

В. Э. Богачева

ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА НА КРИТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ J-ИНТЕГРАЛА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Рассматривается упругое деформирование композита в состоянии плоской деформации. Пластина состоит из двух консолей, соединенных адгезионным слоем. Внешняя нагрузка обеспечивает нормальный разрыв слоя. Из общей вариационной постановки с учетом теории Миндлина–Рейсснера получена постановка в дифференциальном виде. Приведено аналитическое решение для диапазона толщин слоя, при которых характеристическое уравнение имеет комплексные корни. Исследуется влияние коэффициентов Пуассона консоли и слоя на распределение напряжений в адгезиве и значение J-интеграла.

Ключевые слова: адгезив, композит, слой взаимодействия, нормальный отрыв, упругое деформирование, J-интеграл.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.007

УДК: 539.375

Введение. Исследуя прочность адгезионных слоев, в качестве образца обычно используют двухконсольную балку, а трещиноподобный дефект в адгезиве моделируют слоем нулевой толщины. В работах [1–4] этот дефект представляют в виде разреза с характерной толщиной. При моделировании процесса зарождения трещины адгезионный слой можно заменить "слоем взаимодействия" [4], с механическими характеристиками адгезива и толщиной в виде линейного параметра δ_0 .

В качестве критерия разрушения можно использовать достижение J-интегралом [5] критического значения. Одним из способов его нахождения для тел конечных размеров является решение 2D-задачи методом конечных элементов (МКЭ). Также возможно получение аналитических решений с использованием в рассмотрении упрощения теорию пластин [6, 7].

© Богачева В. Э., 2023

Богачева Виктория Эдуардовна

e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, аспирант кафедры вычислительной механики и математики, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Исследование выполнено за счет гранта ректора для поддержки молодых ученых № ВММ/23/01/ГРР.

Поступила 20.11.2023

1. Постановка задачи. В данной статье исследуется нагружение нормальным отрывом композитной пластины длиной $\ell + a$ (рис. 1). Она состоит из двух консолей с одинаковыми толщинами h и механическими свойствами, сопряженных по длине ℓ адгезионным слоем 3 толщиной δ_0 . Правый торец слоистого композита жестко закреплен от перемещений, на левом торце на тела 1 и 2 действует антисимметричная распределенная нагрузка интенсивностью P . Пластина находится в состоянии плоской деформации. Считается, что между границами слоя 3 и консолями 1 и 2 жесткое сцепление, а по границам слоя равенство противоположность векторов напряжений.

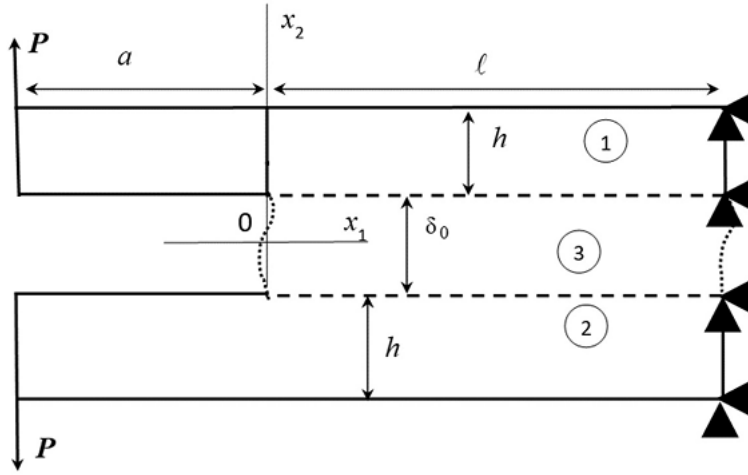


Рис. 1. Нагружение композита нормальным отрывом

Применим концепцию "слоя взаимодействия" [4] для описания взаимодействия адгезионного слоя с консолями. Для рассматриваемого образца поле перемещений границ адгезива имеет вид: $u_1^+ = u_1^-$, $u_2^+ = -u_2^-$, где u_n^+ , u_n^- — соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя, $n = 1, 2$ здесь и далее. Поэтому достаточно ограничиться исследованием консоли 1. Запишем ее уравнение равновесия в вариационной форме:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5\delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1)$$

где S_1 — площадь поперечного сечения тела 1; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры напряжений и деформаций; L_1 — граница приложения внешней нагрузки для тела 1; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — тензоры средних напряжений и деформаций адгезионного слоя с компонентами: $\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11} dx_2$,

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22} dx_2, \quad \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21} dx_2,$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = \frac{du_1^+}{dx_1}, \quad \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \frac{2u_2^+}{\delta_0}, \quad \bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\varepsilon}_{21} = 0. \quad (2)$$

Вариационное уравнение для тела 1 (1) замкнем определяющими соотношениями в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_n}{1 + \nu_n} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu_n}{1 - 2\nu_n} \varepsilon \delta_{ij} \right), \bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right), \quad (3)$$

где E_n , ν_n — модуль Юнга и коэффициент Пуассона n -го тела; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ — объемная деформация; δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Согласно теории Миндлина [6] поле перемещений в консоли определено следующим образом:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1). \quad (4)$$

А учтя теорию Миндлина – Рейсснера [7], получим следующее напряженное состояние в теле 1:

$$\sigma_{11} = D \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{d\varphi}{dx_1} (x_2 - \delta_0/2) \right), \sigma_{12} = L \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right), \quad (5)$$

где $L = k \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$; $k = \frac{5}{6}$; $D = \frac{E_1}{(1-\nu_1^2)}$.

Таким образом, от (1) приходим к двум системам дифференциальных уравнений для тела 1:

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0; \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0; x_1 \in [-a; 0), \\ \frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0; \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}; x_1 \in (0; \ell], \end{cases} \quad (6)$$

где $M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2$, $Q_{1n}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{1n} dx_2$ — обобщенный момент и обобщенные силы.

Из (2) и (3) получим напряженное состояние в слое взаимодействия:

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 \frac{du_1^+}{dx_1} + D_2 u_2^+, \bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 \frac{du_1^+}{dx_1}, \quad (7)$$

где $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$; $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$; $C_1 = \frac{2D_1}{\delta_0}$; $C_2 = \frac{\delta_0 D_2}{2}$.

Система (6) имеет граничные условия:

$$M_{11}|_{x_1=-a} = 0, Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, Q_{12}|_{x_1=-a} = Ph, \quad (8)$$

$$u_n^+|_{x_1=\ell} = 0, \varphi|_{x_1=\ell} = 0, \quad (9)$$

и условия сопряжения в точке $x_1 = 0$:

$$\begin{aligned} M_{11}|_{x_1=-0} &= M_{11}|_{x_1=+0}, Q_{11}|_{x_1=-0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0}, \\ Q_{12}|_{x_1=-0} &= Q_{12}|_{x_1=+0}, u_n^+|_{x_1=-0} = u_n^+|_{x_1=+0}, \varphi|_{x_1=-0} = \varphi|_{x_1=+0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Можно ограничиться рассмотрением только участка $(0; \ell]$, перенеся граничные условия (8) в точку $x_1 = 0$:

$$M_{11}|_{x_1=+0} = Pha, (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0} = 0, Q_{12}|_{x_1=+0} = Ph. \quad (11)$$

В результате система (6) с учетом напряженного состояния (7), условий (8)–(10) становится замкнутой. Решение поставленной задачи определяют функции u_n^+ , φ .

2. Решение задачи. Характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (6) на участке $(0; \ell]$ имеет вид:

$$\lambda^4 - (m_2 + m_1 m_3 + m_4) \lambda^2 + m_2 m_4 = 0, \quad (12)$$

где $m_1 = 1 + \frac{DhC_2}{2LS_2}$; $m_2 = \frac{1}{Lh} \left(C_1 - \frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2} \right)$; $m_3 = -\frac{3(\delta_0 D_2 Dh + 4LS_2)}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $m_4 = \frac{12LS_2}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $S_2 = Dh + 0.5\delta_0 D_1$.

Дискриминант уравнения (12) определяется следующим образом:

$$d^2 = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4. \quad (13)$$

На рис. 2 показана зависимость дискриминанта (13) от относительной толщины адгезионного слоя 3 для образца с механическими характеристиками консоли 1 : $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_1 = 0.3$. В качестве адгезива берется смола Araldite AV138 [8], у которой $E_3 = 4.9 \cdot 10^9$ Па, $\nu_3 = 0.35$. А геометрические характеристики композита следующие: $h = 0.0127$ м, $a = 0.55$ м, $\ell = 0.245$ м, $b = 0.025$ м, где b — толщина образца.

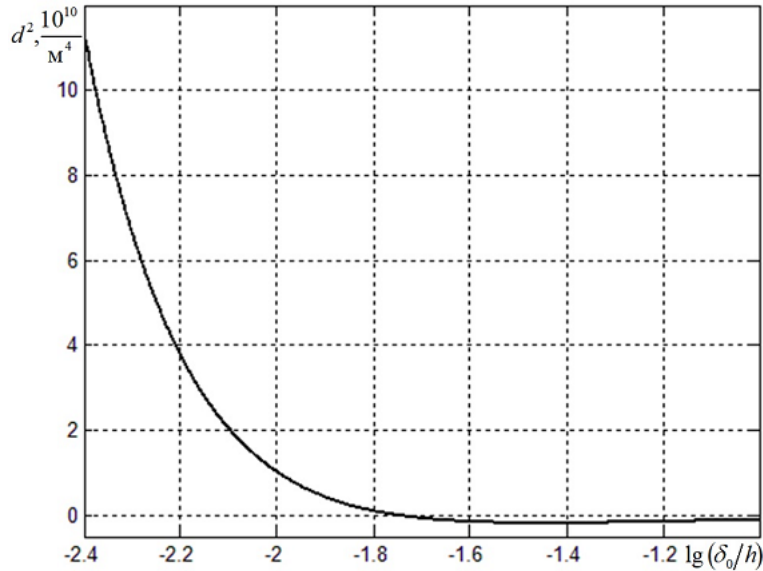


Рис. 2. Зависимость дискриминанта характеристического уравнения от относительной толщины адгезионного слоя

Из рис. 2 видно, что значения дискриминанта принимают как положительные, так и отрицательные значения. При положительных значениях (13), соответствующих действительным корням характеристического уравнения, решение получено в статье [9]. В данной работе рассматривается решение, подробное нахождение которого описано в статье [10], при отрицательных значениях дискриминанта, то есть при комплексных корнях (12).

Согласно работе [10], общее решение системы (6) на участке $(0; \ell]$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
u_1^+ &= \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ +R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
&- \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ +R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\
&+ \left[\frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2 (C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2)} + \frac{1}{S_2} \right] \tilde{C}_1 x_1 + \tilde{C}_6,
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
u_2^+ &= \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) - \\ -R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
&- \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
&- \frac{C_2}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2} \tilde{C}_1,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\
&+ \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{16}$$

где $R_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}$; $R_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}$; $\alpha = \frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4}{2}$; $\beta = \frac{\sqrt{-d^2}}{2}$; $R_3 = \frac{m_2 - R_1^2 + R_2^2}{m_1}$; $R_4 = \frac{2R_1 R_2}{m_1}$; $R_5 = \frac{Dh^2(R_1 R_3 + R_2 R_4) + \delta_0 D_2 R_1}{2S_2}$; $R_6 = \frac{Dh^2(R_2 R_3 - R_1 R_4) + \delta_0 D_2 R_2}{2S_2}$; $R_7 = \frac{R_1}{R_1^2 + R_2^2}$; $R_8 = \frac{R_2}{R_1^2 + R_2^2}$; $R_9 = R_5 R_7 + R_6 R_8$; $R_{10} = R_6 R_7 - R_5 R_8$.

Чтобы найти частное решение рассматриваемой задачи, необходимо удовлетворить граничным условиям (9), (11).

Построим распределение напряжений (7) адгезионного слоя (рис. 3) в рассмотренном ранее образце при $\delta_0 = 10^{-3}$ м. Возьмем значение внешней нагрузки $P_{cr} = 1.1$ кН, которое согласно проведенному в работе [8] эксперименту является нагрузкой разрушения адгезива. На рис. 3 графики 1 и 2 соответствуют образцу с коэффициентом Пуассона адгезива $\nu_3 = 0$, а графики 3 и 4 – с $\nu_3 = 0.35$. Графики 1, 3 определяют напряжение $\bar{\sigma}_{11}$, графики 2, 4 – $\bar{\sigma}_{22}$.

Из анализа напряженного состояния в адгезиве Araldite AV138 на рис. 3 видим, что коэффициент Пуассона адгезионного слоя значительно влияет на распределение напряжений адгезива.

Рассмотрим критическое значение J-интеграла (J_C -интеграла) на левом торце адгезионного слоя. В статье [11] J-интеграл определен в виде произведения толщины слоя и удельной свободной энергии. Для нормального разрыва слоя в критическом состоянии J_C -интеграл найдем в виде:

$$J_C = 0.5\delta_0 (\bar{\sigma}_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22}\bar{\varepsilon}_{22}), \tag{17}$$

где $\bar{\sigma}_{nn}$, $\bar{\varepsilon}_{nn}$ – средние напряжения и деформации слоя в критическом состоянии.

В таблице приведены результаты расчета J_C -интеграла (17) для критической нагрузки P_{cr} при $\nu_1 = 0.1; 0.2; 0.3$ и $\nu_3 = 0; 0.35$. Сравниваются значения, полученные с

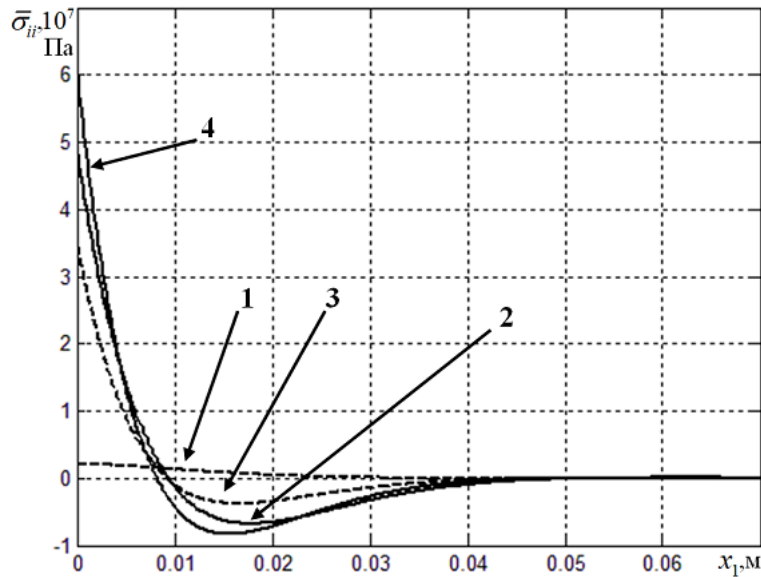


Рис. 3. Напряженное состояние в адгезионном слое

помощью аналитического решения (14)–(16) и МКЭ [11]. При построении численного решения используется треугольный шести узловой конечный элемент с длиной грани равной линейному параметру в зоне обрыва связей с адгезивом. В работе [8] для адгезива Araldite AV138 при $\nu_1 = 0.3$, $\nu_3 = 0.35$ получено экспериментальное значение J_C -интеграла, равное 200 Н/м.

ν_1	Аналитика	МКЭ
0.1	255 (246)	258 (250)
0.2	249 (240)	250 (243)
0.3	239 (230)	238 (231)

Таблица 1. Значения J_C -интеграла (Н/м) при $\nu_3 = 0(0.35)$

Из результатов расчета видно, что, относительная погрешность между методами менее 1.6 %. Установлено, что изменение коэффициента Пуассона консоли 1, влияет на J_C -интеграл, а коэффициент Пуассона слоя практически не оказывает влияние на его значение.

Заклучение. Рассмотрена модель упругого деформирования адгезионного слоя, диапазон относительных толщин которого соответствует отрицательным значениям дискриминанта характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений, соответствующих условиям равновесия. Результаты, полученные с помощью аналитического решения, близки к значениям рассчитанным МКЭ. Установлено, что коэффициент Пуассона слоя значительно влияет на распределение напряжений адгезива, но практически не изменяет величину J_C -интеграла. А коэффициент Пуассона тела оказывает влияние на J_C -интеграл.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ентов В. М., Салганик Р. Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 87–99.
- [2] Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубоководном горизонтальном пласте // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2015. № 2. С. 24–33.
- [3] Макклиток Ф. Пластические аспекты разрушения // Разрушение. Москва: Мир, 1975. Т. 3. С. 67–262.
- [4] Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 193–194. P. 447–454.
- [5] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. Москва: Наука, 1974. 640 с.
- [6] Mindlin R. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME Journal of Applied Mechanics. 1951. Vol. 18. P. 31–38.
- [7] Reissner E. On Bending of Elastic Plates // Quarterly of Applied Mathematics. 1947. Vol. 5, no. 1. P. 55–68.
- [8] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. Vol. 67. P. 103–111.
- [9] Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 3. С. 22–34.
- [10] Богачева В. Э. Исследование деформирования тонкого адгезионного слоя композита при воздействии нормальным отрывом // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2023. № 7. С. 38–45.
- [11] О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 1. Упругое деформирование / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 3. С. 116–124.

V.E. Bogacheva

INFLUENCE OF MECHANICAL CHARACTERISTICS OF A LAYERED COMPOSITE ON THE CRITICAL VALUE OF THE J-INTEGRAL

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. The elastic deformation of a composite in a state of plane strain is considered. The plate consists of two consoles connected by an adhesive layer. External load ensures normal rupture of the layer. From the general variational formulation, taking into account the Mindlin–Reissner theory, a differential formulation was obtained. An analytical solution is given for the range of layer thicknesses for which the characteristic equation has complex roots. The influence of the Poisson’s ratios of the cantilever and layer on the stress distribution in the adhesive and the value of the J-integral is investigated.

Keywords: adhesive, composite, interaction layer, normal separation, elastic deformation, J-integral.

REFERENCES

- [1] Entov V. M., Salganik R. L. To the Prandtl model of brittle fracture // *Izv. AN SSSR. MTT*. 1968. no. 6. P. 87–99. (in Russian).
- [2] Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Stress state in the vicinity of excavation in deep horizontal bed // *Journal of Mining Science*. 2015. no. 2. P. 24–33. (in Russian).
- [3] Makhlintok F. Plastic aspects of destruction // *Razrushenie*. Moscow: Mir, 1975. Vol. 3. P. 67–262. (in Russian).
- [4] Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 193-194. P. 447–454.
- [5] Cherepanov G. Mechanics of brittle fracture. Moscow: Nauka, 1974. 640 p. (in Russian).
- [6] Mindlin R. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1951. Vol. 18. P. 31–38.
- [7] Reissner E. On Bending of Elastic Plates // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1947. Vol. 5, no. 1. P. 55–68.
- [8] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // *Journal of Adhesion and Adhesives*. 2016. Vol. 67. P. 103–111.
- [9] Stress state and conditions for crack initiation in the adhesion layer of the composite / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2021. no. 3. P. 22–34. (in Russian).
- [10] Bogacheva V. E. Investigation of deformation of a thin adhesive layer of a composite under the influence of a normal separation // *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki*. 2023. no. 7. P. 38–45. (in Russian).
- [11] On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2022. no. 3. P. 116–124. (in Russian).