Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. №4 (58). С. 47–51

Б. Г. Миронов[1], *Ю. Б. Миронов*[2]

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ СЕКТОРА КОЛЬЦА

[1] *Российский университет транспорта, г. Москва, Россия*
[2] *Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия*

Аннотация. В настоящей работе исследуются напряженное и деформированное состояния сектора кольца из идеального жесткопластического материала при деформации кручения. В работе [1] исследовано упругое, чисто пластическое и упруго-пластическое распределение напряжений при кручении стержней, основываясь на полубратном методе Сен-Венана. В [2] рассмотрены основные уравнения и граничные условия теории кручения идеально пластических стержней, определены напряженное и деформированное состояния стержней, найдены разрывные решения. Исследовано кручение различных стержней, сектора кругового кольца, стержней переменного сечения из идеального жестко-пластического материала. В [3] определены общие соотношения теории кручения стержней при одном виде анизотропии – трансляционной анизотропии. В работе [4] исследуется диссипативная функция теории трансляционной идеально пластической анизотропии при кручении. [5] посвящена изучению предельного состояния трансляционно анизотропных стержней при деформации кручении. В [6] исследуется кручение изотропного сектора толстостенной трубы. В работе [7], при условии нахождения стержня под действием внешнего давления, решена задача определения компонент деформации в случае кручения.

Ключевые слова: кручение, изотропия деформация кручения, компоненты напряжения, условие пластичности, тензор деформации, уравнения равновесия, перемещения.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.005

УДК: 539.374

Рассмотрим сектор кольца из идеального жестко-пластического изотропного материала. Предположим, что он ориентирован в цилиндрической системе координат $\rho\theta z$, имеет внутренний радиус равный r и внешний радиус - R. Осью симметрии кольца

Миронов Борис Гурьевич
`e-mail`: mbg.chspu@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и естественных наук, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.
Миронов Юрий Борисович
`e-mail`: i.b.mironov@mtuci.ru, кандидат технических наук, декан факультета «Сети и системы связи», Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 20.11.2023

является ось z. Сектор ограничен сверху и снизу плоскостями $z = \pm a$. Боковая поверхность сектора предполагается свободной от нагрузок и он полностью находится в пластическом состоянии.

Напряженное состояние, возникающее в секторе кольца, описывается условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6(\tau_{\rho\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho z}^2) = 6k^2, \ (k - const) \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Для определения напряженного состояния воспользуемся полуобратным методом Сен-Венана и положим

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{\rho z} = 0,$$

В соответствии с этим из системы уравнений (1) и (2) получим

$$\tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}(\rho, z), \ \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}(\rho, z) \tag{3}$$

$$\tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho\theta}^2 = k^2, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \tag{5}$$

$$\tau_{\rho\theta}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial z} + \tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Представим с уравнение (5) в виде

$$\tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta} = \frac{-2\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}{\rho} \tag{7}$$

Тогда из соотношений (6) и (7) следует

$$\tau_{\theta z}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho} - \tau_{\rho\theta}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial z} = \frac{-2\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}{\rho}. \tag{8}$$

Для определения характеристик уравнения (8) и соотношений вдоль характеристик имеем следующую системы соотношений

$$\frac{d\rho}{\tau_{\theta z}} = -\frac{dz}{\tau_{\rho\theta}} = \frac{\rho d\tau_{\rho\theta}}{-2\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}. \tag{9}$$

Согласно (9) компонента напряжения $\tau_{\rho\theta}$ определяется из уравнения

$$\frac{d\tau_{\rho\theta}}{d\rho} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \tag{10}$$

Согласно (10) находим компоненту напряжения $\tau_{\rho\theta}$ в виде

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{c_1}{\rho^2} \tag{11}$$

где $c_1 = const$ вдоль характеристики.

Согласно (11) компоненту напряжения $\tau_{\theta z}$ находим из (4)

$$\tau_{\theta z} = \pm\sqrt{k^2 - \frac{c_1^2}{\rho^4}}. \tag{12}$$

Согласно равенствам (11) и (12) из соотношений (9) получим уравнение характеристик $dz = \pm\frac{c_1}{\sqrt{k^2\rho^4 - c_1^2}.}d\rho$

Рассмотрим поперечное сечение $\theta = const$ сектора кольца, которое задается следующими неравенствами $r \leq \rho \leq R$, $-a \leq z \leq a$.

В силу того, что боковая поверхность кольца свободна от нагрузок, вектор касательного напряжения $\tau = (\tau_{\rho\theta},\, \tau_{\theta z})$ направлен по касательной к контуру поперечного сечения сектора кольца. Поэтому при $\rho = R$ и в области, примыкающей к ней, имеем

$$\tau_{\theta z} = k \text{ и } \tau_{\rho\theta} = 0. \tag{13}$$

Аналогично, при $z = a$ и в области, примыкающей к ней, справедливы равенства

$$\tau_{\rho\theta} = -k \text{ и } \tau_{\theta z} = 0. \tag{14}$$

В соответствии с соотношениями (13) и (14) находим линию разрыва напряжений, выходящей из вершины с координатами $\rho = R$, $z = a$ контура сечения сектора кольца

$$z = \rho - R + a \tag{15}$$

В соответствии с ассоциированным законом пластического течения определяются компоненты скоростей деформации. С учетом уравнения (4) имеем

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \varepsilon_{\rho z} = 0,\; \tau_{\rho\theta}\varepsilon_{\theta z} = \tau_{\theta z}\varepsilon_{\rho\theta} \tag{16}$$

где ε_ρ, ε_θ, ε_z, $\varepsilon_{\rho\theta}$, $\varepsilon_{\theta z}$, $\varepsilon_{\rho z}$ – компоненты тензора скоростей деформации.

Пологая, что в начальный момент деформирования все компоненты деформации равны нулю, и, интегрируя соотношения (16) получим

$$e_\rho = e_\theta = e_z = e_{\rho z} = 0,\; \tau_{\rho\theta}e_{\theta z} = \tau_{\theta z}e_{\rho\theta} \tag{17}$$

где e_ρ, e_θ, e_z, $e_{\rho\theta}$, $e_{\theta z}$, $e_{\rho z}$ – компоненты тензора деформации.

Воспользуемся соотношениями связи между компонентами тензора деформации e_ρ, e_θ, e_z, $e_{\rho\theta}e_{\theta z}$, $e_{\rho z}$ и компонентами перемещений u, v, w

$$e_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho},\; e_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta},\; e_z = \frac{\partial w}{\partial z},\; e_{\rho z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right) \tag{18}$$

$$e_{\rho\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) e_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right). \tag{19}$$

Согласно соотношениям (17) (18) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0,\; \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0,\; \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\; \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0. \tag{20}$$

Полагая

$$u = 0,\; w = \xi\theta,\; v = v\,(\rho, z) \tag{21}$$

где $\xi = const$ удовлетворим соотношениям (20).

С учетом (19) и (21) имеем

$$\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho} - \frac{\partial e_{\rho\theta}}{\partial z} = -\frac{3\xi}{2\rho^2} + \frac{e_{\theta z}}{\rho} \tag{22}$$

Находя частные производные по переменной z от обеих частей последнего соотношения исистемы (17), получим

$$\tau_{\rho\theta}\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial z} - \tau_{\theta z}\frac{\partial e_{\rho\theta}}{\partial z} = e_{\rho\theta}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} - e_{\theta z}\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial z} \tag{23}$$

Тогда, согласно (22) и (23), имеем

$$\tau_{\theta z}\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho}-\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial z}=\tau_{\theta z}\left(-\frac{3\xi}{2\rho^2}+\frac{e_{\theta z}}{\rho}\right)-e_{\rho\theta}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}+e_{\theta z}\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial z} \tag{24}$$

Характеристики и соотношения вдоль характеристик уравнения (24) найдем из системы

$$\frac{d\rho}{\tau_{\theta z}}=-\frac{dz}{\tau_{\rho\theta}}=\frac{de_{\theta z}}{\tau_{\theta z}\left(-\frac{3\xi}{2\rho^2}+\frac{e_{\theta z}}{\rho}\right)-e_{\rho\theta}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}+e_{\theta z}\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial z}}. \tag{25}$$

Согласно (9) и (25), характеристики соотношений (8) и (24) совпадают. С учетом (11) и (12) из системы уравнений (25) имеем

$$\frac{d\rho}{\tau_{\theta z}}=-\frac{dz}{\tau_{\rho\theta}}=\frac{de_{\theta z}}{\tau_{\theta z}\left(-\frac{3\xi}{2\rho^2}+\frac{e_{\theta z}}{\rho}\right)}. \tag{26}$$

Из уравнения

$$\frac{de_{\theta z}}{d\rho}-\frac{e_{\theta z}}{\rho}=-\frac{3\xi}{2\rho^2}. \tag{27}$$

определим компоненту тензора деформации $e_{\theta z}$

$$e_{\theta z}=\frac{3\xi}{4\rho}+c_2\rho \tag{28}$$

где $c_2=const$ вдоль характеристики

Учитывая равенства (11), (12) и (28), из уравнения (17) находим компоненту тензора деформации $e_{\rho\theta}$

$$e_{\rho\theta}=\pm\frac{c_1}{\sqrt{k^2\rho^4-c_1^2}}\left(\frac{3\xi}{4\rho}+c_2\rho\right). \tag{29}$$

Компоненты тензора деформации $e_{\theta z}$, $e_{\rho\theta}$ на линии разрыва напряжений равны нулю. Следовательно, в области, примыкающей к части контура $\rho=R$, имеем

$$e_{\theta z}=\frac{3\xi\rho}{4}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{(R+z-a)^2}\right),\ e_{\rho\theta}=0, \tag{30}$$

а в области, примыкающей к части контура $z=a$, имеем

$$e_{\theta z}=0,\ e_{\rho\theta}=\frac{3\xi}{2\rho^2}(z-a-\rho+R). \tag{31}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. с. 398.
[2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. с. 232.
[3] Миронов Б. Г., Тихонов С. В. Об одном виде анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1 (11). С. 36–38.
[4] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1 (11). С. 60–62.
[5] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. Предельное состояние трансляционно анизотропных стержней при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 1 (19). С. 132–139.

[6] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. О кручении сектора толстостенной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 2 (56). С. 36–40.

[7] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. Об определении компонент деформации в случае кручения изотропных стержней, находящихся под действием внешнего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 13–17.

B. G. Mironov[1], *Yu. B. Mironov*[2]

ON THE QUESTION OF TORSION OF THE RING SECTOR

[1] *Russian University of transport, Moscow, Russia*

[2] *Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. This work examines the tension and deformed state of a sector of a ring made of ideal rigid plastic material under torsional deformation. In [1], elastic, purely plastic and elastic-plastic distribution of stresses during torsion rods, based on the half-reverse Saint-Venant method. In [2] considered basic equations and boundary conditions of the theory of torsion of ideally plastic rods, the stressed and deformed states of the rods are determined, discontinuous solutions were found. The torsion of various rods, sectors has been studied circular ring, variable cross-section rods from an ideal rigid plastic material. In [4] the general relations of the theory are defined torsion of rods with one type of anisotropy - translational anisotropy. In work [3], the dissipative function of the theory of translational ideal plastic anisotropy in torsion. [5] is devoted to the study limit state of translationally anisotropic rods during deformation torsion. In [7], the torsion of the isotropic sector of a thick-walled pipes. In work [6], provided that the rod is under the influence of an external pressure, the problem of determining the deformation components in the case of torsion is solved.

Keywords: torsion, isotropy, torsional deformation, components stress, plasticity condition, strain tensor, equilibrium equations, movement.

REFERENCES

[1] Prager W., Hodge F. G. Theory of ideally plastic bodies. M.: IL, 1956. p. 398.

[2] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. M.: Nauka, 1966. p. 232.

[3] Ivlev D. D., Mironov B. G. On the dissipative function in the theory of translational ideal plastic anisotropy under torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2012. no. 1 (11). P. 60–62.

[4] Mironov B. G., Tikhonov S. V. About one type of torsional anisotropy // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2012. no. 1 (11). P. 36–38.

[5] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. Limit state of translationally anisotropic rods under torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2014. no. 1 (19). P. 132–139.

[6] Mironov B. G., Mironov Y. B. On determining the deformation components in the case of torsion of isotropic rods under the influence of external pressure // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2023. no. 1 (55). P. 13–17.

[7] Mironov B. G., Mironov Y. B. About torsion of a thick-walled pipe sector // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2023. no. 2 (56). P. 36–40.

Mironov Boris Gurjevich , Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Mironov Yuri Borisovich , Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.