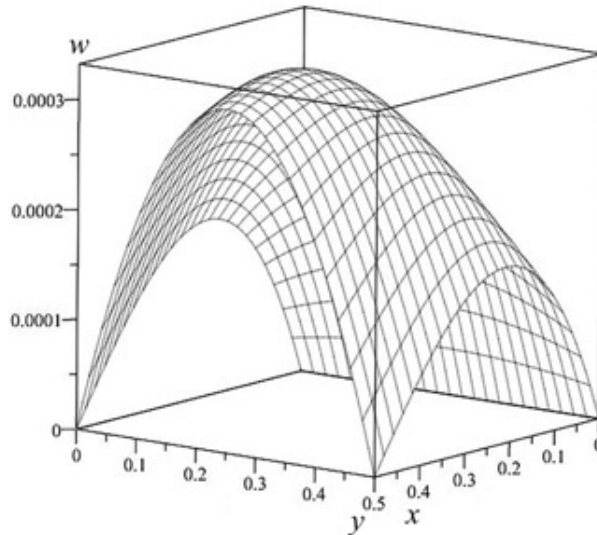
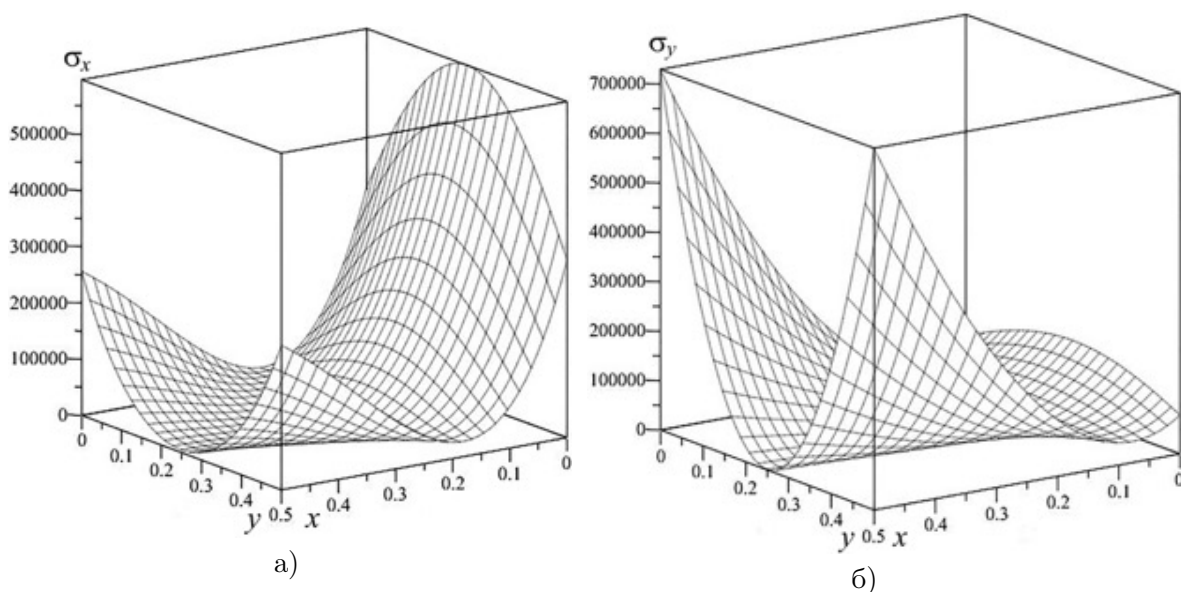
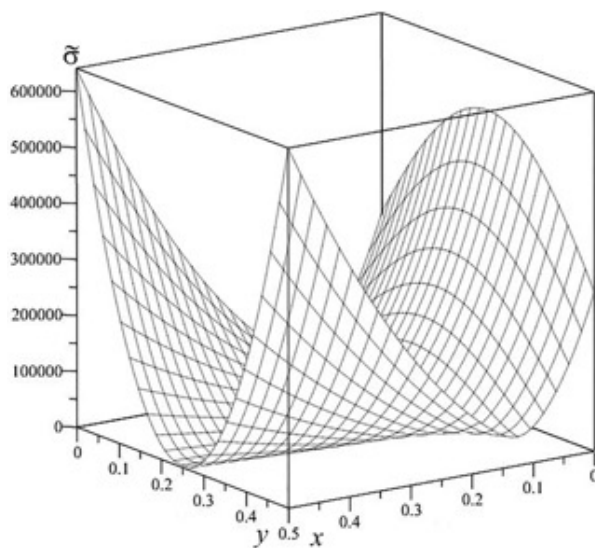


Рис. 1. Прогиб квадратной мембраны

Рис. 2. Компоненты напряжений в квадратной мембране: а) σ_x ; б) σ_y Рис. 3. Распределение $\tilde{\sigma}$ в квадратной мембране

Как видно из рис. 1- рис. 3 прогиб мембраны, компоненты напряжений и распределение $\tilde{\sigma}$ симметричны относительно плоскости $y = b/2$. В отличие от максимального прогиба мембраны, закрепленной по всему периметру [3 – 6], максимальный прогиб квадратной мембраны, закрепленной по всей длине одной стороны и в углах противоположной стороны, находится не в центре области мембраны, а смещен относительно центра в точку $(0.71a; b/2)$. Также при задании граничных условий (20) меняется

расположение точек с максимальным напряжением $\tilde{\sigma}_{\max}$ по отношению к граничным условиям [3 – 6]. В нашем случае распределение $\tilde{\sigma}$ (см. рис. 3) имеет две точки с максимальным напряжением $\tilde{\sigma}_{\max}$, которые расположены на границе $x = a$ в точках $(a; b)$ и $(a; 0)$.

Изменение формы мембраны с квадратной на прямоугольную приводит к изменению вида прогиба мембраны и вида распределения $\tilde{\sigma}$. Так, значения максимального прогиба w_{\max} прямоугольной мембраны будут смещаться вдоль плоскости симметрии $y = b/2$ вправо или влево в зависимости от того какая из двух смежных сторон прямоугольника увеличивается. Если возрастает длина закрепленной стороны, то значение w_{\max} смещается влево относительно точки $(0.71a; b/2)$, и при соотношении сторон $a/b \leq 5/6$ значение w_{\max} будет расположено в точке $(a; b/2)$. Если возрастает длина стороны смежной к закрепленной, то значение w_{\max} смещается вправо относительно точки $(0.71a; b/2)$, и при соотношении сторон $a/b \geq 4$ значение w_{\max} будет расположено на плоскости $y = b/2$ в окрестности точки $(0.44a; b/2)$. Примеры прогибов прямоугольной мембраны при размерах $a = 1/2, b = 2$ и $a = 2, b = 1/2$ представлены на рис. 4.

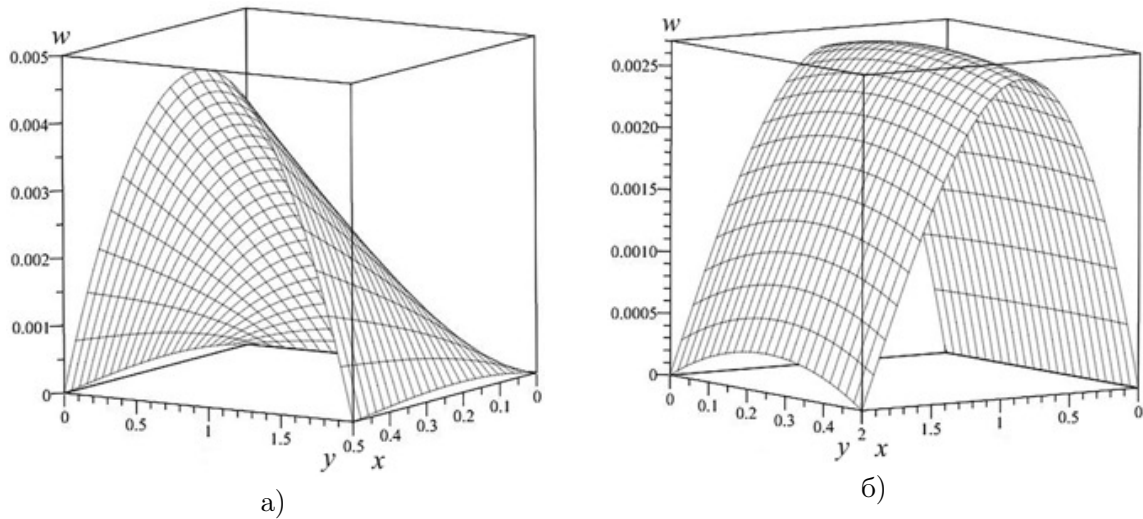


Рис. 4. Прогиб прямоугольной мембраны: а) $a = 1/2$ и $b = 2$; б) $a = 2$ и $b = 1/2$

Опишем изменения распределения $\tilde{\sigma}$, вызванные увеличением длины одной из сторон мембраны. Так, при увеличении длины полностью закрепленной стороны возрастают напряжения в плоскости симметрии $y = b/2$. При отношении сторон мембраны $a/b = 36/125$ величина напряжений в точке $(0; b/2)$ становится равной величине напряжений в точках $(a; b)$ и $(a; 0)$. Таким образом, при данном соотношении сторон имеем три точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$. При дальнейшем увеличении длины полностью закрепленной стороны величина напряжений в точке $(0; b/2)$ становится больше, чем напряжения в угловых точках $(a; b)$ и $(a; 0)$, т.е. распределение $\tilde{\sigma}$ будет иметь только одно значение с $\tilde{\sigma}_{\max}$. Подобное распределение $\tilde{\sigma}$ показано на рис. 5а. Уменьшение длины полностью закрепленной стороны приводит к снижению напряжений в углах противоположной стороны и при отношении $a/b > 1.19$ напряжения в угловых точках $(a; b)$, $(a; 0)$ будут

меньше чем напряжения в середине закрепленной стороны (точка $(0; b/2)$). Характерное распределение $\tilde{\sigma}$ в прямоугольной мембране для случая $a/b > 1.19$ изображено на рис. 5б.

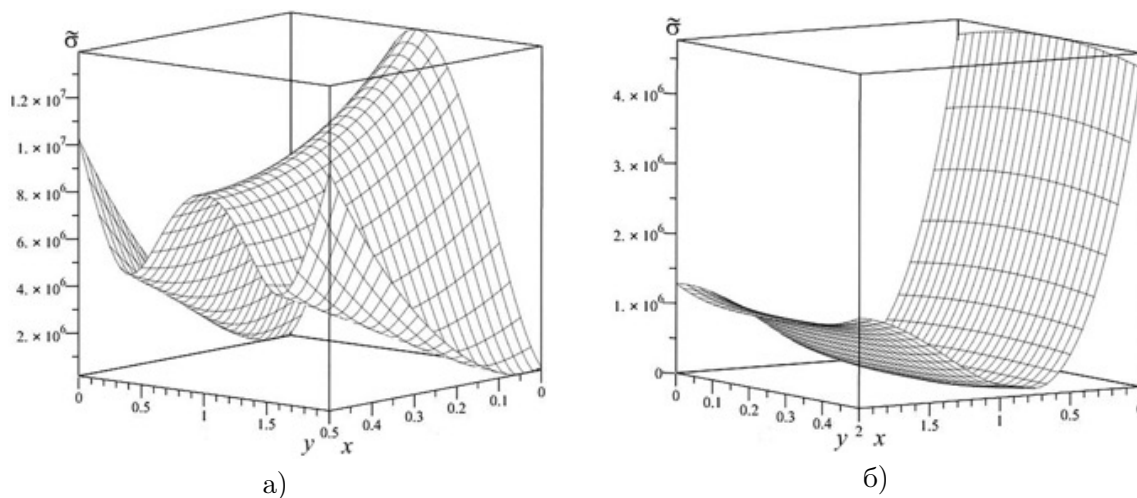


Рис. 5. Распределение $\tilde{\sigma}$ в прямоугольной мембране: а) $a = 1/2$ и $b = 2$; б) $a = 2$ и $b = 1/2$

Таким образом, изменение формы мембраны с квадратной на прямоугольную приводит к изменению количества точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$. Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$ и их координаты в зависимости от отношения сторон a/b приведены в табл. 1 и табл. 2

Размеры мембраны, м	$a = 1/2$						
	$b = 1/2$	$b = 1$	$b = 3/2$	$b = 1.576$	$b = 2$	$b = 5/2$	$b = 3$
Отношение a/b	1	1/2	1/3	36/125	1/4	1/5	1/6
Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	2	2	2	3	1	1	1
Координаты точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	$(a; b), (a; 0)$	$(a; b), (a; 0)$	$(a; b), (a; 0)$	$(a; b), (a; 0), (0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$

Таблица 1. Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$ и их координаты при закреплении длинной стороны мембраны

Из табл. 1 видно, что при отношении сторон $a/b > 36/125$ у прямоугольной мембраны будут две точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$ с теми же координатами, что и у квадратной мембраны. При $a/b = 36/125$ величина напряжений в точке $(0; b/2)$ становится равной величине напряжений в точках $(a; b)$ и $(a; 0)$. Таким образом, при данном соотношении сторон

имеем три точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$. При $a/b < 36/125$ величина напряжений в точке $(0; b/2)$ становится больше, чем напряжения в угловых точках $(a; b)$ и $(a; 0)$, т.е. распределение $\tilde{\sigma}$ будет иметь только одно значение с $\tilde{\sigma}_{\max}$. При закреплении мембраны по короткой стороне (см. табл. 2) максимальные напряжения $\tilde{\sigma}_{\max}$ находятся в точках с теми же координатами, что и при закреплении мембраны по длинной стороне. Отметим только, что напряженное состояние с тремя точками $\tilde{\sigma}_{\max}$ при закреплении мембраны по короткой стороне наступает гораздо быстрее, чем при закреплении мембраны по длинной стороне.

Размеры мембраны, м	$b = 1/2$						
	$a = 1/2$	$a = 0.595$	$a = 1$	$a = 3/2$	$a = 2$	$a = 5/2$	$a = 3$
Отношение a/b	1	1.19	2	3	4	5	6
Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	2	3	1	1	1	1	1
Координаты точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	$(a; b),$ $(a; 0)$	$(a; b),$ $(a; 0),$ $(0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$

Таблица 2. Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$ и их координаты при закреплении короткой стороны мембраны

Результаты исследований, приведенные в табл. 1 и табл. 2, соответствуют мембранам различной площади, и какое соотношение сторон a/b является оптимальным с точки зрения наименьшего значения $\tilde{\sigma}_{\max}$ определить нельзя. Поэтому для выяснения наилучшего соотношения сторон a/b в расчетах будем выбирать размеры сторон мембраны таким образом, чтобы площадь ее сечения оставалась постоянной. Результаты вычислительных экспериментов приведены в табл. 3 и табл. 4, из которых видно, что в квадратной мембране значение $\tilde{\sigma}_{\max}$ будет минимальным.

Размеры мембраны, м	$a = b = 1/2$	$a = 1, b = 1/4$	$a = 3/2, b = 1/6$	$a = 2, b = 1/8$
Отношение a/b	1	4	9	16
Значение $\tilde{\sigma}_{\max}$, Па	$0.64 \cdot 10^6$	$1.19 \cdot 10^6$	$2.58 \cdot 10^6$	$4.56 \cdot 10^6$
Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	2	1	1	1

Таблица 3. Значения $\tilde{\sigma}_{\max}$ в мембранах одинаковой площади и различного отношения a/b при закреплении короткой стороны

Если необходимо использовать прямоугольную мембрану, то с целью уменьшения в ней напряжений следует выбрать короткую сторону в качестве стороны для жесткого

Размеры мембраны, м	$a = b = 1/2$	$a = 1/4, b = 1$	$a = 1/6, b = 3/2$	$a = 1/8, b = 2$
Отношение a/b	1	1/4	1/9	1/16
Значение $\tilde{\sigma}_{\max}$, Па	$0.64 \cdot 10^6$	$3.48 \cdot 10^6$	$3.11 \cdot 10^7$	$1.67 \cdot 10^8$
Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	2	1	1	1

Таблица 4. Значения $\tilde{\sigma}_{\max}$ в мембранах одинаковой площади и различного отношения a/b при закреплении длинной стороны

закрепления (см. табл. 3 и табл. 4), а габаритные размеры должны быть приближены к квадратным.

Заключение. Если прямоугольная мембрана закреплена по всей длине одной из сторон и на противоположной ей стороне только в угловых точках, то габаритные размеры мембраны влияют на количество точек с максимальным напряжением $\tilde{\sigma}_{\max}$ и на величину $\tilde{\sigma}_{\max}$. У квадратной мембраны имеется две точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$, расположенные в углах $(a; b)$ и $(a; 0)$. У прямоугольной мембраны количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$ зависит от отношения сторон a/b . Возможны три варианта расположения точек: 1) две точки в углах $(a; b)$ и $(a; 0)$; 2) три точки - в углах $(a; b)$, $(a; 0)$ и середине противоположной стороны $(0; b/2)$; 3) одна точка - $(0; b/2)$. Напряженное состояние мембраны, имеющей три точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$, наступает при различном отношении a/b в зависимости от того какая сторона закреплена длинная или короткая. Для длинной стороны $a/b = 0.288$, а для короткой $a/b = 1.19$. Также в ходе вычислительных экспериментов установлено, что наименьшие напряжения $\tilde{\sigma}_{\max}$, из всех возможных отношений a/b , наблюдаются у квадратной мембраны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Еремеев П.Г. Пространственные тонколистовые металлические конструкции покрытий. Москва: Издательство ассоциации строительных вузов. 2006. 560 с.
- [2] Якупов С.Н., Якупов Н.М. Тонкослойные покрытия // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 1. С. 6–14.
- [3] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука. 1979. 560 с.
- [4] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. Москва: Наука. 1966. 636 с.
- [5] Васильев В. В., Лурье С. А. Обобщенное решение задачи о круглой мембране, нагруженной сосредоточенной силой // Известия РАН. МТТ. 2016. № 3. С. 115 – 119.
- [6] Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки / А.Д. Чернышов, В.В. Горайнов, С.Ф. Кузнецов [и др.] // Вестник томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 127 – 142.
- [7] Александров В.М., Саламатова В.Ю. Изгиб круглой мембраны на линейно-деформируемом основании // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, № 4. С. 672 – 676.
- [8] Локощенко А.М., Терауд В.В. Ползучесть длинной узкой мембраны в стесненных условиях вплоть до разрушения // ПМТФ. 2013. Т. 54, №3. С. 126-133.
- [9] Ларин С.Н., Бессмертный А.В. Изотермическое свободное деформирование узкой прямоугольной мембраны из анизотропного листового материала при кратковременной ползучести // Известия ТулГУ. Технические науки. 2010. Вып. 1. С. 44-51.

- [10] Рекомендации по проектированию мембранных покрытий на прямоугольном плане для реконструируемых зданий и сооружений. Москва: ЦНИИСК им. Кучеренко. 1989. 90 с.
- [11] Using of fast expansions in the construction of twodimensional exact solutions of the Poisson equation / A.D. Chernyshov, V.V. Goryainov, M.I. Popov et al. // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. 1479. 012146.
- [12] <http://www.vashdom.ru/snip/II-23-81/index-7.htm>
- [13] http://metallichekiy-portal.ru/marki_metallov/stk/VSt3s

V.V. Goryainov¹, S. F. Kuznetsov², O. Yu. Nikiforova², I. G. Rukin²

STRESS STUDY IN A RECTANGULAR MEMBRANE FIXED ALONG THE ENTIRE LENGTH OF ONE SIDE AND IN THE CORNERS OF THE OPPOSITE SIDE

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia¹,
Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia².

Abstract. An exact solution to the problem of deflections of a rectangular membrane fixed along the entire length of one of its sides and on the opposite side only at corner points is constructed. An analysis of the stress distribution in the membrane is presented, from which it follows that changing the shape of the membrane from square to rectangular leads to a change in the number of points with $\tilde{\sigma}_{\max}$ and an increase in the value of $\tilde{\sigma}_{\max}$.

Keywords: membrane deflection, stress components, rectangle, exact solution, Poisson equation.

REFERENCES

- [1] Ereemeev P.G. Spatial light-gage metal construction coatings. Moscow: Izdatel'stvo assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2006.560 p. (in Russian).
- [2] Yakupov S.N., Yakupov N.M. Thin-layer coatings // Structural mechanics of engineering structures and structures. 2017. no. 1. P. 6–14. (in Russian).
- [3] Timoshenko S. P., Goodyear J. Theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1979. 560 p. (in Russian).
- [4] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. Moscow: Nauka, 1966. 636 p. (in Russian).
- [5] Vasil'ev V.V., Lurie S.A. Generalized solution of the problem on a circular membrane loaded by a lumped force. // Mechanics of Solids. no. 51(3). 2016. P. 334–338.
- [6] Application of fast expansions to obtain exact solutions to a problem on rectangular membrane deflection under alternating load/ A.D. Chernyshov, V.V. Goryainov, S.F. Kuznetsov et al. // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. no. 70. 2021. P. 127–142.
- [7] Aleksandrov V.M., Salamatova V.Y. The bending of a circular membrane on a linearly deformed foundation // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. no. 75(4). 2011. P. 472–475.
- [8] Lokoshchenko A.M., Teraud V.V. Creep of a long narrow membrane up to fracture under constrained conditions // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. no. 54(3). P. 451–457.

Goryainov Vitaly Valerievich, Ph.D. in Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia.

Kuznetsov Sergey Fedorovich, Ph.D. in Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

Nikiforova Olga Yurievna, Senior Lecturer, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

Rukin Ivan Gennadievich, post-graduate student, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

-
- [9] Larin S.N., Bessmertny A.V. The free isothermal deforming of the narrow orthogonal membrane from the anisotropic sheet material in the mode of short-durated creeping conditions // Izvestia of Tula State University. Technical science. no. 1. 2010. P. 44-51. (in Russian).
- [10] Recommendations for the design of membrane coverings on a rectangular plan for reconstructed buildings and structures. Moscow: TsNIISK im. Kucherenko. 1989. 90 p. (in Russian).
- [11] Using of fast expansions in the construction of twodimensional exact solutions of the Poisson equation / A.D. Chernyshov, V.V. Goryainov, M.I. Popov et al. //IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. no. 1479. P. 012146.
- [12] <http://www.vashdom.ru/snip/II-23-81/index-7.htm>
- [13] http://metallichekiy-portal.ru/marki_metallov/stk/VSt3ps